

28

ARC DU MÉRIDIEN

DE 25° 20'

ENTRE

LE DANUBE ET LA MER GLACIALE,

MESURÉ,

DEPUIS 1816 JUSQU'EN 1855,

SOUS LA DIRECTION

DE

C. DE TENNER,

GÉNÉRAL D'INFANTERIE DE L'ÉTAT-MAJOR IMPÉRIAL
DE RUSSIE,

CHR. HANSTEEN,

DIRECTEUR DU DÉPARTEMENT GÉOGRAPHIQUE ROYAL
DE NORVÈGE,

N. H. SELANDER,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE ROYAL
DE STOCKHOLM,

F. G. W. STRUVE,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE-CENTRAL-NICOLAS
DE RUSSIE.

OUVRAGE COMPOSÉ SUR LES DIFFÉRENTS MATÉRIAUX ET RÉDIGÉ

PAR

F. G. W. STRUVE.

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE ST. PÉTERSBOURG.

TOME PREMIER,

OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES ENTRE LE DANUBE ET LE GOLFE DE FINLANDE.

ST. PÉTERSBOURG, 1860.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg

MM. Eggers et C^{ie},

à Riga

M. Samuel Schmidt,

à Leipzig

M. Léopold Voss.

Prix des deux volumes avec atlas de 26 planches: 10 Roub. arg. = 11 Thlr. 3 Ngr.

Presented to Lt Colonel J. T. Walker
by Messrs. Struve.

Imprimé par ordre de l'Académie.

Décembre 1860.

C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.

A SA MAJESTÉ
ALEXANDRE II

EMPEREUR DE TOUTES LES RUSSIES

ETC. ETC. ETC.

ET

A SA MAJESTÉ
CHARLES XV

ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

ETC. ETC. ETC.

TABLE DES MATIÈRES.

TOME PREMIER.

INTRODUCTION.

	Page.
Coup d'oeil général et Histoire	I à XL
Étendue et subdivision de l'arc total de 25° 20'	I
Subdivision de l'arc total d'après les provinces	IV
Énumération des 13 points astronomiques, où la latitude et l'azimut ont été observés	V
Fixation des centres de station et des termes des bases par des marques durables. Colonnes monumentales érigées aux extrémités de l'arc total	V
Anciens projets de J. Delisle et de Lindenau	VII
Histoire de la mesure de l'arc du méridien de 25° 20', exécutée depuis 1812 jusqu'en 1860	IX à XI.
Première période, depuis 1812 jusqu'en 1831	IX
Seconde " " 1830 " 1844	XV
Troisième " " 1844 " 1861	XVIII
a. Travaux relatifs à l'arc russe	XVIII
b. " " " scandinave	XXI
Quatrième période. Travaux postérieurs à 1861	XXXV
Analyse des latitudes déterminées sur les 13 points astronomiques	XLI à LXX
A. Latitudes de l'arc du milieu ou Baltique	XLI
B. Latitudes de l'arc méridional entre la Duna et le Danube	XLIII à LIX
Liste des instruments employés	XLIII
1. Latitude de Staro-Nekrassowka	XLIV
2. " " " Wodolui	LI
3. " " " Sauprunkowzi	LII
4. " " " Kromonetz	LIII
5. " " " Belin	LIV
6. " " " Nemesch	LVIII
C. Latitudes de l'arc septentrional entre le Golfe de Finlande et la Mer Glaciale	LX à LXX
1. Latitude de Hogland	LX
2. " " " Kilpi-mäki	LX
3. " " " Tornea	LXII
4. " " " Stuor-oivi	LXVI
5. " " " Fuglenaes	LXVI
Explication des planches	LXXI
Addition A, Comparaisons de mesures linéaires	LXXXIII
Addition B, Rapport de M. Lindhagen sur l'expédition au Finmarken norvégien de 1850	LXXXII
Addition C, Rapport de M. Lindhagen sur l'expédition en Laponie, exécutée en 1851	CI
Addition D, Rapport de M. Prazmowski sur l'expédition en Bessarabie en 1852	CXVII
Addition E, Résultats de l'expédition chronométrique exécutée en été 1854 entre Poulkova et Dorpat	CXXIX
Addition F, Note de M. Doellen ad p. XLII	CXXXIX
Addition G, Catalogue chronologique des publications qui se rapportent à la mesure de l'arc du méridien de 25° 20'	CXXI

ARC MÉRIDIONAL. OPÉRATIONS GEODÉSIQUES ENTRE LE DANUBE ET LE GOLFE DE FINLANDE.

	Page.
CHAP. I. Forme et dimensions des triangles, en dépendance du terrain et d'autres circonstances	1 à 12
§ 1. Forme, dimensions et progrès des triangles, en général; poids de continuation d'un triangle	1
§ 2. Influence du terrain sur le choix des stations.	3
§ 3. Le terrain entre le Golfe de Finlande et le Danube, divisé en quatre régions distinctes	4
1. Région de l'arc Baltique, 384 verstes	5
2. " " " de Lithuanie, 482 "	6
3. " " " de Volynie, 356 "	7
4. " " " de Bessarabie, 335 "	8
§ 4. Poids géométrique, poids trigonométrique, poids général des triangles, dans les 4 régions	10
CHAP. II. Les signaux.	13 à 16
§ 5. Considérations générales	13
§ 6. Les signaux des stations de l'arc Baltique.	13
§ 7. Les signaux érigés entre la Duna et le Danube	15
CHAP. III. Instruments employés à la mesure des angles terrestres	17 à 20
§ 8. Instrument employé par Struve dans les opérations de l'arc Baltique.	17
§ 9. Instruments employés dans les opérations de M. de Tenner	18
CHAP. IV. Méthodes employées pour l'observation des angles terrestres	21 à 35
§ 10. Notices historiques relatives aux méthodes d'observation.	21
§ 11. Examen de l'exactitude dans les éléments d'une observation faite à l'aide de l'instrument universel	23
§ 12. Méthode de la mesure simple des angles par réitération	25
§ 13. Comparaison entre la répétition et la réitération. Détails de l'usage de la méthode de réitération.	27
§ 14. Notice historique sur l'application de la réitération. Nécessité de l'emploi de la lunette de vérification.	29
§ 15. Résumé des méthodes d'observation employées à la mesure des angles horizontaux des quatre arcs	33
CHAP. V. Unités linéaires employées dans les opérations de l'arc du méridien.	36 à 39
§ 16. Étalon-module N. Copies de cet étalon et échelle-étalon à traits T, comparées au module	36
§ 17. Emploi des étalons dans la mesure des différentes bases. Notice sur l'échelle T.	37
CHAP. VI. Les deux appareils employés pour la mesure des bases	40 à 51
§ 18. L'appareil de Struve.	40
§ 19. L'appareil de M. de Tenner	45
§ 20. Coefficients de dilatation des étalons et des règles de Struve	46
§ 21. Coefficients de dilatation de l'étalon et des règles de Tenner.	50
§ 22. Dilatation moyenne des barres de fer forgé, employées dans nos opérations	51
CHAP. VII. Mesure des bases. Évaluation de l'exactitude des bases mesurées.	52 à 76
§ 23. Dimensions des bases. Choix du terrain.	52
§ 24. Exactitude des 7 bases mesurées à l'aide de l'appareil de Struve.	54
§ 25. Mesure des bases à l'aide des appareils de Tenner. Exactitude des bases mesurées	68
§ 26. Valeurs définitives des six bases de l'arc méridional, réduites au niveau de la Mer.	73
CHAP. VIII. Excès de la somme des trois angles sur 180°, dans les triangles tracés sur le sphéroïde terrestre	77 à 87
§ 27. Formules et tables générales. Incertitude dans les dimensions de la Terre. Dimen-	

TABLE DES MATIÈRES.

	Page.
sions préalables de la Terre, déduites d'une comparaison de notre arc total avec l'arc total des Indes, combinées avec les dimensions données par Bessel	77
§ 28. Application des formules et des tables.....	85
1. Calcul de l'excès dans les triangles primitifs.....	85
2. " " " " " " qui fournissent les coordonnées polaires..	85
3. " " " " " " rectangles sur le sphéroïde terrestre....	86
CHAP. IX. Triangles primitifs, déduits des journaux d'observation	88 à 143
§ 29. Marche des opérations géodésiques par de simples triangles, sans diagonales. Classification et terminologie des triangles etc.....	88
<p style="margin-left: 40px;"><i>Angles de continuation, angles intermédiaires</i> <i>Côtés transversaux, côté latéral.</i> <i>Côtés fondamentaux.</i> <i>Triangles de continuation.</i> <i>a. principaux, b. excédants.</i> <i>Triangles de rattachement.</i> <i>Triangles auxiliaires, triangles surnuméraires.</i></p>	
§ 30. Résumé des tableaux à former. Déduction des angles primitifs, des journaux d'observation. Petites différences entre les chiffres des secondes, adoptés par Struve et ceux qu'a donnés Tenner, pour 10 angles. Calcul des triangles à l'aide des tables logarithmiques à 7 places décimales, en conservant la huitième place donnée par l'interpolation. Tables de Taylor et de Bagay, comparées toujours dans les calculs	90
§ 31. Tableau A. Triangles de rattachement entre les bases et les côtés fondamentaux des triangles de continuation. Valeurs des 6 côtés fondamentaux	95
I. Triangles qui rattachent la base de Simonis	96
III. " " " " " " Ossownitza	97
IV. " " " " " " Staro-Konstantinow	98
V. " " " " " " Romankoutzi	99
VI. " " " " " " Taschbunar	101
§ 32. Analyse de la compensation des angles dans un polygone formé autour d'un point central	103
§ 33. Tableau B. Polygones autour de stations centrales.....	107
I. Pentagone autour de Dabors-kalns	107
II. Hexagone autour de Dokudowo	108
III. Hexagone autour de Bronna	110
§ 34. Tableau C. Triangles de continuation principaux.....	111
I. Triangles principaux et comparaison entre les côtés fond. L^I et L^{II}	113
II. " " " " " " " " " " L^{II} et L^{III}	119
III. " " " " " " " " " " L^{III} et L^{IV}	126
IV. " " " " " " " " " " L^{IV} et L^V	131
V. " " " " " " " " " " L^V et L^{VI}	134
§ 35. Tableau D. Triangles de continuation excédants	140
I. Triangles de cont. excéd. au nord de L^I	140
II. " " " " " sud de L^{VI}	142
§ 36. Tableau E des deux triangles auxiliaires.....	143
I. Pour la jonction de l'Observatoire de Dorpat	143
II. Pour la jonction du point astr. Jacobstadt	143
CHAP. X. Exactitude des mesures angulaires	144 à 156

TABLE DES MATIÈRES.

	Page.
§ 37. Principes de recherche	144
§ 38. Exactitude des angles de l'arc Baltique	145
§ 39. " " " " " de Lithuanie	148
§ 40. " " " " " de Volynie et de Podolie	150
§ 41. " " " " " de Bessarabie	151
§ 42. Résumé et continuation de la recherche sur l'exactitude des angles	152
CHAP. XI. Analyse de la compensation à faire dans une suite de triangles, plusieurs côtés étant donnés	157 à 165
§ 43. Compensation de triangles situés entre deux côtés donnés	157
§ 44. Compensation d'une suite de triangles situés entre plusieurs côtés donnés	161
1. Trois côtés étant donnés	161
2. Plusieurs côtés étant donnés	163
CHAP. XII. Calcul de compensation, pour les 142 triangles principaux, en dépendance des six côtés fondamentaux I' à I''	166 à 189
§ 45. Formation et résolution des 5 équations qui déterminent les coefficients indéterminés x^f	166
§ 46. Bases et côtés fondamentaux, compensés	168
§ 47. Compensation des triangles des 5 groupes C. I à C. V	169
G. I. Calcul de compensation pour le groupe C. I	171
G. II. " " " " " C. II	175
G. III. " " " " " C. III	180
G. IV. " " " " " C. IV	184
G. V. " " " " " C. V	186
CHAP. XIII. § 48. Tableau des angles et des côtés définitifs, des 155 triangles qui produisent la jonction des 9 points astr. de l'arc méridional, compris entre le Danube et le Golfe de Finlande	190 à 213
CHAP. XIV. Les azimuts observés	214 à 243
§ 49. Tableau des latitudes des 9 points où l'azimut a été déterminé	214
§ 50. Instruments et méthodes d'observation, employés pour la détermination de l'azimut. Sur l'exactitude des azimuts observés à l'aide de l'instrument universel	215
Corrections des lieux apparents de l'étoile polaire puisés dans les <i>Tabulae Regiomontanae</i>	220
§ 51. Les 9 azimuts déterminés	221
1. Azimut déterminé par M. Prazmovski à Staro-Nekrassowka, 1852	221
2. Azimut déterminé par M. Sabler à Wodolui, 1848	224
3. Azimut déterminé par Melan à Ssuprunkowzi, 1838	225
4. Azimut observé par Melan à Kremenetz, 1837	226
5. Azimut observé par M. Chodzko à Belin, 1827	227
6. Azimut observé par M. Hluschnewitsch à Nemesch, 1832	232
7. Azimut observé par Struve à Jacobstadt, 1826	237
8. Azimut observé par Struve à Dorpat, 1824 à 1831	238
9. Azimut observé par Struve à Mäki-päälys, 1826	240
§ 52. Azimuts et distances des stations voisines des points astronomiques	242
CHAP. XV. Triangles polaires et coordonnées polaires dans les différents arcs partiels	244 à 305
§ 53. Formules pour le calcul des coordonnées polaires. Usage des tables de Zech	245
§ 54. Triangles polaires et coordonnées polaires, depuis Wodolui jusqu'à Staro-Nekrassowka	249
§ 55. " " " " " Wodolui " Ssuprunkowzi	256
§ 56. " " " " " Kremenetz " Ssuprunkowzi	263
§ 57. " " " " " Belin " Kremenetz	268

TABLE DES MATIÈRES.

	Page.
§ 58. Triangles polaires et coordonnées polaires, depuis Belin jusqu'à Nemesch	274
§ 59. " " " " " Nemesch " Jacobstadt	283
§ 60. " " " " " Dorpat " Jacobstadt	290
§ 61. " " " " " Dorpat " Mäki-päälys	297
§ 62. Exactitude du calcul des coordonnées polaires.	301
CHAP. XVI. Longueurs des différents arcs partiels. Azimuts déterminés aux deux points extrêmes de chaque	
arc. Comparaison et compensation des deux azimuts	306 à 321
§ 63. Longueurs des lignes géodésiques situées entre les deux points extrêmes des 8 arcs partiels. Azimuts de ces lignes géodésiques déterminés aux points extrêmes des arcs.	306
§ 64. Comparaison des azimuts déterminés aux deux points extrêmes de chaque arc partiel. Formules et tables auxiliaires. Valeur probable de la déviation locale du fil à plomb déduite des recherches de Bessel. Il n'existe dans les différents arcs du méridien, mesurés jusqu'à l'époque actuelle, aucun indice de ce que l'hypothèse d'une ellipse génératrice moyenne du sphéroïde terrestre s'éloigne sensiblement de la réalité. Erreur probable d'un azimut, par suite de la déviation locale du fil à plomb.	309
§ 65. Compensation des azimuts déterminés aux points extrêmes des arcs partiels. Tableau des azimuts définitifs et des distances définitives, pour les huit arcs partiels	320
CHAP. XVII. Calcul des distances des parallèles, pour les huit arcs partiels.	
§ 66. Voie de calcul	322
§ 67. Calcul des distances des parallèles	327
§ 68. Résultats que donne le calcul des distances des parallèles. Évaluation des erreurs probables de ces distances	330



INTRODUCTION.

I. Coup-d'oeil général.

La publication d'un exposé systématique et assez détaillé, sans être prolixo, sur une opération astronomico-géodésique dont les travaux embrassent une période de plus de quarante ans, est une tâche qui réclame plusieurs années de rédaction et d'impression. Je me félicite, par conséquent, de pouvoir présenter maintenant au monde scientifique les deux volumes et le cahier de planches de mon ouvrage sur la mesure de l'arc du méridien de $25^{\circ} 20'$, qui s'étend de la Mer Noire jusqu'à la Mer Glaciale. Ces deux volumes contiennent, en y comprenant cette INTRODUCTION, les résultats des comparaisons faites entre les différentes unités linéaires, employées soit dans nos travaux, soit dans d'autres opérations analogues, l'exposé complet des opérations géodésiques exécutées entre les deux mers, l'analyse des latitudes des 13 points astronomiques qui subdivisent l'arc total en 12 arcs partiels, ainsi que l'analyse des azimuts déterminés sur les 13 points. C'est ainsi que ces volumes forment un ouvrage entier.

J'avais eu l'intention de publier encore un troisième volume, et qui devait contenir les détails des observations astronomiques sur lesquelles sont basés les latitudes et les azimuts, ainsi que l'exposé complet des comparaisons d'unités linéaires, que j'ai exécutées dans l'intérêt de ma tâche. Mais j'ai renoncé à la publication de ce troisième volume, sentant que, par suite d'une grave maladie que j'ai faite en 1858, je ne serais peut-être pas en état de l'achever, et j'ai eu devoir faire entrer dans l'introduction de l'ouvrage et dans les additions annexées à cette introduction les matériaux et les résultats essentiels que j'avais encore à publier.

Je remarque, à cette occasion, que tous les matériaux d'observation qui se rapportent à la mesure de notre méridien se conservent aux archives de l'Observatoire central. Ils se divisent en trois classes, savoir : a) journaux originaux, b) copies vérifiées de journaux originaux, c) extraits vérifiés. Ces documents pourront être consultés dès que le besoin s'en présentera.

L'arc entre les bouches du Danube et la Mer Glaciale peut encore être envisagé comme une majeure partie d'une oeuvre non terminée encore. En effet, la nature ne met aucun obstacle à la continuation de nos triangles, par un arc de près de 12 degrés, dans une direction méridionale jusqu'à l'île de Candie, en traversant la Turquie continentale et les îles de l'Archipel. Entre Fuglenaes et l'île de Candie, il y a plus de 37 degrés de latitude, qui constituent la MÉRIDienne EUROPÉENNE de la plus grande étendue possible, et cet arc est en même

temps de très-près la méridienne moyenne du continent de l'Europe. Car ce continent s'étend, de l'ouest à l'est, depuis le CAP FINISTERRE, longitude $8^{\circ} 20'$ de Ferro, jusqu'à la ville de LÉKATÉRIBOURG, longitude $78^{\circ} 14'$. La moyenne en est de $43^{\circ} 17'$; DORPAT est à $44^{\circ} 23'$.

Notre arc total, compris entre FUGLENAES, latitude $70^{\circ} 40'$, et STARO-NEKRASSOWKA, latitude $45^{\circ} 20'$, embrasse $25^{\circ} 20'$. Il est composé de 258 triangles principaux, pour lesquels il y a 10 bases mesurées. Les triangles qui effectuent la jonction des bases avec les côtés principaux ne sont pas comptés dans le nombre des 258 triangles. La distance entre les dits points extrêmes, comptée sur le grand cercle qui les joint, est de 2700 verstes = 2880 kilomètres = 388 milles géographiques. L'Observatoire de DORPAT se trouve à peu près à mi-chemin de cette ligne, étant éloigné de 1300 verstes = 1387 kilomètres = 187 milles géographiques de FUGLENAES et de 1400 verstes = 1493 kilomètres = 201 milles géographiques de STARO-NEKRASSOWKA, et subdivise l'arc du méridien total en deux portions presque égales : de $13^{\circ} 3'$ au sud de DORPAT et de $12^{\circ} 17'$ au nord. Les deux grands cercles tirés de Dorpat aux deux points extrêmes dévient du méridien de DORPAT, l'un de $7^{\circ} 22'$ du côté sud-est, l'autre de $4^{\circ} 45'$ du côté nord-ouest, en formant à DORPAT un angle obtus de $177^{\circ} 23'$ du côté oriental. Le grand cercle qui joint les deux points extrêmes coupe le méridien de DORPAT dans un point qui est de $2^{\circ} 23'$ au nord de l'Observatoire, sous $60^{\circ} 46'$ de latitude, près de la ville finlandaise de LOVISA, située sur le bord septentrional du Golfe de Finlande. Par conséquent, le méridien de DORPAT doit être regardé comme le méridien principal de notre arc total, et l'OBSERVATOIRE DE DORPAT est en même temps le point fondamental de cet arc, parce que, du nombre des 13 points astronomiques de cet arc, c'est le seul point dont la longitude soit déterminée avec une exactitude éminente, par l'opération chronométrique exécutée, en 1854, entre POULKOWA et DORPAT.

La division de l'arc total en deux moitiés, et qui prend DORPAT pour point du milieu, n'est cependant pas conforme au développement des opérations géodésiques qui dépendent essentiellement de la constitution du terrain. Dans l'ouvrage actuel, l'arc total a bien été également divisé en deux portions principales géodésiques, un arc méridional et un arc septentrional, mais qui se rencontrent sur l'île de HOGLAND, dans le Golfe de Finlande, et non pas à DORPAT. Effectivement, les triangles de ces deux portions forment deux corps distincts, seulement en contact par le point commun MÄKI-PÄÄLYS sur HOGLAND, mais sans qu'il existe une jonction complète entre le dernier triangle de l'arc méridional avec le premier triangle de l'arc septentrional. C'est ainsi que nous avons :

- a) *L'arc méridional* compris entre STARO-NEKRASSOWKA et HOGLAND, d'une étendue de $14^{\circ} 45'$ en latitude, entre les latitudes $45^{\circ} 20'$ et $60^{\circ} 5'$. Sur cet arc, il y a six bases mesurées, savoir :

	Latitude.	Différence.	Élévation moyenne au-dessus de la Mer.	Époque de la mesure.
La base de TAschbunar.	45° 35'	2° 55'	27 toises	1852
» » » Romankautzi	48 30	1 12	119 »	1848
» » » Staro-Konstantinow	49 42	2 33	9 »	1838
» » » Ossownitza.	52 15	3 43	14 »	1827
» » » Ponedeli.	55 58	3 4	10 »	1820
» » » Simonis.	59 2		55 »	1827

La base de TAschbunar est de 15' au nord de Staro-NEKRASSOWKA, celle de SIMONIS est de 1° 3' au sud de MÄKI-PÄÄLYS. Sans compter les triangles qui réunissent chacune des bases à un des côtés d'un triangle principal, il y a dans cet arc 135 triangles principaux, ou qui sont en continuation non interrompue. Voyez T. I, p. 191 à 215.

b) *L'arc septentrional* entre HOGLAND et FUGLENAES, d'une étendue de 10° 35' en latitude, entre les latitudes de 60° 5' et 70° 40'. Sur cet arc, il y a quatre bases mesurées, savoir :

	Latitude.	Différence.	Élévation moyenne au-dessus de la Mer.	Époque de la mesure.
La base d'Elimä	60° 50'	4° 10'	11 toises	1844
» » d'Uleaborg.	65 0	1 22	1 »	1845
» » d'Öfver-Tornea.	66 22	3 33	25 »	1851
» » d'Alten	69 55		2 »	1850

La base d'ELIMÄ est de 45' au nord de MÄKI-PÄÄLYS, celle d'ALTEN de 45' au sud de FUGLENAES. Il y a sur cet arc 103 triangles principaux. Voir T. II, p. 134 à 148.

C'est ainsi que la partie géodésique de notre ouvrage se partage en deux sections, qui forment les contenus respectifs du texte des Tomes I et II de notre ouvrage.

Nous pouvons distinguer encore les deux parties suivantes de notre arc total, savoir :

L'arc russe, de 20° 30', entre les latitudes 45° 20' et 65° 50', ou depuis le point extrême méridional sur le Danube jusqu'à TORNEA. Sur cet arc, il y a 8 bases et 224 triangles principaux, auxquels il faut ajouter le triangle N° 223, T. II, p. 144, qui a produit la jonction entre cet arc et l'arc suivant ;

L'arc scandinave, de 4° 50', entre les latitudes 65° 50' et 70° 40', ou depuis TORNEA jusqu'à FUGLENAES, point extrême septentrional. Sur cet arc, il y a 2 bases et 33 triangles principaux.

Quant à l'exécution des opérations qui se rapportent à l'arc russe, elle a été effectuée par le concours de l'État-major Impérial, de l'Observatoire de Dorpat et de l'Observatoire central de Poulkova. L'arc scandinave est dû aux efforts des savants et des officiers de Suède et de Norvège, qui ont été assistés en partie par les astronomes et les appareils de l'Observatoire de Poulkova. Nous avons à indiquer ici que les différents travaux géodésiques ont été, comme l'indique le titre de notre ouvrage, sous la direction suprême de quatre chefs, qui sont :

- 1) M. de Tenner, actuellement Général d'infanterie, pour la portion de $11^{\circ} 10'$, de l'arc méridional, comprise entre le Danube et la Duna, ou depuis $45^{\circ} 20'$ jusqu'à $56^{\circ} 30'$ de latitude, et qui contient 5 bases et 125 triangles principaux.
- 2) W. Struve, pour la portion de $9^{\circ} 38'$, comprise entre la Duna et Kaakama-vaara, au nord de Tornea, ou depuis $56^{\circ} 30'$ jusqu'à $66^{\circ} 8'$ de latitude, et qui contient 3 bases et 100 triangles principaux.
- 3) M. Selandér, Membre de l'Académie des sciences de Stockholm et Directeur de l'Observatoire Royal de Suède, pour la portion de $3^{\circ} 13'$, entre Tornea et la station Bäljatz-vaara, au Finmarken norvégien, ou entre $65^{\circ} 50'$ et $69^{\circ} 3'$, et qui contient une base et 21 triangles principaux.
- 4) M. Hansteen, Directeur du Département géographique de Norvège et de l'Observatoire de Christiania, pour la portion de $1^{\circ} 46'$, entre Atjik et Fuglenaes, sur l'île de Kval-oe, dans la Mer Glaciale, ou entre $68^{\circ} 54'$ et $70^{\circ} 40'$, et qui contient une base et 12 triangles principaux.

Sous le point de vue statistique et chronologique, en laissant de côté les observations relatives aux latitudes, et qui ont été en partie répétées à une époque postérieure, mais en considérant la reconnaissance du terrain, l'érection des signaux, les mesures des bases avec les expériences sur les appareils employés, enfin la mesure des angles terrestres et des azimuts, l'arc total se divise en sept parties qui sont :

	Entre les latitudes	Mesuré sous la direction de	Dans les années
1. <i>L'arc de Bessarabie.</i>	$45^{\circ} 20'$ et $48^{\circ} 15'$	M. de Tenner	1844 à 1852
2. <i>L'arc de Podolie et de Volynie.</i>	$48^{\circ} 45'$ » $52^{\circ} 3'$	M. de Tenner	1835 » 1840
3. <i>L'arc de Lithuanie.</i>	$52^{\circ} 3'$ » $56^{\circ} 30'$	M. de Tenner	1816 » 1828
4. <i>L'arc des Provinces Baltiques</i>	$56^{\circ} 30'$ » $60^{\circ} 5'$	Struve	1816 » 1831
5. <i>L'arc de Finlande.</i>	$60^{\circ} 5'$ » $65^{\circ} 50'$	Struve	1830 » 1851
6. <i>L'arc de Laponie.</i>	$65^{\circ} 50'$ » $68^{\circ} 54'$	M. Selander	1845 » 1852
7. <i>L'arc du Finmarken.</i>	$68^{\circ} 54'$ » $70^{\circ} 40'$	M. Hansteen	1845 » 1850

Sur l'arc total, il y a 13 points astronomiques où et l'azimut et la latitude ont été déterminés. Ces points donnent la division géométrique de l'arc total en 12 arcs partiels.

		Latitude.	Arc partiel de
	1. Ismail.	45°20'	1°41'
	2. Wodolui.	47 1	1 43
	3. Ssuprunkowzi.	48 44	1 22
	4. Kremenetz.	50 6	1 56
	5. Belin.	52 2	2 37
	6. Nemesch.	54 39	1 51
	7. Jacobstadt.	56 30	1 53
	8. Dorpat.	58 23	1 42
	9. Hogland.	60 5	2 52
	10. Kilpi-Mäki.	62 57	2 54
	11. Tornea.	65 51	2 49
	12. Stuor-oivi.	68 40	2 0
	13. Fuglenaes.	70 40	

C'est un objet de conséquence que de fixer sur le terrain, par des marques durables, les centres des stations trigonométriques, les extrémités des bases, et surtout les points astronomiques. Car il y a des occasions de revenir, dans le courant des opérations, sur le centre exact d'une station trigonométrique, pour y annexer une continuation des triangles. Il doit être possible de pouvoir remesurer chaque base ou de l'employer comme donnée de départ pour une nouvelle opération. Enfin l'histoire nous a indiqué qu'il est souvent indispensable de réobserver les latitudes déterminées jadis, en employant plus tard des méthodes d'observation plus parfaites et des instruments perfectionnés. M. de Tenner a effectivement désigné, depuis le Danube jusqu'à la Duna, le centre de chacun de ses signaux sur des maçonneries en pierres des champs, enfouies dans le terrain, et qui renferment une brique en position verticale, dont la surface supérieure donnait le centre de la station par l'intersection de ses diagonales. C'était pour lui un objet de haute importance que de pouvoir continuellement contrôler les pointes des pyramides, et le centre de l'instrument, placé d'ordinaire sur des échafaudages d'une hauteur qui dépassait quelquefois 20 toises. Pour les stations de l'arc Baltique, je n'avais pas cru nécessaire d'agir de même sorte, parce que les signaux que j'avais fait construire, étaient d'une solidité qui les rendait invariables pendant la durée totale des opérations. En Finlande, les centres de station ont été marqués d'ordinaire, par des boulons de fer enfoncés et

scellés dans des trous forés dans le roc natif, quelquefois dans des pierres enfouies dans le terrain. Voyez vol. II, p. 212-227. Au Finmarken norvégien, les anas de pierre, voir T. II, p. 12, qui soutenaient les poteaux du centre, paraissent offrir des marques durables, quoique moins précises, vu que la plupart des rochers où les signaux ont été élevés, sont tellement inaccessibles, qu'il est à présumer que peu d'entre eux aient été touchés à d'autres occasions par le pied de l'homme.

D'un autre côté, les termes de nos 10 bases et les 13 stations astronomiques furent tous durablement marqués par des constructions et procédés convenables, de sorte qu'ils ont pu et qu'ils pourront à l'avenir être exactement retrouvés au besoin. Parmi les points astronomiques, les deux points extrêmes sont les plus importants, et dignes d'être désignés par des colonnes monumentales, en souvenir de la grande oeuvre heureusement achevée. Le monument érigé à STARO-NEKRASSOWKA sur le Danube est une pyramide tronquée en fer de fonte, et qui repose sur le cube fondamental de 7 pieds de côté, construit dès que les triangles avaient atteint ce point extrême de notre arc. Sur deux des côtés de la pyramide, on lit les deux inscriptions de sens identique, l'une latine, l'autre russe, que voici :

Terminus australis
Arcus meridiani 25° 20'
quem
inde a fluvio Danubio
ad Oceanum Arcticum usque
per
Rossiam, Sueciam et Norvegiam
jussu et auspiciis
Imperatorum Augustissimorum
ALEXANDRI I
et
NICOLAI I
atque
Regis Augustissimi
OSCARIS I
annis MDCCCXVI ad MDCCCLII
continuo labore
emensi sunt
Trium gentium geometrae.
Latitudo: 45° 20' 2"8.

Южный предѣлъ
дуги меридіана 25° 20'
отъ рѣки Дунай
до
Океана Ледовитаго
черезъ
Россію, Швецію и Норвегію.
По повелѣнію
Августѣйшихъ Монарховъ
Императоровъ
АЛЕКСАНДРА I-го
НИКОЛАЯ I-го
и
Короли
ОСКАРА I-го
постоянно трудясь
съ MDCCCXVI-го по MDCCCLII-й годъ
пэмѣрили
Геометры трехъ народовъ.
Широта: 45° 20' 2"8.

Un monument correspondant a été érigé, par les soins du gouvernement norvégien, à l'extrémité septentrionale de l'arc, à FUGLENAES. Sur un piédestal en granit, une colonne, également en granit, est placée,

ornée de capitaux en bronze et d'un grand globe terrestre en cuivre. La colonne porte les deux inscriptions suivantes, l'une en latin, l'autre en langue norvégienne :

Terminus septentrionalis
 Arcus meridiani 25° 20'
 quem
 inde ab Oceano Arctico
 ad fluvium Danubium usque
 per
 Norvegiam, Sueciam et Rossiam
 jussu et auspiciis
 Regis Augustissimi
 OSCARIS I
 et Imperatorum Augustissimorum
 ALEXANDRI I
 atque
 NICOLAI I
 annis MDCCCXVI ad MDCCCLII
 continuo labore
 emensi sunt
 Trium gentium geometrac.
 Latitudo : 70° 40' 11",3.

Det nordlige Endepunct
 af en Meridianbue paa 25' 20'
 fra det nordlige Ocean til Donau-Floden
 igjennem
 Norge, Sverige og Russlaad
 efter Foranstaltning af
 Hans Majestaet Kong
 OSKAR I
 og Keiserne
 ALEXANDER I
 og
 NICOLAI I
 ved uufbrodt Arbeide
 fra MDCCCXVI til MDCCCLII
 tidmaalt af
 de tre Nationers Geometrer.
 Brede : 70° 40' 11",3.

L'histoire des travaux exécutés pour la mesure de l'arc du méridien de 25° 20', qui s'étend de la Mer Noire jusqu'à la Mer Glaciale, en traversant les provinces occidentales de la Russie européenne, et les régions les plus septentrionales de Suède et de Norvège, embrasse une période de plus de 40 ans. J'ai dû puiser l'histoire de l'arc méridional dans les différentes publications qui s'y rapportent, en recourant toujours à la collection complète d'ouvrages manuscrits, relatifs à l'arc méridional, qui se trouve dans les archives de l'Observatoire de Poulkova. Pour l'arc septentrional, pour lequel il n'existe pas encore des documents publiés, je dois baser mon exposé historique sur les journaux des opérations de FINLANDE et sur les communications dont je suis redevable à nos savants confrères et coopérateurs de Suède et de Norvège.

L'idée d'exécuter dans les provinces occidentales de la Russie la mesure d'un arc du méridien appartient déjà à la première moitié du siècle passé. A une époque où un intérêt des plus vifs et une activité étonnante

se concentraient, de la part de l'Académie de Paris, sur le problème de la figure de la Terre, le premier astronome de l'Académie de Saint-Petersbourg, Joseph Delisle, proposa de profiter des avantages que présentaient les pays traversés par la méridienne de la capitale, pour la mesure d'un arc du méridien dont il indique une étendue possible de 22 à 23 degrés. Ses propositions se trouvent dans un discours tenu à l'Académie le 21 janv. 1737, qui fut publié sous le titre : *Projet de la mesure de la Terre en Russie. Saint-Petersbourg, 1737. 4°*. Après avoir obtenu, de la part de l'Impératrice ANNE, la sanction de son projet, Delisle en commença l'exécution l'année 1737 même, par la mesure d'une base sur la glace du Golfe entre DOUBNI, sur l'île de RÉTUSARI *), et PETERHOFF sur le continent méridional. Cette base était de 13,5 verstes = 14,4 kilomètres, et fut mesurée à l'aide de perches de bois.

En 1739, la base fut reliée, par des triangles, avec quelques points voisins. Voilà tout ce qu'il fit. Les motifs pour lesquels il abandonna son projet ne sont pas entièrement connus. A ce qui paraît, son voyage de Sibérie, en 1740 et 1741, y avait une part essentielle. Le projet de Delisle tomba cependant entièrement dans l'oubli, d'autant plus qu'il n'avait jamais rien publié ni sur la mesure de la base ni sur les angles observés. Ces données ne se sont retrouvées qu'en 1844, où M. O. STRUVE eut occasion d'examiner les manuscrits de Delisle, conservés à l'Observatoire de Paris, et il est évident que le projet de 1737 n'a pu exercer aucune influence sur les travaux analogues exécutés plus tard en Russie.

Je puis faire ici mention d'un second projet, non réalisé, de la mesure d'un arc de méridien en Russie, mais qui est de ce siècle, et même postérieur aux idées naissantes de la mesure actuellement achevée. En 1814, feu M. de Lindenau, Directeur de l'Observatoire du SEEBERG, mais à cette époque aide-de-camp du Grand-Duc de Weimar, proposa au Prince Wolkonsky, chef de l'État-Major Impérial, la mesure d'un arc très-septentrional sur les bords de la Mer-Blanche. Il espérait pouvoir décider par cette mesure sur les doutes qu'avait fait surgir la discordance entre les résultats qu'avaient offerts, pour le degré placé sous le cercle polaire, les deux mesures de Laponie, publiées en 1738 par Maupertuis et en 1805 par Svanberg. Lindenau eut l'intention de diriger lui-même les opérations sur le terrain. Cette proposition gagna l'approbation du Prince, et eût obtenu sans doute la sanction suprême, si une différence d'opinion ne se fût élevée sur un point essentiel. Lindenau ne voulut se charger des travaux qu'à condition que toutes les observations se fissent en employant des instruments de REICHENBACH; le Prince, au contraire, insistait sur ce que tous les instruments à employer fussent exécutés à Saint-Petersbourg. Ne pouvant s'accorder sur ce point, le projet, dont le public n'a jamais eu connaissance, fut aban-

*) C'est l'île sur laquelle PIERRE I^{er} avait construit, en 1710, la forteresse et le port de Kronstad.

donné*). J'ai appris les notices que je viens de donner par Lindenau lui-même, en 1820, lorsque je passai par Gotha pour me rendre à Munich, où j'avais à commander, chez Reichenhach, un cercle méridien pour Dorpat et les instruments transportables, destinés à la mesure de l'arc Baltique.

L'histoire de la mesure de l'arc du méridien, compris entre le Danube et la Mer Glaciale, se partage convenablement en quatre périodes :

La première période comprend l'origine des travaux et les opérations de M. de Tenner et de Struve, relatives aux arcs de Lithuanie et des provinces Baltiques, réunis en un seul arc de $8^{\circ} 2'$. Elle se termine à l'année 1831.

La seconde période, depuis 1830 jusqu'en 1844, contient la continuation septentrionale de l'arc du méridien jusqu'à Tornea, latitude $65^{\circ} 50'$, et les préparatifs de la prolongation méridionale jusqu'au Dnestre.

La troisième période, depuis 1844 jusqu'à la fin de l'année 1851, comprend la continuation méridionale jusqu'au Danube, et la continuation scandinave qui a fait toucher la Mer Glaciale.

La quatrième période comprend tous les travaux supplémentaires et postérieurs à 1851, et qui avaient en partie pour but de porter l'uniformité et une plus haute perfection dans les données que réclamait soit la réunion des arcs partiels en un grand arc total, soit l'utilisation de cet arc pour la détermination de la figure de la Terre. Cette période, à proprement parler, dure encore, et ne se terminera qu'avec la publication de notre ouvrage, et de l'ouvrage que nous attendons de la part de l'Académie de Stockholm, et qui contiendra un exposé détaillé des opérations suédoises, relatives au double but, celui de coopérer dans les travaux de l'arc du méridien, et de faire un nivellement trigonométrique entre le Golfe Bothnique et la Mer Glaciale.

PREMIÈRE PÉRIODE JUSQU'EN 1831.

À l'époque des propositions de feu M. de Lindenau, en 1814, l'idée de la mesure d'un arc du méridien, qui s'étendrait par les provinces occidentales de l'empire, avait déjà pris racine en Russie. Elle s'était présentée à la fois indépendamment à M. de Tenner et à moi, et les deux mesures des arcs de

*) En effet, d'après nos connaissances actuelles des localités, ce projet ne promettait que peu de chances de succès. L'espace entre la ville de Mezène et le cap Kanin, ou entre $65^{\circ} 50'$ et $68^{\circ} 39'$, offre bien le seul terrain voisin de la Mer Blanche, et s'étendant dans la direction du méridien; mais il est très-douteux qu'une suite de triangles convenables y puisse être établie.

Lithuanie et de Livonie furent entreprises par nous, sans que l'un eût connaissance des travaux de l'autre.

Déjà en 1812, étant étudiant à l'Université de Dorpat, j'avais été frappé de ce qu'entre le Danube et la Laponie, par une étendue d'au-delà de 20°, la méridienne de l'Observatoire de Dorpat offrait un terrain exempt de points considérablement élevés au-dessus du niveau de la mer, et sur lesquels des déviations du fil à plomb, en tant qu'elles sont produites par l'attraction des montagnes, ne pouvaient être que minimes, terrain qui, par conséquent, serait éminemment propre à la mesure d'un grand arc du méridien, s'il était possible d'y établir un réseau de triangles de qualité convenable. L'importance d'une levée trigonométrique de la Livonie, pour une carte exacte du pays, combinée à la considération indiquée, m'engagèrent, au commencement du mois de juin de l'année 1812, d'entreprendre en privé un voyage de reconnaissance en Livonie, pour examiner si le terrain s'y prêtait aux opérations trigonométriques; je mesurai même une petite base à l'aide de perches en bois, et, avec un sextant de Troughton, quelques triangles formés entre plusieurs clochers et certaines sommités, où très-souvent des arbres isolés offraient d'assez bons points de mire. Quoique ce voyage fût interrompu par la guerre qui approchait de la Livonie, il suffit cependant à me faire connaître la possibilité d'établir une suite de triangles à travers la province dans la direction de la méridienne de Dorpat. Ayant été élu, en 1813, professeur extraordinaire à l'Université de Dorpat et astronome observateur, je ne perdis pas de vue mon projet d'opérations trigonométriques, et bientôt j'eus l'occasion de le mettre à exécution. La *Société économique et d'utilité générale livonienne*, désirant profiter des cartes économiques qui existent sur presque toutes les propriétés de la province, pour la confection d'une carte générale de la Livonie, me proposa d'en entreprendre la levée astronomico-trigonométrique. Ce travail fut exécuté de 1816 à 1818, quant à la mesure des triangles, à celle de plusieurs bases auxiliaires et à la détermination astronomique, par latitudes et azimuts, de **18** points situés sur les bords de la mer, entre l'embouchure de la Duna et la ville de Pernau, et fut terminé en mars 1819 par la mesure d'une base principale sur la glace du lac Werz-Jerw, base qui avait ses deux termes sur le bord est de ce bassin *). Le résultat de ce travail était la position géographique de **325** points du pays, avec l'évaluation de l'élévation de **280** points au-dessus du niveau de la Baltique. L'instrument

*) La composition de la carte réclama encore un long travail, car il fallait combler un grand nombre de lacunes par des levées topographiques. La carte parut en 1839 sous le titre : *Spezialkarte von Livland in 6 Blättern, bearbeitet und herausgegeben auf Veranstaltung der livländischen gemeinnützigen und ökonomischen Societät. Nach Struve's astr.-trig. Vermessung und den vollständigen Spezialmessungen gezeichnet von C. G. Rücker, 1839*. Les six feuilles réunies forment un rectangle de 5 pieds 5,2 pouces de haut et de 4 pieds 5,5 pouces anglais de large.

dont je m'étais servi pour les angles horizontaux, était un sextant de réflexion de Troughton de 10 pouces de rayon, mais dont j'avais déterminé les erreurs de division avec soin. Pour la mesure des angles verticaux, j'avais fait exécuter à Dorpat un secteur horizontal, propre à la mesure des angles jusqu'à $\mp 10^\circ$). Quoique cette opération n'eût point, pour les angles horizontaux, l'exactitude des travaux récents, entrepris depuis 1789 pour la détermination de la figure de la Terre, elle supportait cependant une comparaison avec les anciennes mesures du Pérou et de Laponie, et elle aurait pu offrir, en 1819, un arc du méridien de $2^\circ 30'$, compris entre l'église de Sainte-Marie-Madeleine en Esthonie, latitude $58^\circ 58'$, et la tour du château de Kreutzburg en Lithuanie, latitude $56^\circ 28'$ **). L'idée de faire cet usage de mes opérations me vint déjà en 1817, et je proposai à la dite Société de remesurer dans le courant de l'année 1818, les angles des triangles principaux, à l'aide d'un cercle répétiteur de Baumann, et d'employer le même instrument à la détermination de la latitude des deux points extrêmes indiqués. J'abandonnai cependant ce projet pour le moment, par suite de la considération que le cercle de Baumann, quelque distingué qu'il eût été lors de son acquisition en 1809, ne pouvait plus prétendre au nom d'un instrument de première qualité, depuis que Reichenbach avait incomparablement perfectionné les instruments de géodésie, quant à la construction, à l'exactitude des divisions et à la force optique des lunettes. En tout cas, la levée de la Livonie avait conduit à la connaissance parfaite des stations trigonométriques à choisir, entre la frontière de l'Esthonie et la Duna, pour une mesure future d'un arc de la méridienne de Dorpat.

Ayant achevé, en 1819, la levée trigonométrique de la Livonie, je dirigeai l'attention du Conseil de l'Université de Dorpat sur l'avantage scientifique de profiter des stations principales de cette levée, situées près de la méridienne de l'Observatoire, pour la mesure de l'arc du méridien de $3^\circ 35'$, compris entre HOGLAND, île du Golfe de Finlande, et la ville de JACOBSTAD en Courlande. Ce projet, ayant obtenu l'approbation de l'Université, fut présenté à la sanction suprême par son curateur le Prince Lieven. Sa Majesté l'Empereur Alexandre I^{er} accorda gracieusement la somme requise pour l'achat d'une collection d'instruments de Munich, et l'Université alloua les frais annuels de cette entreprise sur la somme

*) J'ai donné plus tard un exposé raisonné des résultats numériques de mes opérations de 1816 à 1819, dans un mémoire inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg. Sc. math., T. IV, 1844.*

**) L'exactitude de la triangulation de 1816 à 1819 a été attestée depuis d'une manière surprenante. Elle avait donné la distance entre les deux extrémités nommées égale à 140160,6 toises. La même distance a été trouvée, par la mesure de l'arc du méridien, égale à 140162,6 toises. De même, l'ancienne opération avait donné l'élévation du seuil de l'Observatoire de Dorpat, au-dessus du niveau moyen de la Baltique, égale à 34,76 toises; la nouvelle à 34,98 toises.

destinée dans son état aux voyages scientifiques. Les travaux de cette mesure, dans lesquels j'eus pour aide M. le Baron W. de Wrangell, alors lieutenant de la marine, aujourd'hui lieutenant-général dans le corps des pilotes et directeur des phares russes de la Baltique, furent entièrement terminés en 1831. Les calculs étant achevés, une description détaillée fut publiée en 1831 sous le titre : *Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet von F. G. W. Struve. Dorpat, 1831; 2 Vol. in-4° texte, 1 Vol. planches.*

Le premier volume de cet ouvrage commence par un exposé historique détaillé des travaux, d'où les notices suivantes sont puisées.

Les préparatifs m'occupaient en 1820 et 1821. Dans le courant de l'année 1820, j'entrepris un voyage à l'étranger. J'y eus l'occasion d'assister, avec Gauss et d'autres savants, à la mesure de la base que Schumacher fit près de BNAACK avec son nouvel appareil, construit par Repsold père, base qui a servi depuis comme ligne de départ pour les mesures de degrés, exécutées dans les royaumes danois et hanovrien. A Munich, je fis l'acquisition de l'appareil principal pour nos opérations géodésiques, l'instrument universel de Reichenbach, et j'y commandai un cercle vertical de 18 pouces, destiné à l'observation des latitudes, et un théodolite astronomique. L'instrument universel de Reichenbach nous parvint en juin 1821. Cependant les mesures des angles ne purent pas encore être commencées. Il fallait faire construire des signaux solides et de forme précise sur les stations de Livonie, et faire la recherche des stations à employer entre les points les plus septentrionaux de Livonie et l'île de HOGLAND, pour être sûr de l'exécution de l'arc entier de 3° 35'. Les travaux de l'Observatoire m'empêchèrent de quitter Dorpat avant le mois d'août; mais je résolus tout de suite de réunir à la reconnaissance des stations jusqu'à HOGLAND une recherche soignée, s'il était ou non possible de passer le Golfe de Finlande avec des triangles, et si le terrain de la Finlande elle-même offrait la possibilité d'une continuation septentrionale de notre arc, continuation que je regardais comme un objet du plus haut intérêt. Enfin, en 1822, je commençai les travaux de campagne, terminés en 1827. J'aurais sans doute pu finir cette opération plus promptement, si elle avait été l'unique objet de mon activité scientifique. Mais, en 1822, le cercle méridien de Reichenbach était arrivé à Dorpat; en 1824, enfin, la grande lunette parallactique, chef-d'oeuvre unique de Fraunhofer, commandée en 1820, parvint à l'Observatoire. C'est à l'emploi de ces beaux appareils que j'avais à songer en premier lieu, et je n'osais vouer aux travaux géodésiques que le peu de semaines que je pouvais m'absenter de l'Observatoire de Dorpat sans trop préjudicier aux travaux de l'Observatoire. Je crois devoir indiquer ici que, dans la période de 1821 à 1827, qui embrasse les travaux de champ de l'arc Baltique, j'ai fait, sans avoir un aide, les observations méridiennes calculées et publiées, de 1822 à 1828, dans les volumes III, IV, V, VI des Annales de l'Observatoire de Dorpat, et que j'ai achevé en même temps la révi-

sion du ciel qui a fourni le *Catalogus novus stellarum duplicium* publié en 1827. J'avais en outre à faire un cours d'astronomie à l'Université, et un cours de géodésie à des officiers de l'État-major et de la Marine Impériale, et ce ne fut que dans les années 1826 et 1827 que je pus m'absenter de l'Observatoire pour quelques mois consécutifs. En 1826, il s'agissait des observations astronomiques sur les deux points astronomiques extrêmes, JACOBSTADT et HOGLAND, observations auxquelles prit part entr'autres feu M. Paucker, professeur à Mitau, et qui renforça les moyens instrumentaux par l'addition d'un second cercle vertical d'Ertel, également de 18 pouces de rayon, qui venait d'arriver à l'Observatoire de Mitau. Avec ce cercle, Paucker fit une série à part d'observations sur les latitudes de JACOBSTADT et de HOGLAND. En 1827, les derniers angles terrestres des triangles principaux furent observés, la base fut mesurée, et j'effectuai la jonction de cette base aux triangles principaux. En outre, les observations astronomiques furent complétées à DORPAT, en employant les mêmes instruments qui avaient servi, en 1826, à JACOBSTADT et à HOGLAND.

La jonction de la base fut une vraie campagne d'hiver. Un froid extraordinaire, jusqu'à -13° R., combiné avec d'abondantes chutes de neige, nous avait surpris avant le mi-octobre. Les mesures furent terminées le 10 novembre, et nous nous en retournâmes des environs de SIMONIS à DORPAT, où nous arrivâmes le 14 novembre avec nos instruments et l'appareil de la base, tous placés sur des traîneaux. C'était la fin de nos opérations de campagne, car, de 1828 à 1830, je n'avais plus à quitter l'Observatoire, pour faire les dernières observations astronomiques fondamentales, et pour terminer l'examen de l'appareil de la base.

M. le général de Tenner, alors colonel, et séjournant à MITAU en Courlande en fonction de maréchal-de-logis du premier corps d'armée, fut nommé, en janvier 1816, chef d'une levée trigonométrique et topographique du gouvernement de Wilna; en 1822, chef de celle de Courlande; en 1825, chef de la levée des gouvernements de Grodno et de Minsk. Il conçut l'idée d'employer les triangles principaux de ses opérations, situés dans la prolongation du méridien de l'Observatoire de Wilna, à une mesure d'un arc du méridien. Ayant obtenu l'approbation de Son Altesse le Prince Wolkonsky, alors chef de l'État-major, il procéda à l'exécution de son projet, par la mesure d'une suite de triangles choisis et de deux bases, entre BRISTEN en Courlande et BÉLIN, gouvernement de Grodno. Dans ces opérations, il employa des cercles répéteurs de Troughton et de Baumann. Ayant évalué l'amplitude céleste, par l'emploi de l'instrument des passages dans le premier vertical, d'après la méthode de Bessel, il termina ses travaux, relatifs à la mesure de l'arc du méridien de $4^{\circ} 32'$, la même année 1827 où finirent les opérations de campagne de ma mesure des provinces Baltiques.

BRISTEN, le point septentrional de l'arc de Lithuanie, n'étant éloigné de JACOBSTADT, terme austral

de l'arc Baltique, que de 30 verstes à l'ouest, avec une différence des latitudes de 4' 47" seulement, dont BRISTEN se trouve plus au nord, l'idée de la réunion des deux arcs partiels en un seul arc de plus grande étendue se présentait d'elle-même. Elle fut l'objet d'une consultation à Dorpat entre M. de Tenner et moi, en janvier 1828, et qui conduisit à arrêter les travaux à exécuter, des deux côtés, pour la jonction la plus parfaite des deux arcs, savoir :

- a) la comparaison directe des étalons qui avaient servi à la mesure des bases;
- b) la jonction des triangles;
- c) la réunion des arcs célestes.

M. de Tenner, pour étalonner les règles de son appareil de mesure, s'était servi d'une échelle en fer, sur laquelle la longueur S du sajène = 7 pieds anglais était indiquée, et, en même temps, la longueur d'une toise A , par des traits très-déliés. Il avait déterminé, en employant les subdivisions de S , la relation entre A et S à deux reprises, à l'aide d'un compas-à-verges micrométrique, et plus tard à l'aide de deux microscopes de Pistor de l'Observatoire de Dorpat. Ces deux recherches avaient donné le rapport entre A et S avec une exactitude distinguée. Il ne restait qu'à comparer A avec la toise à bouts de Fortin, qui était l'unité linéaire de mes mesures. Pour ce but, l'étalon S fut envoyé à Dorpat, et j'exécutai la dite comparaison en été 1829.

En 1827, M. de Tenner avait observé, à BÉLIN, un grand nombre d'étoiles, à l'aide d'un instrument des passages de 5 $\frac{1}{2}$ pieds de Ramsden, établi dans le premier vertical. De ces étoiles, 41 furent observées, en 1828, à Dorpat, avec un instrument de 8 pieds de Dollond, également établi au premier vertical. La combinaison de ces observations donna l'amplitude entre BÉLIN et DORPAT, et par là le rattachement des arcs célestes.

Quant à la jonction géodésique des triangles, M. de Tenner s'en chargea, et la confia au lieutenant Chodzko, actuellement major-général et chef de la triangulation des provinces Caucasiennes, qui remesura, en 1828, à l'aide d'un théodolite de Reichenbach, les angles sur 10 stations, situées au nord de la base de PONÉDÉLI, et dont 4 sont identiques avec les stations les plus méridionales de l'arc Baltique. Il s'agissait ici de soumettre les deux opérations géodésiques à un contrôle réciproque par la mesure des angles identiques des deux triangles communs, et par la déduction double de la longueur des cinq côtés de ces triangles, en partant des deux bases mesurées qui se trouvaient à une distance en ligne droite de 335 verstes, celle de PONÉDÉLI étant située à 85 verstes au sud, et celle de SIMONIS à 250 verstes au nord des triangles communs. Pour donner à ce contrôle toute l'authenticité possible, M. le général de Schubert, alors directeur du Dépôt topographique, et Bessel, le grand astronome de Königsberg, furent engagés à se charger de la fonction de commissaires, pour juger sur l'accord des résultats qui

devaient leur être communiqués dans des lettres cachetées, de la part de chacun des deux géomètres, sans qu'il eût la moindre connaissance du résultat de son collaborateur. Ma dépêche parvint entre les mains des juges vers la fin de 1829, celle de M. de Tenner fut envoyée de Minsk, sous la date du 11 janvier 1831. L'ouverture des deux communications manifesta aux juges un accord tout à fait satisfaisant, ou plutôt surprenant dans tous les détails, soit des angles et des côtés, soit dans l'élévation des stations au-dessus du niveau de la Mer Baltique, et nous rapporta les félicitations de nos juges *).

L'exposé des résultats de la réunion des deux arcs partiels en un seul arc fut publié par l'Académie des sciences dans ses Mémoires, en 1832, et se trouve également ajouté à la description détaillée des opérations trigonométriques des gouvernements de Wilna, Courlande, Minsk et Grodno, qu'a donnée M. de Tenner dans les volumes VIII et IX des Annales du Dépôt topographique.

Par cette publication de 1832 se terminent les travaux de la *première période* de la mesure de l'arc du méridien de Russie, période qui avait conduit à un arc de $8^{\circ} 2',5$ entre HOGLAND et BÉLIN, et qui forme le noyau auquel se sont rattachées les opérations postérieures. En effet, dès l'achèvement de la mesure de cet arc, les considérations sur la possibilité et l'importance d'une prolongation de cet arc au triple de son étendue, s'étaient présentées à l'esprit des deux géomètres dans toute leur urgence, et les ont engagés à regarder cette prolongation comme un problème de leur vie.

SECONDE PÉRIODE DEPUIS 1830 JUSQU'À 1844.

Une lacune de $5^{\circ} 26'$, qui existait encore entre l'arc russe et l'arc mesuré jadis en Laponie, pouvait entièrement être comblé, en prolongeant la méridienne de DORPAT à travers le grand-duché de Finlande jusqu'à TORNEA. Cette prolongation parut d'autant plus importante, que les arcs septentrionaux étaient le

*) Une jonction analogue a eu lieu, en 1835, entre les triangles de la levée de Courlande, dirigée par M. de Tenner, et ceux de la mesure d'un arc du méridien de $1^{\circ} 30'$, exécutée entre MEBEL et TRUNZ en Prusse par Bessel lui-même, assisté par M. de Baeyer, alors colonel de l'Etat-major royal de Prusse, aujourd'hui général et chef des travaux trigonométriques des provinces Rhénanes. L'accord a été le même. Nous pouvons citer ici encore les autres jonctions qui ont eu lieu, entre les triangles mesurés sous la direction de M. le général de Schubert, dans les gouvernements de Saint-Petersbourg, de Pskow et le long du Golfe de Finlande, avec ceux de la mesure de degrés des provinces Baltiques, ainsi que les rencontres des différentes branches des opérations trigonométriques de l'Etat-major Impérial. Partout un accord plus que satisfaisant s'est prononcé. Enfin les grands travaux géodésiques, exécutés par M. de Tenner, dans le royaume de Pologne, ont fourni plus récemment l'occasion de joindre les opérations russes avec celles de l'Europe occidentale, encore en trois endroits. L'une de ces jonctions, faite aux environs de CRACOVIE, sous $50^{\circ} 3'$, donne la réunion avec les triangles autrichiens: les deux autres, voisines de TARNOVITZ en Silésie, latitude $50^{\circ} 34'$, et de THORN en Prusse, latitude $53^{\circ} 1'$, produisent la réunion avec les triangles prussiens.

plus faiblement représentés dans le tableau que Bessel avait formé pour ses calculs sur les dimensions les plus probables de la Terre, et que ce sont précisément les arcs éloignés de l'équateur qui, comparés aux arcs voisins de ce grand cercle, contribuent le plus à la détermination du coefficient de l'aplatissement. Une autre circonstance ajouta à l'importance d'une telle entreprise. L'arc de Laponie avait été mesuré à deux reprises; la première fois, de 1735 à 1737, par Maupertuis, Celsius, etc., dans une étendue d'un degré à peu près entre TORNEA et KITTIS. La seconde mesure, faite de 1801 à 1803, par les géomètres de l'Académie des sciences de Stockholm, avait prolongé l'arc, des deux côtés, jusqu'à l'amplitude de $1^{\circ} 37'$, entre MALÖRN et PAUTAVARA. Les parties géodésiques des deux mesures s'accordaient de très-près dans la portion commune. Mais il y avait une différence très-considérable entre les deux valeurs du degré situé sous le cercle polaire, déduites des deux opérations. En considérant que les observations de latitude n'avaient pas été faites sur les mêmes lieux, il a fallu admettre ou des déviations locales du fil à plomb, relativement très-considérables, ou une incertitude dans l'une ou l'autre des 4 latitudes observées, par suite d'imperfections des instruments employés.

Ce fut en 1830 que je présentai au prince Lieven, alors Ministre de l'instruction publique, un mémoire relatif à la prolongation désirée de la mesure de notre arc à travers la Finlande. Le plan qu'il contenait, fut mis sous les yeux de Sa Majesté et obtint la sanction suprême. L'Empereur Nicolas accorda gracieusement, pour dix ans consécutifs, une somme annuelle de 3000 roub. arg., destinée à l'exécution des travaux.

Pour les travaux géodésiques, j'eus, dans les premières années, le secours de trois officiers de l'État-major, Rosenius, Oberg et Melan, qui avaient suivi à DONPAT un cours complet d'astronomie pratique, tous natifs de Finlande. Oberg et Rosenius commencèrent la reconnaissance du pays déjà en été 1830. Après la mort de Rosenius, Oberg et Melan la continuèrent en 1831, et réussirent enfin à établir les signaux pour une chaîne de triangles qui allait jusqu'aux environs de KAÏANE, $64^{\circ} 13'$. Les mêmes deux officiers commencèrent la mesure des angles en 1832, et la continuèrent jusqu'en 1835, mais furent rappelés ensuite pour être placés, de la part de l'État-major, à la tête d'autres travaux géodésiques importants. En 1835, j'eus le bonheur de gagner un nouveau collaborateur, formé par M. Arge-lander, dans la personne de M. Woldstedt, alors adjoint du même Observatoire de Helsingfors dont il est maintenant directeur. Assisté par plusieurs arpenteurs géodésistes du pays, M. Woldstedt a achevé, dans le courant de 10 ans, tous les travaux de la mesure des angles terrestres horizontaux et verticaux et un nombre considérable d'observations astronomiques. — Les difficultés du terrain marécageux *) et

*) Le nom de la Finlande, dans l'idiome des indigènes, est Soo-maa, ce qui signifie pays des marais.

couvert de forêts, surtout entre KAÏANE et ULEABORG, et le manque de secours dans ces régions presque inhabitées, avaient produit une marche très-lente des opérations. D'autres difficultés presque insurmontables se présentaient dans la continuation des triangles le long de la partie boréale du Golfe Bothnique entre ULEABORG et TORNEA. En effet, la mesure des angles sur plusieurs des rocs (Skär) qui ne s'élèvent que peu de toises au-dessus de l'eau, ne devint possible qu'en faisant usage des réfractions verticales extraordinaires et très-considérables *). La persévérance de M. Woldstedt combla enfin, en 1844, les dernières lacunes de nos triangles. La même année, une première base fut mesurée, sous la direction de MM. Sabler et Woldstedt, près de l'église d'ELIMÄ, paroisse située à peu de distance du Golfe de Finlande, au nord de la ville de LOVISA. En 1845, la seconde base fut mesurée vers l'extrémité boréale de l'arc, près d'ULEABORG, sur les bords mêmes du Golfe Bothnique. MM. Sabler et Woldstedt, ayant rempli cette tâche, se rendirent finalement au point extrême boréal, et exécutèrent des observations astronomiques de l'azimut et de la latitude à TORNEA, point de concours de l'arc de Finlande avec l'arc de Laponie de Svanberg, par la ligne commune de TORNEA à KEMI.

Dans le courant de ces années, j'avais changé de domicile, en 1839, et l'Observatoire central de Poulkova devint le centre d'où se dirigeaient les travaux relatifs à la mesure de Finlande. A ce changement se rattacha encore une circonstance importante. Sur ma proposition, l'Académie des sciences, dont l'Observatoire fait partie, prit la mesure de l'arc du méridien sous son patronage immédiat, et en a appuyé les progrès par son autorité efficace.

Durant cette seconde période, la prolongation méridionale de l'arc du méridien ne fut point perdue de vue. Au contraire, M. de Tenner, en continuant ses travaux géodésiques dans cette direction, à travers les gouvernements de Volynie et de Podolie, jusqu'au Dnestre, rivière qui forme la frontière boréale de la province de Bessarabie, avait toujours porté les soins les plus scrupuleux à l'exactitude des triangles situés sur la ligne de prolongation, et à l'exécution d'observations astronomiques sur plusieurs points de cette ligne. Par ces travaux, l'addition d'un arc méridional de $3^{\circ} 25'$ était préparée dans les parties essentielles.

Il s'agissait de profiter de ces travaux dans l'intérêt de la science, et d'ajouter aux deux périodes de l'histoire de notre mesure une troisième.

*) Sur les difficultés qu'avait rencontrées Maupertuis dans ces endroits, voyez la note T. II, p. 5 de notre ouvrage.

TROISIÈME PÉRIODE DEPUIS 1844 JUSQU'À LA FIN DE 1851.

a) Travaux relatifs à l'arc russe.

Ce fut en 1844 que l'aide-de-camp-général comte Berg, alors chef de l'État-major Impérial, aujourd'hui gouverneur-général du grand-duché de Finlande, appela M. de Tenner, occupé alors de la levée trigonométrique du gouvernement de KIEW, à Saint-Pétersbourg, pour consulter avec nous deux sur les voies à suivre dans une continuation méridionale de l'arc du méridien de Russie, en la basant sur les travaux géodésiques entrepris de la part de l'État-major, et sur le secours scientifique à réclamer de la part de l'Académie des sciences et de l'Observatoire central. Par suite de ces consultations, le projet de la prolongation fut conçu et mis sous les yeux de Sa Majesté l'Empereur, par le Ministre de l'Instruction publique et Président de l'Académie comte Ouvraoff. Avec la sanction suprême, les arrangements suivants furent fixés de la part des autorités compétentes :

- 1) La mesure de l'arc de Russie doit être continuée jusqu'au Danube, par l'addition de la mesure de la Bessarabie aux opérations qui se terminent en Podolie sur le Dnestre. Cette opération ajoutera un arc de $3^{\circ} 25'$.
- 2) M. le général de Tenner est chargé de la direction de cette mesure. La reconnaissance et l'érection des signaux seront faites en 1845; la mesure des angles commencera dès 1846. Deux bases doivent être mesurées, vers les deux extrémités du nouvel arc, à l'aide du même appareil qui a servi à la mesure des bases de Livonie et de Finlande.
- 3) M. de Tenner est autorisé de communiquer au Directeur de l'Observatoire central des copies et des extraits des journaux et des calculs, relatifs aux opérations antérieures, exécutées entre BRISTEN, près de la Duna, et SSUPRUNKOWZI sur le Dnestre, en tant que ces actes renferment les matériaux sur lesquels doit être basée la valeur de l'arc du méridien. Il agira de la même sorte par rapport aux matériaux que la mesure de la Bessarabie fournira.
- 4) L'Observatoire central, de son côté, est tenu de coopérer à la mesure du méridien, par la détermination des latitudes sur les points choisis, tout le long de cet arc, à l'aide des moyens d'observation distingués que l'Observatoire possède.
- 5) Le Directeur de l'Observatoire central est chargé des travaux de calcul qui conduiront aux résultats scientifiques de l'opération totale, et de la rédaction d'un ouvrage qui embrassera l'arc entier mesuré depuis la Laponie jusqu'au Danube. Il présentera ses travaux à l'Académie des sciences, pour les soumettre à l'approbation de ce corps savant.

6) L'Académie des sciences se charge de la publication de l'ouvrage qui contiendra la description des travaux relatifs à l'arc du méridien total, mesuré en Russie.

Conformément à ces stipulations, M. de Tenner, dès 1844, me mit en possession d'un volume manuscrit in-folio de 271 pages, accompagné d'une carte complète des opérations trigonométriques exécutées, depuis 1816 jusqu'en 1840, successivement dans les gouvernements de Wilna, de Courlande, de Grodno, de Minsk, de Volynie et de Podolie. Ce volume contenait un résumé synoptique de toutes les opérations de sa première mesure ou de l'arc de Lithuanie, et des tableaux complets sur les travaux géodésiques et astronomiques plus méridionaux, exécutés, sous sa direction, avec l'espérance de les voir employés un jour à la continuation de la mesure de degrés. Enfin il se trouve, dans ce volume, un exposé détaillé de la jonction des triangles de Courlande avec ceux de Prusse, jonction qui effectua le premier rattachement des opérations géodésiques de Russie avec les opérations d'Allemagne, de France et d'Angleterre.

Plus tard, sous la date du 27 mars 1847, M. de Tenner présenta à l'Académie deux volumes manuscrits, in-folio, de 401 et 477 pages, avec 12 planches, et qui contenaient la rédaction originale, écrite en langue allemande, de son ouvrage sur sa première mesure entre BRUSTEN et BELIN, et tous les documents relatifs à la jonction de cette mesure avec celle des provinces Baltiques *). L'Académie résolut de déposer ces dons précieux à l'Observatoire central, pour y être conservés avec les autres documents de la mesure de degrés, conformément au vœu énoncé par M. de Tenner lui-même.

Le volume de la collection Tenner, qui contient le résumé, était pour moi de la plus haute valeur. Il offre pour tous les triangles, depuis la Duna jusqu'au Dnestre, non-seulement les angles corrigés et employés dans les calculs de M. de Tenner, mais aussi les angles primitivement observés; puis les valeurs définitives

*) A la fin du second volume se trouve un mémoire sur la figure de la Terre, que Bessel avait communiqué à M. de Tenner. Ce mémoire est de 1834, donc antérieur de 3 ans au premier travail sur la figure de la Terre, publié par Bessel, en 1837, dans les *Astronomische Nachrichten*, N° 333, et de 7 ans antérieur au calcul définitif de Bessel, publié, en 1841, dans les *Astr. Nachr.*, N° 438. Aussi ne contient-il que 8 arcs partiels, au lieu des 10 arcs employés par Bessel plus tard. L'arc danois et l'arc de Prusse y manquent. On voit, dans la relation de M. de Tenner, que Bessel entreprit ces premiers calculs sur la demande de M. de Tenner qui, après l'achèvement de l'arc russe de $8^{\circ} 42'$, désirait employer, dans ses calculs géodésiques, des données plus exactes que celles qu'avaient fournies les recherches antérieures de Walbeck et de Schmidt. Ce mémoire primitif de Bessel se trouve publié par extrait, en traduction russe, dans le Vol. IX des *Mémoires (Записки) du Dépôt topographique*, p. 908 à 922, volume qui parut en 1844.

Les résultats trouvés, dans ce mémoire, pour la figure de la Terre sont exprimés par les chiffres suivants :

valeur moyenne d'un degré du méridien.	57011,4466 toises,
rapport des deux axes.	302,5126 : 301,5126.

de toutes les bases, ainsi que les tableaux des azimuts et des latitudes, déterminés sur les différentes stations principales d'un arc de $8^{\circ} 42'$ entre BRISTEN, $56^{\circ} 35'$, et BALTA, $47^{\circ} 53'$. Il me servait par conséquent de guide chaque fois que j'avais à consulter, dans mes études, les documents détaillés dont les originaux se conservent au Dépôt topographique, mais qui se publient successivement dans les annales de ce Dépôt. Dans ces études, j'avais en vue de remplir, le plus tôt possible, au moins une partie de l'obligation qui m'était imposée par l'article 5 des stipulations de 1844. Par cette raison et dès que j'étais en possession des documents de la collection Tenner, j'entrepris un nouveau calcul, uniforme mais encore provisoire, de toute la série des triangles compris entre TORNEA et SSUPRUNKOWZI sur le Dnestre; calcul qui, en partant des angles primitivement observés, devait conduire à une telle compensation successive des triangles, que toutes les bases mesurées fussent exactement représentées.

Pour préserver le produit des travaux de trente ans contre un accident destructeur possible, quelque peu vraisemblable qu'il fût, je présentai à l'Académie, en décembre 1847, le tableau des résultats provisoires de la mesure d'un arc du méridien de $17^{\circ} 5' 33''$, compris entre TORNEA, latitude $65^{\circ} 50' 34''$, et SSUPRUNKOWZI, latitude $48^{\circ} 45' 1''$. Ce tableau contenait les latitudes de 9 points et les distances des parallèles correspondants, exprimées en toises du Pérou; enfin une comparaison de ces distances avec les valeurs calculées sur les dimensions du sphéroïde terrestre, qu'avaient données les dernières recherches de Bessel, dans les *Astronomische Nachrichten*, N^o 438. Dans ma note de présentation, j'ai ajouté que cette comparaison indiquait une augmentation de l'aplatissement: $\frac{1}{299,13}$, trouvé par Bessel.

J'ai désigné ces résultats comme provisoires; c'est que tout résultat tiré de matériaux de ce genre ne peut être que provisoire, dès qu'il y aura encore de nouveaux matériaux à discuter. Les chiffres présentés étaient cependant, pour cet arc de 17° , déjà très-rapprochés des valeurs définitives. Car ce n'étaient que les nouvelles bases, mesurées ou à mesurer dans les deux prolongations de l'arc cité, qui exerçaient une certaine influence sur les distances des parallèles pour les arcs partiels extrêmes. En outre, une répétition des observations de latitude, sur les différentes stations principales, à l'aide d'instruments encore plus parfaits que ceux qui avaient été employés, pouvait porter quelques légères corrections aux amplitudes données.

En attendant, le plan de la continuation méridionale de notre arc fut complètement réalisé. La mesure des triangles de Bessarabie fut achevée en 1848. Deux bases furent mesurées avec le même appareil qui avait été employé en Finlande et en Livonie. La première de ces bases, celle de ROMANKAUTZI, est située dans la partie boréale de la Bessarabie, à 5 verstes du Dnestre. La mesure se fit en 1848, encore sous la direction de M. Sabler, astronome de Poulkova. M. Napersnikow, capitaine des topographes, qui avait assisté aux opérations de ROMANKAUTZI, exécuta en 1849 la mesure de la base de TASCIBUNAN.

qui se trouve à 25 verstes au nord du Danube. En 1848, M. Sabler fit les observations astronomiques de latitude et d'azimut à WODOUJ-WODY, près de KISCHINEW, point moyen de l'arc de Bessarabie, et M. Schidlovsky, professeur de l'Université de Kharkow, exécuta les observations de latitude et d'azimut, en 1849, sur la station STARO-NEKRASSOWKA, point le plus méridional de notre arc.

J'ai encore à mentionner les travaux hypsométriques. Dans les deux sections de nos opérations, dirigées par M. de Tenner et par Struve, un soin particulier a été voué à l'observation des angles terrestres verticaux, sur toutes les stations trigonométriques sans exception, pour en déduire les différences de niveau successives. Les opérations hypsométriques de M. de Tenner commencent de la Mer Baltique, près de Polangen, bourg situé sur la frontière de Prusse, et aboutissent au nord de l'embouchure Kilienne du Danube dans la Mer Noire. Ces travaux ont fourni à M. de Tenner un nivellement trigonométrique complet et même multiple entre les deux mers, et, comme résultat, l'identité de niveau pour les deux bassins. Du moins, la petite différence trouvée est de beaucoup inférieure à l'erreur probable dont elle est affectée. Dans l'autre section, le nivellement s'étend de la Duna jusqu'au Golfe de Finlande, où il trouve son zéro, et traverse ensuite la Finlande pour rencontrer le niveau de la mer une seconde fois à ULEABORG; puis il continue jusqu'à TORNEA. Les deux nivellements se sont rencontrés aux deux triangles de jonction entre les mesures de Lithuanie et des provinces Baltiques, et ont offert, en partant d'un côté de POLANGEN, de l'autre côté du port de KUNDA sur le Golfe de Finlande, pour les points communs des élévations identiques de plus près qu'il n'était permis d'attendre. Nous possédons donc un nivellement non interrompu de 1800 verstes de long, en ligne droite, depuis les bords de la Mer Noire jusqu'aux premières hauteurs de Laponie, près de Tornea.

b) Travaux relatifs à l'arc scandinave.

J'aurais dû terminer ici l'histoire de la troisième période, s'il ne s'agissait pas de la nouvelle prolongation de notre arc, dont nous sommes redevables à la coopération de nos voisins scandinaves, et qui est de la plus haute importance par la position septentrionale de l'arc ajouté. A TORNEA et KEMI, nos triangles avaient touché l'ancien terrain des deux mesures de Laponie. Les stations de ces opérations se trouvant des deux côtés de la rivière Tornea-Elf, qui sépare le grand-duché de Finlande de la province suédoise de Westrebothnie, nous aurions pu prolonger nos triangles le long de la frontière occidentale du grand-duché, et, en traversant la province de Tornea-Lappmarken, jusqu'au point où celle-ci touche au Finmarken norvégien, sous 69° de latitude. Mais l'Académie de Saint-Petersbourg sentait clairement que, pour cette prolongation, il fallait respecter le droit historique de l'Académie de Stockholm qui, dans le courant d'un siècle, avait opéré deux fois sur ce terrain difficile, au profit de la science. Elle osait espérer, en outre,

que, si Sa Majesté le Roi Oscar daignait protéger la continuation de l'arc du méridien, cette mesure pourrait même, par l'assistance du gouvernement et des savants de Norvège, atteindre l'extrémité du continent européen aux environs du Cap-Nord.

Dans ces vues, je fus chargé par l'Académie, en 1844, de me rendre à Stockholm pour recommander la prolongation de l'arc du méridien à la protection de Sa Majesté le Roi, et au zèle de nos savants confrères de Suède et de Norvège. Ma mission eut un succès complet. Les consultations avec les délégués de l'Académie, M. le baron de Wrede, aide-de-camp du Roi, et M. Selander, directeur de l'Observatoire de Stockholm, conduisirent à un projet préalable, et qui devait être soumis à l'approbation de l'Académie de Stockholm. Admis à l'audience du Roi, j'eus l'honneur de Lui faire un exposé oral du projet, auquel Sa Majesté accorda sa protection, dès que la possibilité de l'exécution en fut prouvée. L'Académie de Stockholm, pour effectuer la coopération de la part du gouvernement norvégien, s'étant mis en rapport avec M. Hansteen, directeur de l'Observatoire de Christiania, et chef des travaux géographiques de Norvège, Sa Majesté le Roi, en 1845, par suite d'une proposition du Conseil d'Etat des deux royaumes, créa deux commissions, pour décider la question de la possibilité par une reconnaissance complète du terrain, l'une suédoise, composée de MM. de Wrede, Selander et du lieutenant de la marine Lilienhoek, l'autre norvégienne, sous la direction de M. Hansteen. Celui-ci, retenu à Christiania par ses fonctions auprès de l'Université et par son âge avancé, choisit pour cette reconnaissance deux officiers du génie norvégien, MM. Klouman et Lund qui, ayant travaillé à la levée des deux côtes du Finmarken, possédaient une connaissance très-intime du terrain.

Les deux commissions entreprirent le voyage de reconnaissance en été de la même année 1845. La commission suédoise devait examiner le terrain en partant de Tornea et en avançant vers le nord, la commission norvégienne en partant du Cap-Nord dans une direction méridionale. Elles devaient se rencontrer aux environs de l'église de Kautokeino, située sur le terrain norvégien, près des confins du district finlandais de Tornea-Lappmarken. Arrêtés par le long voyage de Christiania à Hammerfest, et par un naufrage de leur embarcation entre Hammerfest et le Cap-Nord, les ingénieurs norvégiens n'arrivèrent à Kautokeino qu'après le départ des commissaires suédois, et durent se rendre à travers la Laponie à Haparanda, ville située vis-à-vis de Tornea, et de là à Stockholm, pour y échanger les résultats de leurs recherches avec ceux qu'avaient obtenus les commissaires suédois. Les reconnaissances n'avaient point seulement démontré la possibilité de l'opération trigonométrique, mais elles avaient en même temps préalablement fixé les stations de la série de triangles à mesurer, d'un bout à l'autre.

Le Cap-Nord, sur l'île de Mager-oe, avait été lié antérieurement, par les triangles de la levée des côtes, à la ville de Hammerfest sur l'île de Kval-oe. La nouvelle reconnaissance, tout en ne laissant aucun

doute sur la possibilité de prolonger les triangles de l'arc du méridien jusqu'à ce cap renommé, décida cependant qu'il fallait abandonner ce projet, et choisir FUGLENAES, près de Hammerfest, pour point extrême septentrional de l'arc. Le Cap-Nord, élevé de 122 toises au-dessus de la mer, est en été habituellement sujet aux brouillards épais qui s'élèvent continuellement du courant de température élevée qui longe cette côte de Norvège. Par cette circonstance, il aurait été presque impossible d'y exécuter une suite d'observations astronomiques de quelque étendue, même si l'on osait braver l'ennui et les souffrances d'un séjour de plusieurs mois sur la cime d'un rocher dans une île déserte, située au-delà du 71^m degré de latitude. Par le sage choix de Fuglenaes, la commission de Norvège, en ne sacrifiant qu'un arc d'un demi-degré, a su assurer le succès complet de l'entreprise.

La réussite de la reconnaissance décida en faveur du projet de la prolongation de l'arc du méridien, et en conduisit à la sanction suprême de la part du Roi, ainsi qu'aux arrangements nécessaires de la part des gouvernements des deux royaumes.

La marche des triangles se voit dans notre carte générale. Les stations longent, en partant de TORNEA, 65° 50', la rivière Tornea-Elf, et sont en partie identiques avec celles des opérations de Maupertuis et de Svanberg, jusqu'aux environs des mines de KENGIS ou de l'ancienne station PAHTAVAARA, 67° 9'. D'ici elles quittent le Tornea-Elf et suivent la direction de son grand affluent, le Muonio-Elf, jusqu'au nord de la paroisse de MUONIONISKA, 68° 0'; puis elles traversent la Tornea-Lappmarken finlandais dans sa largeur de 50 verstes, et touchent le terrain norvégien aux environs de KAUTOKEINO, 69° 0', dans les deux points ATJIK et BAELJATZ-VAARA. C'est ce plateau qui sépare les rivières qui descendent vers le Golfe Botnique et celles qui se jettent dans l'Océan Glacial, le Tana-Elf, dirigé obliquement vers N.-E., et l'Alten-Elf qui suit à peu près la direction du méridien. Les triangles norvégiens longent cette seconde rivière jusqu'à son embouchure dans le Alten-Fiord, près de ALTENGAARD et BOSEKOP. A partir de cet endroit, les stations du côté oriental sont encore sur le continent, tandis que celles du côté occidental se trouvent sur les îles de cet archipel norvégien qui s'étend jusqu'au Cap-Nord. Les deux derniers triangles effectuent la jonction de la dernière station continentale JEMMELUFT-OIVI avec FUGLENAES, point extrême boréal de l'Arc du méridien.

L'exécution des opérations de mesure commença simultanément des deux côtés en 1816. Quant aux travaux suédois, M. de Wrede, après avoir contribué si efficacement à la réalisation de l'entreprise, par l'intérêt qu'il lui voua et par son autorité, retenu par ses fonctions auprès de la personne de Sa Majesté, et par l'emploi de directeur de l'École d'artillerie de Marieberg, céda maintenant l'exécution des travaux soit géodésiques, soit astronomiques, à la direction unique de son savant confrère, M. Selander, qui fut nommé, par l'Académie des sciences de Stockholm, chef de ces travaux, assisté par deux collabo-

rateurs, MM. Skogman, lieutenant dans la Marine royale, et Agardh, professeur d'astronomie à l'Université de Lund.

Le point où furent arrivés ces travaux, à la fin de l'année 1850, a été indiqué dans un rapport dressé par M. Selander, et qui a été publié dans les Comptes-rendus de l'Académie de Stockholm (*Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Academiens Förhandlingar*). En voici la traduction verbale :

« L'Académie royale, en présentant à Sa Majesté le Roi un exposé sur la continuation de la
 « mesure de l'arc du méridien en Laponie, dirigea, à cette occasion, l'attention de Sa Majesté sur l'oc-
 « casion que présente cette mesure, de contribuer, à peu de frais, à une réponse future sur la question
 « qui regarde l'élévation successive du sol suédois au-dessus du niveau de la Mer. ou de la dépression
 « successive de ce dernier niveau. Pour ce but, il ne faudrait qu'ajouter à la mesure de degrés un
 « nivellement trigonométrique depuis Haparanda *) jusqu'à Allen. Cette opération conduirait soit à la déter-
 « mination du niveau relatif de la Mer Baltique et de la Mer Glaciale, soit à la connaissance des hauteurs
 « des stations intermédiaires, employées à l'exécution du nivellement. C'est par cette voie que dans
 « l'avenir, et en répétant de temps à autre le nivellement, on reconnaîtrait les changements du niveau
 « des deux Mers, et l'oscillation probable du terrain. Sa Majesté le Roi ayant approuvé les propositions
 « de l'Académie, les travaux de la mesure de degrés et du nivellement ont été poursuivis en commun,
 « et je prends la liberté de rapporter sur la marche de ces travaux. Pour ce qui regarde en premier
 « lieu le nivellement, à l'exécution duquel M. Agardh, professeur d'astronomie (à l'Université de Lund),
 « a été chargé de prendre part, des observations correspondantes des distances zénithales ont été exécutées
 « sur toutes les stations situées depuis Haparanda jusqu'à la frontière de Norvège, par une étendue
 « de 40 milles suédois (400 verstes = 427 kilomètres). Dans ces observations, M. Agardh s'est servi
 « d'un excellent instrument universel, appartenant à l'Université de Lund; et j'ai employé un cercle ver-
 « tical de 12 pouces. Sur ces deux instruments, la lecture des divisions se fait à l'aide de microscopes.
 « Vu que le nombre des distances zénithales, mesurées sur chaque station, n'est jamais au-dessous
 » de 40 à 50, et s'élève pour d'autres au-delà de 100, j'ai raison d'espérer que les résultats que fournira
 « le calcul, seront dignes de confiance. »

« Quant aux travaux relatifs à la mesure de degrés, une partie essentielle a été terminée l'été passé.
 • Les observations astronomiques ont été achevées sur le point boréal des triangles suédois (latitude 68° 49').
 « Pour la latitude de ce point, M. Agardh et moi, nous avons rassemblé chacun au-delà de 500 obser-

*) Haparanda est la ville suédoise située de l'autre côté de la rivière Tornea-Elf, vis-à-vis de Tornea, ville de la Finlande russe.

« vations de la distance zénithale de l'étoile polaire. Les observations de l'azimut ont été faites par M. Agardh
 « et par M. Skogman. J'ai fait les déterminations du temps. Sur le point extrême méridional (Tornea),
 « une partie des observations astronomiques ont été faites, sans cependant être terminées, à cause de la
 « saison trop avancée et du temps défavorable. En outre, la mesure des angles terrestres (horizontaux) a
 « été faite surtout par M. Skogman, sur six stations, dont une se trouve sur le terrain norvégien. C'est
 « que, d'après les renseignements qui m'étaient parvenus au printemps passé, il n'existait encore point de
 « mesure d'angles, faite par les géomètres norvégiens, pour la jonction des triangles de Suède et de
 « Norvège. L'addition des travaux du nivellement qui ont réclamé plus de la moitié de l'été aussi court
 « de Laponie, a eu pour effet qu'il m'a été impossible de terminer en 1850 les opérations de la mesure
 « de degrés. Il nous reste actuellement à mesurer la base, à faire la réunion de la base avec un des côtés
 « des triangles principaux, enfin à terminer les observations astronomiques sur le point extrême méridio-
 « nal. Quant au nivellement, il faut encore faire l'observation des hauteurs sur le petit nombre de stations
 « situées entre la frontière de Norvège et la Mer Glaciale. Avec le secours convenable et par un temps
 « tant soit peu favorable, tous ces travaux pourront être achevés dans le courant d'un été. »

Je passe maintenant à l'exposé des travaux qui, sous la direction suprême de M. Hansteen, ont été exécutés pour la mesure de l'arc norvégien, et furent terminés en 1850.

Les travaux géographiques de Norvège sont du ressort du ministère de l'intérieur. Donc M. Hansteen avait à s'adresser, pour tous les arrangements et secours que demandait l'exécution des travaux de l'arc du méridien, à M. le conseiller d'état Stang, ministre de l'intérieur de Norvège. Ce fut l'intérêt personnel dont ce haut fonctionnaire honora cette entreprise scientifique, qui contribua essentiellement à la marche heureuse de ces travaux.

M. Hansteen confia la mesure des triangles à MM. Klouman et Lundh, les mêmes qui avaient fait la reconnaissance en 1845. Ces deux officiers travaillèrent en commun pendant l'été 1846. En 1847 et 1850, M. Klouman seul était chargé des opérations. L'instrument qu'ils employèrent, est un beau petit instrument universel de Repsold, avec des cercles de 7 et 6 pouces, divisés de 10 à 10 minutes, mais pourvus de deux microscopes opposés, pour la lecture micrométrique des subdivisions, et qui donnent l'exactitude de la seconde. Il aurait été impossible d'employer en Finmarken un instrument de plus grandes dimensions, à cause de la difficulté du transport sur les sommets des rochers escarpés des différentes stations dont plusieurs dépassent même la ligne des neiges perpétuelles. Or la limite inférieure des neiges perpétuelles se trouve, sous $69^{\circ} 45'$, à la hauteur de 458 toises, par un milieu de quatre déterminations faites, dans ces régions mêmes, par Buch et Wahlenberg; et nous voyons, T. II, p. 481, que trois des stations occidentales sont en effet plus élevées. Ajoutons encore que, dans ces régions boréales et presque absolument

inhabités, il n'y a pas, en été, d'autres moyens de transport, soit pour les instruments, soit pour les tentes, vivres, etc., qu'à l'aide d'une caravane à cheval, mais qui ne peut conduire qu'aux pieds des rochers, séparés par de grandes plaines marécageuses. Pour les stations des îles, la communication en chaloupe était la seule possible et bien commode.

Les mêmes difficultés s'étaient présentées pour l'érection des signaux; car, pour toutes les stations sans exception, il fallait transporter le bois du district d'Alten, où se trouve la forêt de sapins la plus septentrionale de l'Europe, tandis que le reste du terrain de notre arc n'offre que des broussailles de bouleaux nains.

Malgré la courte durée de la saison, qui n'est que de deux mois dans ces régions, les géomètres norvégiens réussirent à mesurer tous les angles sur les 15 stations dans le courant des deux étés 1846 et 1847.

La mesure d'une base et les observations astronomiques restaient encore à exécuter. M. Hansteen, désirant rendre cette partie importante le plus parfaitement comparable avec les opérations analogues exécutées en Russie, réclama l'assistance de l'Observatoire central de Russie pour ces travaux, sachant que cet établissement était en possession de tous les instruments et appareils nécessaires. Par suite d'une correspondance entre M. Hansteen et moi, et avec l'approbation de l'Académie des sciences de Saint-Petersbourg, l'Observatoire central délégua, en août 1849, un de ses astronomes, M. Lindhagen, pour préparer à Christiania, sous la direction de M. Hansteen, les arrangements à prendre de part et d'autre. Dans ces consultations de Christiania, les points suivants furent arrêtés pour l'expédition astronomique de Finmarken.

- 1) L'expédition sera exécutée au nom du gouvernement norvégien qui se charge de tous les frais de l'expédition, y compris le transport des instruments de Poulkova à Christiania, etc. *).
- 2) L'Observatoire de Poulkova cédera à la Commission de Norvège, pour être employés dans cette entreprise scientifique, les instruments et appareils que voici :
 - a) l'appareil pour la mesure des bases, composé de quatre règles de mesure, d'un étalon et du comparateur;
 - b) le cercle vertical transportable de Repsold, pour l'observation des latitudes;

*) D'après une notice de M. Klouman, datée de Christiania le 25 juillet 1853, la dépense faite par le gouvernement norvégien, pour l'expédition de 1850, a été de 3492 écus d'espèce de Norvège = 5228 écus de Prusse. Les frais totaux des travaux norvégiens, dans la prolongation de la mesure de degrés, monte à 8885 écus d'espèce = 13328 écus de Prusse.

- c) un instrument des passages de Brauer, de nouvelle construction, pour l'usage dans le premier vertical;
 - d) un grand instrument universel d'Ertel, pour l'observation du temps absolu et de l'azimut;
 - e) plusieurs chronomètres, réglés sur le temps sidéral;
 - f) une collection d'appareils auxiliaires.
- 3) La Commission de Christiania donnera à l'expédition :
- a) le théodolite, employé déjà antérieurement, et qui servira à la jonction de la base aux triangles principaux;
 - b) un chronomètre réglé sur le temps moyen;
 - c) plusieurs appareils auxiliaires.
- 4) De la part du gouvernement norvégien, M. Klouman sera envoyé à Poulkova, en avril 1850. pour y recevoir les instruments, et pour les conduire à Christiania par la voie des bateaux à vapeur de Copenhague, etc.
- 5) De la part de l'Observatoire central, M. Lindhagen sera délégué pour l'expédition de Finmarken; car c'est à l'astronome de Poulkova que la Commission de Norvège désire confier les travaux astronomiques à exécuter à FUGLENAES. Un mécanicien habile l'accompagnera dans l'expédition.
- 6) Les travaux pourront être achevés dans le courant de l'année 1850, grâce à la communication régulière, établie par les bateaux à vapeur depuis Christiania jusqu'à Hammerfest.
- 7) La base sera mesurée aux environs d'Allengaard, sur le continent, par MM. Klouman et Lindhagen.
- 8) M. Klouman exécutera la mesure des triangles qui effectueront la jonction de la base avec un des côtés du réseau principal.
- 9) La Commission de Norvège arrangerá tous les préparatifs qui pourront contribuer à une marche heureuse et rapide des opérations.

Ce projet fut sanctionné par Sa Majesté le Roi le 27 décembre 1849, et M. Hansteen fut autorisé, de la part du Département de l'intérieur, de porter cette décision à la connaissance de l'Académie des sciences de Saint-Petersbourg; ce qui se fit par un office du 15 février 1850. L'Académie, de son côté, autorisa le directeur de l'Observatoire central de procéder aux préparatifs de l'expédition.

Le voyage de M. Klouman, de Christiania à Poulkova, tomba dans une saison où les communi-

cations d'hiver avaient cessé, et celles d'été, par eau, n'étaient pas encore établies. Il ne lui resta qu'à faire le grand détour par Copenhague, Hambourg, Berlin et Varsovie. C'est par ce chemin qu'il arriva à Poulkova le 11 avril. Le séjour de six semaines que fit M. Klouman à Poulkova fut utilisé au profit de l'expédition. Dans cet espace de temps, tous les instruments et appareils furent examinés, réglés et encaissés le plus soigneusement. Mais il fallait encore donner à nos deux géomètres, pour la mesure de la base d'Alten, l'avantage d'une expérience positive. Dans ce but, ils entreprirent la série complète des opérations de la comparaison entre l'étalon original qui devait rester à Poulkova, la copie de cet étalon, faite pour être employée en Finmarken, et les quatre réglés de l'appareil. Puis ils exécutèrent la mesure d'une base de 150 toises sur le terrain de l'Observatoire; opération qui était suivie d'une seconde comparaison des étalons, etc.

Les notices suivantes sur l'expédition de Finmarken ont été extraites du rapport détaillé de M. Lindhagen, publié en allemand, dans le *Bulletin* de l'Académie, et qui se trouve annexé à cette introduction.

Nos deux géomètres, MM. Klouman et Lindhagen, accompagnés du mécanicien M. Lysander, partirent avec tous les appareils par le bateau à vapeur anglais, le *Neptune*, qui les transporta à la rade de Copenhague, où venait de mouiller justement le pyroscaphe gouvernemental norvégien, le *Nordcap*, qui devait les conduire à Christiania. Un séjour de deux semaines à Christiania suffit à tous les arrangements ultérieurs de l'expédition. Nos voyageurs en profitant des différents bateaux à vapeur qui font la communication régulière de Christiania, Bergen, Drontheim, Alten et Hammerfest, arrivèrent le 25 juin à Bosekop sur l'Altenfiord, précisément à l'époque la plus favorable pour les travaux. Ayant déposé les appareils destinés à la mesure de la base à Bosekop, sous l'inspection du mécanicien, ils continuèrent leur route, à bord du même pyroscaphe, jusqu'à Hammerfest, où ils n'avaient qu'à faire les arrangements définitifs pour l'érection d'un petit observatoire sur le point extrême FUGLENAES. Le 27 juin ils furent de retour à Bosekop.

C'était une circonstance heureuse, que l'attente de trouver aux bords de l'Altenfiord le terrain propre à la mesure d'une base, quoique petite, ne fut pas frustrée. Car d'après la conviction de M. Klouman, il aurait été impossible de trouver un autre terrain tout le long des triangles de Finmarken. Une grande salle de Bosekop offrit une bonne localité pour la comparaison de l'étalon et des règles. Cela fait, la mesure de la base commença le 5 juillet, fut terminée le 12 juillet, et suivie d'une nouvelle comparaison de l'étalon et des règles à Bosekop.

La longueur de la base était de 1155 toises = 2,1 verstes. Il fallait déduire de cette ligne le côté NEPPIVAARA-LODIZUOKKI, dix fois plus long que la base, en passant successivement par des côtés

croissants de triangles auxiliaires. La carte, pl. XIX, indique le réseau de ces triangles, formé en tout par douze stations, dont huit stations auxiliaires *C* à *K*, entre la base et le côté principal, choisis d'après une reconnaissance très-soignée de M. Klouman. Dans le voyage de reconnaissance, il fallait transporter et ériger les signaux, construits chacun d'un poteau cylindrique, emboîté dans un seuil de forme de croix, et fixé par des traverses inclinées.

M. Lindhagen s'était chargé de la mesure des angles sur les stations de la base et à RÅFSHOLMEN, îlot à fleur d'eau, opposé à la base. M. Klouman avait à opérer avec son théodolite aux neuf autres stations, placées toutes sur des rochers qui s'élevaient jusqu'à 330 toises. C'est avec un intérêt particulier qu'on lit, dans le rapport de M. Lindhagen, les détails d'une vie errante d'un rocher à l'autre et à travers les marais, vie que mena M. Klouman pendant 4 semaines. Le 18 août, M. Klouman fut de retour à Bosekop, et M. Lindhagen l'y joignit le 26, pour terminer avec lui, jusqu'au 5 septembre, les dernières opérations à faire aux alentours de la base. Le départ de M. Klouman pour Christiania fut fixé au 20 septembre, avec l'avant-dernier bateau à vapeur. M. Lindhagen ne pouvant achever les observations astronomiques de FUGLENAES pour cette époque, M. Klouman partit seul le 20 septembre, et conduisit tous les appareils géodésiques à Christiania.

M. Lindhagen avait pris son séjour fixe à Hammerfest le 17 juillet, accompagné du mécanicien. Ayant trouvé à cette époque le petit observatoire de FUGLENAES achevé et bien construit, rien ne l'empêcha de commencer les observations astronomiques, qu'il espérait terminer avant que M. Klouman ne fût de retour de l'expédition géodésique. Mais le ciel, presque toujours couvert, le détrompa de ces illusions. Les premières 5 semaines du séjour de Hammerfest avaient bien fourni quelques observations astronomiques éparses, mais qui, tout en donnant de bons résultats, ne répondaient nullement au plan formé. De retour à Hammerfest, pour la seconde fois, le 8 septembre, il lui restait encore un espace de 11 jours, qui aurait suffi par un temps de beau ciel, mais pas même une seule observation ne fut faite, le ciel étant couvert sans interruption. Il fallait donc renoncer au retour du 20 septembre avec M. Klouman. Trois semaines plus tard, le bateau à vapeur devait partir pour la dernière fois. Déjà M. Lindhagen s'était résigné à rester tout l'hiver à Hammerfest, pour atteindre son but, lorsque enfin une quinzaine de journées d'un beau ciel clair, au commencement du mois d'octobre, lui permirent de terminer les travaux astronomiques le 12 octobre, conformément au plan. Le 13 octobre, MM. Lindhagen et Lysander, avec les instruments astronomiques, partirent de Hammerfest et arrivèrent le 2 novembre à Christiania. Tous les instruments, géodésiques et astronomiques, furent examinés ici et trouvés dans un état de conservation parfaite.

D'après les arrangements projetés, M. Lindhagen aurait dû finalement conduire les instruments et appareils par Gothenbourg et le Goetha-canal à Stockholm. La saison avancée rendit ce transport

impossible, et tous les instruments restèrent à Christiania, en dépôt de la Direction des travaux géographiques.

MM. Lindhagen et Lysander quittèrent enfin Christiania le 14 novembre, pour retourner en Russie, par Copenhague, Wismar, Berlin, etc. A Koenigsberg, M. Lysander fut attaqué d'un accès de tympanitis aiguë, auquel il succomba après une courte maladie de peu de jours. M. Lindhagen, ayant rempli les derniers devoirs envers son compagnon de voyage, quitta Koenigsberg et arriva à Poulkova le 16 décembre, après une absence de 7 mois.

Dès qu'on prend en considération la grande distance entre Poulkova, Christiania et Hammerfest, et la courte durée de la saison dans les régions septentrionales, on conviendra que la pleine réussite de l'expédition de Finmarken est due à un concours d'arrangements précis faits de la part du gouvernement norvégien, et au zèle et à la persévérance de nos deux géomètres.

Pour terminer ma relation, en ce qui concerne l'arc de Norvège, j'ai encore à mentionner une circonstance importante. M. Klouman, à son arrivée à Poulkova, me remit au nom de M. Hansteen les journaux des opérations géodésiques exécutées entre FUGLENAES et ATJIK, en 1846 et 1847, et en fit une copie pendant son séjour à l'Observatoire. Cette copie est restée chez nous. En 1854, M. Hansteen nous a également envoyé la copie complète des journaux de M. Klouman, où sont consignés les angles observés en 1850, pour la jonction de la base d'Alten au côté principal LODIZBJOKKI-NUPPIVAARA. Les journaux de la mesure de la base avaient été tenus en double par nos deux géomètres. Le journal primitif de M. Klouman se trouve à Christiania, celui de M. Lindhagen à Poulkova. Nous avons reçu la copie du premier journal. De notre part, des copies complètes, soit du journal de la base, tenu par M. Lindhagen ; soit des observations astronomiques qu'il a faites à Hammerfest, ont été envoyées à Christiania. C'est ainsi que tous les documents sont réunis dans les deux lieux, au Dépôt géographique de Norvège et à l'Observatoire de Poulkova.

La possession des matériaux complets, relatifs aux opérations de Finmarken, nous mit en état d'entreprendre le calcul. Aussi M. Hansteen nous déclara que le Dépôt de Norvège, en nous communiquant tous les matériaux, se croyait acquitté des obligations qu'il s'était imposées dans la mesure de l'arc de Finmarken, et que ce Dépôt remettait entièrement la déduction des résultats scientifiques à l'Observatoire central de Russie et à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg. Par suite de cette déclaration, j'engageai M. Lindhagen à s'occuper des calculs d'une opération dans laquelle il avait pris une part si active.

La relation précédente conduit à une connaissance précise du point auquel était arrivée la mesure de l'arc du méridien, à la fin de l'année 1850. Il me reste, pour terminer cette période, à donner un

aperçu des opérations exécutées, en 1851, dans l'intention de terminer enfin les travaux soit géodésiques, soit astronomiques de cette vaste entreprise.

La mesure de l'arc russe de 20° 30', entre le Danube et Tornea, étant une opération qui, depuis les arrangements confirmés par la sanction de Sa Majesté l'Empereur, en 1844, s'exécutait par le concours de travaux entrepris de la part de l'État-major Impérial et de l'Observatoire central, j'avais à rapporter sur la marche des travaux, en dehors de l'Académie, encore à S. E. M. l'aide-de-camp général de Berg. Mon rapport adressé à ce chef de l'État-major Impérial, du 7 avril 1851, lui indiqua soit l'achèvement total des travaux géodésiques entre le Danube et Tornea, soit le progrès rapide des opérations, entreprises, sous la protection de Sa Majesté le Roi de Suède et de Norvège, pour la prolongation de l'arc jusqu'à l'étendue colossale de 25° 20'. En effet, je me vis à même de lui annoncer que les opérations de Norvège étaient terminées, et qu'en même temps la perspective se présentait de voir achever les travaux de Suède dans le courant d'une année. Dans sa réponse du 19 avril 1851, M. de Berg s'est exprimé dans les termes suivants :

« Dès qu'on considère l'étendue du terrain de l'Empire Russe, une connaissance exacte des dimensions et de la figure de la Terre s'est montrée depuis longtemps comme indispensable pour les travaux du Dépôt topographique; il me paraît, par conséquent, bien à désirer que le Dépôt parvienne le plus tôt possible en possession de données, sur lesquelles il sera possible de baser avec sûreté tous les calculs des opérations trigonométriques de Russie. »

La vérité de ces paroles aurait dû m'engager à m'occuper sans délai d'un calcul définitif de l'arc mesuré en Russie, et de le faire concourir dans sa totalité à la détermination des dimensions de l'ellipse du méridien, si je n'avais vu clairement qu'il fallait attendre, dans l'intérêt de la science et de l'utilité pour le Dépôt topographique de Russie, l'achèvement de la prolongation de l'arc jusqu'à son point extrême septentrional, FUGLENAES. Cette prolongation, par sa position septentrionale, devait le plus efficacement contribuer à déterminer l'aplatissement de la Terre entre des limites très-étroites. Grâce aux propositions faites de la part des deux Académies de Stockholm et de Saint-Petersbourg, la décision fut prise, en printemps 1851, d'achever dans le courant de cette année les travaux qui restaient encore à faire en Laponie. Une lettre de M. Selander, datée du 15 mai 1851, me porta les renseignements importants que voici :

« Notre Académie, dans sa séance d'hier, après la lecture de la communication de l'Académie de Saint-Petersbourg (datée le $\frac{3}{15}$ avril 1851), et dans l'espérance que l'appareil pour la mesure de la base arrivera à temps à Stockholm, a résolu de présenter à Sa Majesté le Roi un mémoire, relatif à la continuation des travaux de la mesure de l'arc du méridien et à l'achèvement des opérations dans le courant de cette année. Ayant été admis en audience auprès de Sa Majesté, il y a quelques jours,

« je puis ajouter que toutes les difficultés de cette proposition ont été levées par la protection de Sa
 « Majesté le Roi. »

Le rapport de M. Selander, donné plus haut, p. xxiv, indique avec précision ce qu'il y avait encore à faire en 1851 de la part des géomètres suédois. Il restait à mesurer la base, à réunir la base avec un des côtés des triangles principaux, et à terminer les observations astronomiques à TORNEA. Quant aux travaux russes, il s'agissait de la jonction entre le dernier triangle de Finlande et le premier triangle suédois, lesquels avaient bien un point commun, TORNEA, mais non pas un côté identique. Cette jonction était indispensable pour tirer tout avantage des deux bases voisines, l'une située au nord, l'autre au sud de TORNEA. En outre, il fallait répéter les observations astronomiques à TORNEA, de l'azimut et surtout de la latitude, avec les mêmes instruments qui avaient été employés à FUGLENAES, l'année dernière, avec un succès si distingué.

Jetons maintenant un coup d'oeil sur les triangles suédois, pl. XVII, qui s'étendent depuis les deux stations de Norvège les plus méridionales, ATJIK et BAELJATZ-VAARA, jusqu'à TORNEA, en ne déclinant que très-peu de la direction du méridien. Les 24 stations forment 21 triangles principaux*). La mesure des angles soit horizontaux, soit verticaux, des 21 triangles, avait été entièrement terminée en 1850. La carte nous fait voir que tous les triangles, depuis la frontière du Finmarken norvégien, $69^{\circ} 0'$, jusqu'à KITTIS, $66^{\circ} 30'$, sont de forme distinguée et de dimensions considérables, et qu'il y a dans cette partie, en dehors des trois angles nécessaires dans chaque triangle, encore plusieurs directions diagonales observées. Depuis KITTIS jusqu'à TORNEA, nous reconnaissons les anciennes stations principales des opérations de Maupertuis et de Svanberg, à cette exception près que par l'addition de PERRA-VARA, situé à mi-chemin entre TOENEA et HUITAPENI, le premier triangle de Maupertuis est remplacé par deux triangles plus petits, mais qui offrent une forme plus avantageuse. Notre planche XVIII indique l'endroit où la base a été mesurée. C'est pour la troisième fois que la mesure d'une base a été entreprise aux environs de la paroisse de Öfver-Tornea : par Maupertuis en 1736, par Svanberg en 1802, puis en 1851. Les deux premières bases avaient été mesurées en hiver sur la glace du fleuve Tornea-Elf, qui offre ici une ligne droite libre de 7400 toises ou 13,5 verstes = 14,4 kilomètres, dans une direction méridionale à partir de la dite paroisse. La nouvelle base, au contraire, fut mesurée en été, sur le terrain solide entre le Tornea-Elf et la montagne Avasaksa.

*) M. Selander a ajouté un triangle supplémentaire, et qui réunit le terme septentrional de l'ancienne mesure de Svanberg, PAUTA-VAARA, aux autres stations. Ce triangle a pour côté donné la distance de LUMI-VAARA à KUIVASKERO.

Les détails des opérations de 1851 se trouvent dans le second rapport annexé de M. Lindhagen. Nous en tirons les notices qui servent à compléter cet exposé historique.

J'avais associé à M. Lindhagen, pour les travaux de 1851, un aide dans la personne de M. A. Wagner, depuis astronome à l'Observatoire central. Une tente à double toit avait été faite pour l'emplacement des trois instruments destinés aux observations astronomiques. Quelques petits appareils auxiliaires, fournis en 1850 de la part de l'Observatoire de Christiania, ayant été remplacés par d'autres, nos voyageurs quittèrent Kronstadt avec ce petit bagage scientifique le $28/16$ mai, et arrivèrent le 1^{er} juin n. st. à Stockholm, où ils trouvèrent M. Klouman, notre collaborateur de 1850, et les instruments restés en dépôt à Christiania en automne 1850. Ayant reçu de M. Klouman les instruments et appareils, tous dans le meilleur état de conservation, M. Lindhagen, conformément à l'instruction que je lui avais donnée, remit l'appareil pour la mesure de la base entre les mains du chef des opérations suédoises, M. Selander.

Le 15 juin, nos voyageurs, avec leurs instruments astronomiques, s'embarquèrent pour le nord à bord du bateau à vapeur *Thule*, accompagnés cette fois par le savant collaborateur de M. Selander, M. Skogman, qui conduisit l'appareil de la mesure de la base jusqu'à l'endroit où il devait être employé en Laponie.

Arrivés à Haparanda le 19 juin, les deux astronomes russes s'établirent à TORNEA. Cette ville, étant la station de leurs observations astronomiques, offrait en outre l'avantage d'être le plus favorablement située pour les différentes excursions à entreprendre, soit au terrain de la mesure de la base, soit aux stations qui devaient effectuer la jonction des triangles russes et suédois. Peu de jours après, M. Skogman quitta Haparanda pour conduire l'appareil à ÖFVER-TORNEA, paroisse située à 70 verstes au nord de la ville de Tornea, et pour y faire les préparatifs pour la mesure de la base.

Les travaux des deux astronomes de Poulkova ont été en général favorisés par l'état de l'atmosphère. Ayant établi leur tente d'observation sur une des collines sablonneuses situées entre l'église de la paroisse de Neder-Tornea et l'ancienne station trigonométrique КОККО-МÄKI, ils commencèrent leurs observations astronomiques à l'aide de trois instruments placés sur des piliers solidement maçonnés. M. Lindhagen travaillait à la détermination de la latitude à l'aide du cercle vertical de Repsold et de l'instrument des passages du premier vertical. M. Wagner avait à faire les déterminations de l'azimut et du temps absolu. Ces observations furent à peu près terminées jusqu'au 15 juillet, à l'exception des passages par le premier vertical, pour lesquels il fallait attendre une certaine obscurité des nuits, qui manquait entièrement dans la saison voisine du solstice. Le temps libre qu'ils avaient, fut employé pour une liaison entre la tente astronomique et les deux stations, TORNEA, église de la paroisse, et КОККО-МÄKI, éloignées d'entre elles de 500 toises. Une ligne de 523 pieds, mesurée deux fois à l'aide de perches en bois de 22 pieds de long, servait de

base à cette opération. Il leur restait à exécuter les mesures pour la jonction bien plus importante entre les triangles suédois et russes. La reconnaissance du terrain démontra qu'un seul triangle d'assez grande dimension suffisait à ce but. En effet, le côté suédois KAAKAMA-VAARA-TORNEA et le côté russe TORNEA KIVALO pouvait produire cette jonction, dès qu'il était certain que les deux signaux de KAAKAMA-VAARA et de KIVALO, éloignés de 26000 toises ou de 47 verstes, étaient réciproquement visibles. Une première visite à KAAKAMA-VAARA décida cette question affirmativement. La mesure des angles fut exécutée successivement aux deux stations indiquées, et plus que complétée par les angles mesurés soit de la tente près de TORNEA, soit de la station KOKKO-MÄKI.

M. Selander, ayant été retenu à Stockholm en sa qualité de délégué de l'Académie des sciences par les affaires de la Diète suédoise assemblée à cette époque dans la capitale, arriva à Haparanda le 31 juillet et partit immédiatement, après avoir consulté avec M. Lindhagen, pour Matarengi, poste suédois sur le bord occidental du Tornea-Elf, près de Öfver-Tornea. Nos deux astronomes s'y rendirent également, et les quatre géomètres s'y trouvaient réunis déjà le 2 août, pour entreprendre la mesure de la base. M. Skogman avait préparé le terrain, choisi par M. Selander en été 1850, et avait érigé les signaux sur les 5 stations auxiliaires qui devaient servir à la réunion de la base avec le grand côté AVASAKSA-PULLINKI, voyez pl. XVIII. Les extrémités de la base étaient solidement marquées dans le terrain, et même la mesure des angles sur les stations auxiliaires était faite en majeure partie. Pour la comparaison des règles et de l'étalon, ainsi que pour toutes les rectifications de l'appareil, une grande pièce dans la maison de poste de Matarengi offrit une localité favorable. Cette opération étant achevée, l'appareil fut transporté de l'autre côté de la rivière, sur le terrain finlandais, et la mesure effective commença le 5 août. Elle fut terminée le 12. Une seconde mesure fut entreprise le 13 août et terminée le 19. Les jours suivants, une nouvelle comparaison des règles avec l'étalon eut lieu à Matarengi. La base était de 1520 toises, le terrain n'admettant point une ligne plus longue.

M. Selander resta encore quelque temps aux environs de Matarengi pour achever la mesure des angles aux stations indiquées de jonction. M. Skogman avait dû partir plus tôt, rappelé pour prendre part à un voyage scientifique autour du monde. Puis M. Selander s'en retourna à Haparanda pour terminer également ses observations astronomiques à TORNEA. Les deux astronomes russes quittèrent Öfver-Tornea le 21 août, visitèrent la station KAAKAMA-VAARA pour y faire la mesure des angles, et arrivèrent le 26 août à TORNEA. Dans l'espace des trois semaines suivantes, toutes les observations astronomiques furent achevées, jusqu'au 19 septembre. Enfin MM. Selander, Lindhagen et Wagner se virent à même de quitter le nord pour retourner à Stockholm avec tous les instruments, à bord du bateau à vapeur *Thule* qui leva l'ancre le 23 septembre et mouilla au port de Stockholm le 1^{er} octobre.

A Stockholm, M. Selander remit l'appareil de la base entre les mains du délégué de l'Observatoire central de Russie, M. Lindhagen. Nos deux voyageurs firent le trajet de Stockholm à Kronstadt à bord d'un bâtiment marchand, et arrivèrent à Poulkova le 22 octobre avec tous les instruments et appareils, après une absence de cinq mois, et ayant exécuté complètement la commission dont ils avaient été chargés de la part de l'Observatoire central.

QUATRIÈME PÉRIODE.

Travaux supplémentaires et postérieurs à 1851.

Il restait cependant, en 1852, du travail à faire de la part des savants suédois. La jonction entre la base et les triangles principaux avait été faite, en 1851, avec une certaine précipitation, à cause du rappel brusque de M. Skogman. M. Selander la refit entièrement en 1852, à l'occasion du voyage qu'il entreprit avec M. Agardh, pour terminer le grand nivellement trigonométrique entre les deux mers, et qui avait été poussé, en 1850, depuis le Golfe Bothnique jusqu'à la frontière du Finmarken norvégien. Voilà la fin des opérations de l'arc scandinave, commencées en 1845 et terminées en 1852. Pendant ces huit années consécutives, M. Selander, assisté par plusieurs collaborateurs, a subi annuellement les fatigues et les périls d'un travail géodésique et astronomique à exécuter dans un terrain presque désert, et situé entre 66° et 70° de latitude. Nous félicitons sincèrement M. Selander d'avoir rempli sa tâche ardue, et certes le monde savant lui vouera avec nous toute la reconnaissance qui est due à l'exécution d'un travail scientifique aussi important que difficile.

Quant aux travaux russes, l'année 1852 était destinée à l'exécution de trois expéditions supplémentaires, arrangées encore en commun de la part de l'État-major Impérial et de l'Observatoire central. L'une avait pour objet des observations astronomiques en Bessarabie, la seconde des observations astronomiques en Finlande, et la troisième la jonction chronométrique entre les observatoires de Poulkova et de Dorpat. La dernière dut être remise à une époque postérieure, par la raison qu'en 1852 la plupart de nos chronomètres étaient absents, pour d'autres expéditions entreprises dans l'intérêt de la géographie générale de la Russie européenne.

Il m'avait paru indispensable de faire réobserver la latitude et l'azimut sur le point extrême méridional près du Danube, STARO-NEKRASSOWKA, en employant les mêmes instruments distingués et les mêmes méthodes dont nos astronomes s'étaient servis à FUGLENAES en 1850, et à TORNEA en 1851. Par ce moyen, j'espérais que l'amplitude de notre arc total serait déterminée avec le plus haut degré possible d'exactitude. En même temps, je jugeais convenable de faire répéter les observations de latitude sur quelques stations

astronomiques, intermédiaires entre le Danube et la Duna, pour pouvoir contrôler l'exactitude des résultats obtenus par des observations antérieures, soit à l'aide de cercles de moindre perfection, soit en partie par l'emploi des passages par le premier vertical. Une autre circonstance était survenue. Dans les journaux de la base de TASCHEUNAR, une ambiguïté fut découverte sur les éléments de comparaison entre les règles et l'étalon, ambiguïté qui rendait le calcul déjà fait de la longueur de cette base un peu douteux. Il fut par conséquent indispensable de mesurer cette base une seconde fois*); ce qui était d'autant plus praticable que l'appareil de mesure se trouvait encore à Iékatérinoslav, entre les mains du major-général Wrongschenko, nommé en 1850 chef de la triangulation de la Russie méridionale qui devait s'étendre depuis la Bessarabie jusqu'à la Mer Caspienne. Voilà l'origine de notre expédition de Bessarabie en 1852, à la tête de laquelle je me félicitai de pouvoir placer comme chef M. Prazmovski, astronome de Varsovie, avec l'approbation éclairée du conseiller privé M. de Moukhanoff, curateur de l'arrondissement d'instruction publique du Royaume de Pologne. M. Prazmovski avait fait en 1846 et 1847 un séjour prolongé à Poulkova, et j'avais rencontré chez lui un talent rare pour l'astronomie pratique. MM. Wagner qui avait pris part à l'expédition de Laponie en 1851, Gamow, officier topographe, Blum, topographe, et Butz, aide-mécanicien à Poulkova, furent associés au chef. Le résultat de cette expédition répondit entièrement au but intentionné. La base fut mesurée, la latitude et l'azimut furent déterminés à STARO-NEKRASSOWSKA, la latitude à SSUPRUNKOWZI. Mais les latitudes des deux autres points choisis durent être remises, par manque de temps. On lira les détails historiques de cette expédition dans le rapport de M. Prazmovski, qui se trouve plus bas parmi les documents historiques.

La seconde expédition de 1852 devait déterminer astronomiquement un point central de Finlande, pour subdiviser l'arc entier de Finlande, de 5° 46', en deux portions à peu près égales. Cette tâche fut confiée à notre ancien collaborateur infatigable de Finlande, M. le professeur Woldstedt de Helsingfors, assisté

*) La longueur de la base de Taschbunar, réduite au niveau de la mer, avait été calculée, en 1849 à 2770,31732 toises, log. 3,4435295.2 (Записки, Vol. XVII, p. 51).

La mesure de 1852 donna 2770,24614 ± 0,00274, log. 3,4425183.6 (Voir notre ouvrage, T. II, p. 16).

Correction pour 1849. . — 0,07118 toises = 6,0 pouces, — 111.6
 = $\frac{1}{38900}$ de la longueur.

La correction est insignifiante pour les opérations de Bessarabie, regardées comme fondement de la levée du pays, mais elle est assez grave pour la mesure de l'arc du méridien.

par M. Fedorenko, aujourd'hui professeur-adjoint de l'Université de Kharkow, et qui séjournait depuis deux ans à Poulkova, pour se perfectionner dans l'astronomie. La station KILPI-MÄKI, commune aux triangles 191 et 192, pl. XII, fut choisie pour nouveau point astronomique. La latitude devait y être déterminée à l'aide de deux instruments, d'un nouveau cercle vertical transportable de Repsold, de 11 pouces de diamètre, à lecture microscopique *), et de l'instrument universel d'Ertel, à verniers, A''', T. II, p. 13. Le dernier instrument était destiné à y déterminer en outre l'azimut de SILMUT-MÄKI. M. Woldstedt, avant de commencer son voyage à l'intérieur, vint à Poulkova pour y faire une série complète d'observations d'exercice au cercle de Repsold, série qui donna une latitude très-juste de l'Observatoire central. Nos deux géomètres nous quittèrent le 18 juillet, par un des vapeurs réguliers qui se rendent à Helsingfors. Le transport des instruments et des personnes, de la capitale de Finlande à KILPI-MÄKI, par une distance de 400 verstes = 427 kilomètres, ne présentait aucune difficulté, car cette station était située près de la chaussée qui conduit à la ville de Kuopio. Le transport se fit à l'aide d'un fourgon à ressorts, qui avait déjà servi dans les opérations antérieures de Finlande. Nos voyageurs, après avoir, chemin faisant, examiné et contrôlé le signal de SILMUT-MÄKI**), arrivèrent à KILPI-MÄKI le 30 juillet, et furent de retour à Helsingfors avant le 1^{er} septembre, d'où M. Fedorenko reconduisit les instruments à Poulkova.

L'Académie de Saint-Petersbourg avait proposé, en 1852, à celle de Suède et à M. Hansteen de Christiania, qu'une réunion des trois chefs des opérations, MM. Hansteen, Selander et Struve, fût arrangée à Stockholm, pour consulter officiellement sur la voie la plus propre de publier un ouvrage général sur la mesure de l'arc total, compris entre le Danube et la Mer Glaciale. Cette réunion étant devenue impossible à cause de l'absence de M. Selander, occupé des derniers travaux de ses opérations septentrionales, j'espérais la voir réalisée l'année suivante. En effet, après avoir été informé, en printemps 1853, de la part de M. Hansteen, qu'il serait à Stockholm le 1^{er} juillet, et de la part de M. Selander qu'il rentrerait, à la même époque, de la campagne à la capitale, j'entrepris le voyage en Suède, accompagné de M. Lindhagen qui se chargea des fonctions de secrétaire. A mon grand regret, l'âge, l'éloignement et des occupations pressantes, avaient empêché notre collaborateur doyen, M. le général de Tenner, de venir à Stockholm pour la dite consultation, comme représentant de l'État-major Impérial. Cependant

*) C'est un des instruments qu'avait construits M. Repsold, d'après les indications de M. O. Struve, et qui ont été employés dans nos voyages géographiques, depuis quelques années, avec le plus grand succès, les distances au zénith qu'il fournissait étant toujours d'une exactitude surprenante, d'après une expérience de sept ans qui a confirmé entièrement la facilité attendue du transport, de l'établissement et de la manoeuvre de cet appareil précieux, et la solidité de la construction, énoncée par son invariabilité pendant de longs voyages.

**) Ils avaient retrouvé aisément les marques de centre sur les deux stations. Voir T. II, p. 222.

M. de Tenner m'avait communiqué qu'il consentirait à tous les arrangements qui résulteraient des consultations des trois commissaires présents à Stockholm.

Étant forcé, pour éviter les quarantaines suédoises, à m'embarquer de Kronstadt pour l'Allemagne, je profitai de cette occasion pour engager le directeur de l'Observatoire d'Altona, feu M. Petersen, à demander au gouvernement danois qu'il consentit à ce qu'une des règles que Schumacher avait employées à la mesure de la base de Braack, fût envoyée à Poulkova, afin d'y être comparée à l'étalon normal de nos opérations de l'arc du méridien*). Puis j'allai voir mon ancien ami, M. Argelander, à Bonn, et son bel Observatoire que je n'avais pas encore vu depuis qu'il était achevé. La visite de Bonn était pour moi d'autant plus intéressante, que M. Argelander m'avait écrit que Sa Majesté le Roi de Prusse, en se souvenant d'une promesse gracieusement faite lors de Sa visite à Poulkova, en 1842, l'avait chargé d'un voyage pour visiter l'Observatoire central de Russie. M. Argelander s'était depuis disposé à m'accompagner en Suède, et à se rendre de là, par la Finlande, à Poulkova.

Nous arrivâmes, M. Argelander et moi, le 14 juillet à Stockholm, où MM. Hansteen, Selander et Lindhagen qui m'avait devancé, nous attendaient. Les membres de la Commission étant réunis, la première consultation eut lieu le 15 juillet, et nos séances se terminèrent le 26 juillet. M. Selander ayant énoncé, dans la première séance, qu'il n'assistait à ces séances que dans son intérêt personnel pour le but dont il était question, sans autorisation de la part de l'Académie, M. Hansteen et moi nous déclarâmes être venus, l'un au nom du gouvernement norvégien, l'autre en mission officielle au nom du gouvernement russe.

Dans la séance du 15 juillet, je lus à la Commission un exposé contenant les articles que j'avais à proposer au nom de l'Académie de Saint-Pétersbourg et de l'État-major Impérial, et qui avaient été approuvés par notre Académie dans la séance du 8 juin 1853. Dans nos consultations ultérieures il fut convenu que la rédaction d'un ouvrage général sur l'arc du méridien entre le Danube et la mer glaciale d'après un programme proposé par moi et adopté par les autres commissaires me fut confiée, l'Académie de Saint-Pétersbourg s'étant déclarée disposée de se charger de la publication. A cet effet les données d'observations, nécessaires pour la jonction systématique de l'arc scandinave avec les opérations russes me devaient être communiquées de la part de MM. Hansteen et Selander. Quant aux détails des opérations norvégiennes et suédoises, il fut résolu que M. Selander proposerait à l'Académie de Stockholm de les publier à part, dans un ouvrage spécial.

*) Cette règle arriva en automne de la même année. MM. Repsold s'étaient chargés de transporter l'étalon, avec tous les soins nécessaires, jusqu'à bord du bateau à vapeur qui allait de Lubeck à Pétersbourg.

Il a déjà été dit pag. XXX que tous les détails concernant les opérations norvégiennes m'avaient été communiqués préalablement par M. Hansteen. Je n'avais donc qu'à attendre les communications de M. Selander sur les résultats des opérations suédoises, qui me parvinrent vers la fin d'août 1855, dans une missive privée de M. Selander, datée du 10 août, et se trouvent imprimées dans notre ouvrage, T. II, p. 65 — 74. Cette communication me mit enfin en état de mettre la dernière main à la rédaction du second volume de mon ouvrage, à une époque où l'impression du premier volume touchait à sa fin. Dans ces deux volumes je me suis tenu autant que possible au programme adopté par les commissaires.

L'expédition chronométrique entre Poulkova et Dorpat, qui avait pour but de fixer exactement la longitude de ce point central de l'arc du méridien, fut exécutée en 1854, sous la direction de M. O. Struve, par 10 transports de 31 chronomètres, ou par 5 voyages complets entre les deux points. Les voyages commencèrent le 19 juin et finirent le 19 juillet. Le transport des chronomètres fut confié, à tour de rôle, à deux de nos aides surnuméraires, MM. Huebner et Parrot. La détermination du temps se fit par MM. O. Struve et Sabler, et pour trois jours par M. Doellen, à l'aide de deux instruments des passages d'égal force optique. Au milieu de l'opération, les observateurs du temps changèrent de place: en outre, avant le premier départ et après le dernier retour, les trois astronomes déterminèrent, par des observations simultanées de passages, leurs équations personnelles. Les résultats de cette opération calculés par M. Lindeloef, aujourd'hui professeur de mathématiques à l'Université de Helsingfors, se trouvent dans la note annexée de M. O. Struve. Les documents relatifs à cette détermination se conservent aux archives de l'Observatoire central.

L'année suivante, 1855, M. Sabler, alors directeur de l'Observatoire de Wilna, mais qui avait été astronome de Poulkova depuis 1839 jusqu'en 1854, et collaborateur dans nos opérations de Finlande et de Bessarabie, se chargea, sur ma demande, d'une nouvelle détermination de la latitude de NEMESCH, point astronomique central de l'arc de Lithuanie. NEMESCH est à une distance de 3,8 verstes en ligne droite de l'Observatoire de Wilna, dans la direction N.-O., ou sous un azimut de 328°. M. Sabler s'établit dans une maison de campagne, et construisit un observatoire temporaire, exactement sur l'endroit où M. de Tenner avait observé, en 1826 et 1827, la latitude à l'aide de l'instrument des passages du premier vertical. C'est précisément l'emploi de cet instrument, de la part de M. de Tenner, qui avait éveillé des soupçons concernant l'exactitude de la latitude de NEMESCH trouvée en 1827; car plusieurs expériences m'avaient fait reconnaître qu'il peut y avoir une différence entre l'indication de l'inclinaison de l'axe donnée par le niveau suspendu et l'inclinaison effective dans les observations, le niveau ayant dû être ôté. M. Sabler employa, pour déterminer la latitude, un cercle vertical de Reichenbach, de 18 pouces de diamètre, appartenant à l'Observatoire de Wilna. Cet instrument est semblable aux cercles de Dorpat et

de Mitau, dont j'ai parlé dans l'histoire de l'arc Baltique. Mais M. Sabler avait fait quelques changements dans l'instrument, qui l'ont rendu essentiellement plus parfait qu'il ne l'était auparavant. La série des observations astronomiques de M. Sabler s'étend du 14 juillet jusqu'au 19 août, sans compter l'examen du coefficient de flexion, qui fut fait à deux reprises, savoir la première fois avant le commencement des observations astronomiques, et une seconde fois après la clôture de ces observations. Le travail de M. Sabler est un vrai modèle de traitement soigné et intelligent d'un instrument, et a fourni une détermination de la latitude de NEMESCH qui mérite toute confiance.

Pour compléter mon exposé historique, j'ai encore à mentionner les comparaisons faites entre les différentes unités linéaires employées dans nos opérations. L'étalon normal N de nos opérations, une double toise en fer à bouts en acier, avait été comparé, en 1828, à la toise de Fortin, envoyée de Paris à Dorpat avec un certificat de l'année 1821, dans lequel Arago en attestait l'identité en longueur avec la toise du Pérou. Mais il aurait été dangereux d'exposer l'étalon N au péril du transport sur tous les lieux où les bases devaient être mesurées. C'est pourquoi successivement plusieurs copies de N, de forme à peu près identique, furent exécutées et comparées le plus soigneusement possible avec le prototype. Mais je crus devoir étendre mes comparaisons bien plus loin; car, pour bien combiner les différents degrés mesurés dans l'intérêt des dimensions du sphéroïde terrestre, il faut connaître les rapports de toutes les unités linéaires employées pour les différents arcs. Je donne un exposé raisonné de toutes les comparaisons de mesures linéaires que j'ai exécutées, dans l'addition A, jointe à la fin de cette Introduction. Les documents primitifs de ce travail sont tous arrangés et conservés dans les archives de l'Observatoire, et pourront être consultés dès que l'occasion s'en présentera; mais je ne sais pas si je parviendrai à les publier sous une forme convenable et suffisamment détaillée. C'est pourquoi je remarque ici que, pour représenter une mesure à bouts B par une mesure équivalente à traits, j'ai employé la méthode suivante.

Je fis faire une copie de B, également à bouts et de forme identique, que je nomme B'; la comparaison faite entre B et B' donnait $B - B' = u$. Puis sur chacun des deux corps un trait fut marqué, qui divisait la longueur totale en deux portions de très-près égales. En renversant l'étalon sur le comparateur, le défaut du trait du milieu fut reconnu et mesuré. Après avoir produit le contact des deux étalons, la distance des deux traits pouvait être prise par les deux microscopes à micromètre. Une seconde mesure de même espèce s'exécutait après avoir renversé chaque étalon. La moyenne des deux mesures donnait la valeur $\frac{u + u'}{2}$ dans les microscopes, et $\frac{u + u'}{2} + \frac{u}{2}$ présentait la longueur cherchée B dans les mêmes microscopes, et qui pouvait être comparée, à l'aide des micromètres dont les microscopes étaient pourvus, à une échelle sur laquelle deux traits étaient tirés, dans une distance relative qui ne différait que d'une quantité très-petite de cette longueur.

ANALYSE DES LATITUDES DÉTERMINÉES

SUR LES TREIZE POINTS ASTRONOMIQUES DE NOTRE ARC DU MÉRIDIEN DE 25° 20'.

L'instrument des passages établi dans le premier vertical a remplacé avec un succès distingué, dans le courant de notre siècle, le secteur zénithal qui avait été employé auparavant par préférence dans les mesures des arcs du méridien. Cet usage de l'instrument des passages est primitivement dû à Olaus Römer; mais c'est Bessel qui l'a introduit dans la géodésie moderne, sans avoir connaissance de ce qu'il avait été précédé de 150 ans par le grand astronome danois, auquel la science doit la découverte de la vitesse de la lumière. L'usage de l'instrument des passages, pour la détermination des amplitudes, par l'observation des mêmes étoiles sur les différentes stations d'un arc du méridien, est cependant très-restreint; car l'instrument ne peut être employé de la sorte avec succès que pour des amplitudes de petite étendue, et il aurait été impraticable de déterminer ainsi, avec un degré suffisant d'exactitude, l'amplitude de 25° 20' entre les points extrêmes de nos opérations. Mais rien n'empêche de déterminer, sur les différentes stations astronomiques, les distances au zénith de certaines étoiles dont les déclinaisons sont tant soit peu plus petites que les latitudes respectives de ces points, et de combiner ces distances et les déclinaisons des étoiles, qui doivent être déterminées avec une exactitude éminente dans un observatoire muni d'instruments fixes de première qualité. Cependant l'exécution générale et uniforme de cette dernière méthode, pour toutes les 13 stations astronomiques de notre arc, aurait réclamé un trop grand sacrifice de temps, en s'étendant probablement sur plusieurs années successives. Il fallait, par conséquent, déterminer les latitudes, en se servant par préférence des instruments divisés, mais en admettant dans certains cas l'usage de l'instrument des passages, vu qu'il pouvait fournir de précieux contrôles pour des amplitudes spéciales. Dans l'exposé suivant, je traiterai séparément A) les latitudes de l'arc du milieu ou Baltique; B) celles de l'arc méridional qui s'étend de la Duna jusqu'au Danube, et C) celles de l'arc septentrional, compris entre le Golfe de Finlande et la Mer Glaciale.

A) Latitudes de l'arc du milieu ou Baltique.

On peut regarder l'arc Baltique qui s'étend de JACOBSTADT, latitude 56° 30', jusqu'à l'île de HOGLAND, latitude 60° 4', comme le noyau de notre arc du méridien de 25° 20', en considérant soit sa

position sur le milieu de cet arc*), soit l'influence que la mesure de l'arc Baltique, ainsi que les travaux et les moyens de l'Observatoire de DORPAT ont exercée sur les opérations qui se rattachent à l'arc Baltique dans les deux directions, méridionale et septentrionale, surtout en considérant la partie astronomique de ces opérations.

Quant à la latitude de DORPAT, la valeur définitive en est donnée dans l'introduction, p. XL, de mon ouvrage publié en 1852: *Stellarum fixarum positiones mediae*. Elle repose sur 58 lieux du pôle, déterminés alternativement dans les deux positions du cercle méridien de Reichenbach et Ertel pendant les années 1822 à 1826. La latitude du cercle méridien s'y trouve $58^{\circ} 22' 47''.40 \mp 0''.05$, avec l'indication qu'il n'existe point de motif pour admettre une incertitude plus grande dans cette latitude que celle qu'a prononcée l'erreur probable $\mp 0''.05$. En ajoutant $+ 0''.16$, nous avons la latitude du centre de la tour mobile $58^{\circ} 22' 47''.56$. Les amplitudes entre JACOBSTADT et DORPAT, DORPAT et HOGLAND, se trouvent *Gradmessung I*, p. 310 :

$$D - J = 1^{\circ} 52' 42''.435 + 1,02 \mu' - 0,63 \mu'' \mp 0''.084$$

$$H - D = 1 \ 42 \ 22,368 + 0,63 \mu'' - 0,96 \mu''' \mp 0,088$$

Les μ' , μ'' et μ''' se rapportent aux mouvements propres en déclinaison des 10 étoiles zénithales, dont 3 passent près du zénith de *J*, 3 près du zénith de *D* et 4 près du zénith de *H*. Ces trois quantités ont été déduites par M. Doellen, des déclinaisons déterminées à deux époques éloignées entre elles de 28 ans, savoir pour 1829 par M. Argelander et moi, à Abo et Dorpat, à l'aide des cercles méridiens de ces observatoires, puis pour 1857, à Poulkova, par M. Doellen à l'aide du grand cercle vertical. Les valeurs de ces quantités sont d'après la note de M. Doellen, qui se trouve parmi les *Additions à l'Introduction* :

$$\mu' = + 0''.077 \quad \mu'' = + 0''.012 \quad \mu''' = - 0''.116.$$

Avec ces chiffres on parvient à

$$D - J = 1^{\circ} 52' 42''.59, \quad H - D = 1^{\circ} 42' 22''.28.$$

La dernière amplitude donne en partant de la latitude de Dorpat, tour, = $58^{\circ} 22' 47''.56$:

$$\text{HOGLAND, Tente I, latitude } 60^{\circ} 5' 9''.84.$$

En soustrayant $40''.68$, voir T. I, p. 215 de notre livre, nous réduisons cette latitude à celle de la station trigonométrique E sur Mäki-päällys, et nous avons les trois latitudes finales :

*) La moyenne des latitudes extrêmes $45^{\circ} 20'$ et $70^{\circ} 40'$ est $58^{\circ} 0'$; la latitude de Dorpat est $58^{\circ} 23'$.

JACOBSTADT, terme	$56^{\circ} 30' 4''$	$\mp 0''10$
DORPAT, centre de la tour	$58 22 43,56$	$\mp 0,05$
HOGLAND, station trigonométrique E sur Mäki-päälys	$60 4 29,16$	$\mp 0,10$

B) Latitudes de l'arc méridional entre la Duna et le Danube.

Les latitudes préliminaires, employées pour le calcul des azimuts, se trouvent T. I, p. 214.

M. de Tenner, dans ses premières opérations, relatives à l'arc compris entre BELIN, latitude $52^{\circ} 3'$, et NEMESCH, lat. $54^{\circ} 39'$, avait fait, pour l'évaluation des amplitudes, un usage exclusif de l'instrument des passages, établi dans le premier vertical. Plus tard ses triangles furent continués, du côté nord, jusqu'à JACOBSTADT, pour produire la jonction avec les triangles des Provinces Baltiques. Dans l'autre direction, ses triangles furent successivement prolongés jusqu'à STARO-NEKRASSOWKA, près d'Ismail sur la rive gauche du Danube, latitude $45^{\circ} 20'$. C'est ainsi que l'arc Russe méridional, compris entre le Danube et le Golfe de Finlande, s'est accru jusqu'à une étendue de $14^{\circ} 44'$, et il devint indispensable d'employer, pour la détermination des latitudes et des amplitudes, des instruments pourvus de cercles verticaux, sans cependant exclure l'usage de l'instrument des passages pour des cas spéciaux.

Voici la liste des instruments employés pour la détermination des latitudes et des amplitudes sur la portion de l'arc méridional située au sud de la Duna jusqu'au Danube :

- A. *Cercle méridien transportable de Repsold.* Dans les *Astronomische Nachrichten* de Schumacher, No. 344 et 345, j'ai donné la description de cet instrument, et l'examen des erreurs de division de son cercle vertical de 14 pouces de diamètre, divisé directement de $4'$ à $4'$. La lecture se fait à l'aide de 4 microscopes. La lunette a un objectif de 2,0 pouces, de 24 pouces de foyer, et un grossissement de 50 fois. Afin d'éliminer l'effet de la flexion, j'y ai introduit, en 1850, l'arrangement qui permet d'échanger les positions de l'objectif et de l'oculaire. Dans toutes les déterminations des latitudes faites par cet instrument pour la mesure de l'arc de méridien, il a été employé alternativement dans les deux positions I et II de l'objectif et de l'oculaire. Cet instrument a été employé, en 1852, par M. Wagner, à STARO-NEKRASSOWKA et à SSUPRUNKOWZI; en 1853, à BELIN, par M. Prazmovski.
- B. *Instrument universel de Repsold*, appartenant à l'État-major Impérial. Il a un cercle horizontal de 12 pouces et un cercle vertical de 10 pouces de diamètre. Les deux cercles sont divisés de $4'$ à $4'$. La subdivision se fait à l'aide de deux microscopes appliqués sur chacun des deux cercles. L'instrument a été employé par M. Prazmovski, en 1852, à STARO-NEKRASSOWKA et à SSUPRUNKOWZI. Voir T. I, p. 221.

Ⓒ. La latitude de NEMESCH a été déterminée, en 1855, par M. Sabler, à l'aide du *Cercle vertical de Reichenbach*, de 18 pouces de diamètre, qui appartient à l'Observatoire de Wilna. Cet instrument est identique en construction et en dimensions avec le cercle vertical de Dorpat, décrit *Gradmessung I*, p. 30. L'objectif de la lunette, de 22 lignes d'ouverture, avec une distance du foyer de 25 pouces, porte un grossissement de 60 fois.

Ⓓ et Ⓔ. La latitude de WODOLUI a été déterminée par M. Sabler, en 1848, à l'aide de l'*Instrument universel d'Ertel*, dont il s'est servi à la même époque, pour déterminer l'azimut de KISCHE-NEW. Voir T. I, p. 224 de notre ouvrage. La lunette a un foyer de 18 pouces, une ouverture de 24 lignes, et porte un grossissement de 30 fois. Le cercle vertical de cet instrument a un diamètre de 11 pouces, et est divisé de 5' à 5'. Les 4 verniers donnent directement les 4". Un autre instrument de la même construction avait été employé, en 1837, par Melan, pour déterminer les latitudes de SSUPRUNKOWZI et de KREMENETZ, d'où se déduit l'amplitude comprise entre ces deux points.

Par l'emploi des moyens instrumentaux que je viens d'énumérer, à l'observation des distances au zénith, les latitudes des 6 stations de l'arc méridional, situées au sud de la Duna, ont été déterminées, toujours en combinant les résultats fournis par les étoiles circompolaires, avec ceux que présentaient les étoiles fondamentales qui passaient par le méridien du côté sud, dans des distances au zénith dont la moyenne approchait de près de la distance moyenne des étoiles circompolaires. Pour le calcul des latitudes, j'ai pris les déclinaisons moyennes dans l'admirable Catalogue de 1576 étoiles, pour l'époque 1850, publié par M. Airy, dans les *Greenwich Observations 1854*. Je citerai ce catalogue dorénavant sous le nom *Airy's Catalogue 1850*. Pour l'étoile polaire je me suis servi des positions données dans le *Nautical Almanac*. Les petites différences qui dans ce cas existent entre le *Nautical Almanac* et *Airy's Catalogue* n'ont aucune influence sur les latitudes, vu que l'étoile polaire a été observée sous des angles horaires très différents, de sorte que les erreurs possibles de sa position s'éliminent d'elles mêmes. L'instrument des passages établi dans le premier vertical n'a été employé que sur la station la plus méridionale. Je passe maintenant à l'analyse de ces différentes latitudes.

1. LATITUDE DE STARO-NEKRASSOWKA,

terme méridional de l'arc de Bessarabie et de l'arc total entre le Danube et la Mer Glaciale.

MM. Prazmovski et Wagner ont fait leurs observations en 1852, depuis le 31 août jusqu'au 18 septembre. Le premier se servait de l'instrument Ⓓ, soit pour les observations circomméridiennes, soit dans le premier vertical, M. Wagner employait l'instrument Ⓔ, pour les distances au zénith circomméridiennes.

Les distances au zénith circomméridiennes ont été observées par M. Prazmovski en donnant au cercle

divisé des positions différentes entre elles de 45° par rapport à la lunette, de sorte que le lieu du zénith indiquait successivement 0° , 45° , 90° et 135° . Voici le tableau de ces déterminations. Les résultats obtenus par les étoiles boréales sont désignés par N, et ceux qui ont été fournis par les hauteurs méridiennes observées au sud du zénith, par S.

Août 31. Zénith à 0° .				Sept. 2. Zénith à 90° .			
S.		N.		S.		N.	
α Bootis	$45^\circ 20' 2,90$	α Ursae min.	$45^\circ 20' 3,70$	α Bootis	$45^\circ 20' 2,26$	α Ursae min.	$45^\circ 20' 3,94$
α Scorpii	1,97	β Ursae min.	2,71	α Coronae	2,76	β Ursae min.	3,41
α Ophiuchi	1,91	α Ursae min.	2,11	α Scorpii	2,47	α Ursae min.	4,05
δ Aquilae	2,14	δ Ursae min.	2,43	α Ophiuchi	3,39	δ Ursae min.	1,86
α Aquilae	2,83	α Cephei	2,12	δ Aquilae	4,07	α Cephei	2,24
α Aquarii	1,01	α Urs. maj. s. p.	3,17	α Aquilae	3,84	α Urs. maj. s. p.	3,90
Moyenne	$45^\circ 20' 2,13$		$45^\circ 20' 2,71$	α Aquarii	3,88		
				Moyenne	$45^\circ 20' 3,24$		$45^\circ 20' 3,23$

Sept. 1. Zénith à 45° .				Sept. 3. Zénith à 135° .			
S.		N.		S.		N.	
α Bootis	$45^\circ 20' 1,31$	α Ursae min.	$45^\circ 20' 2,79$	α Bootis	$45^\circ 20' 2,19$	α Ursae min.	$45^\circ 20' 3,65$
α Coronae	1,59	β Ursae min.	2,85	α Coronae	2,86	β Ursae min.	3,08
α Scorpii	1,94	δ Ursae min.	3,97	α Scorpii	3,73	δ Ursae min.	2,31
α Ophiuchi	1,84	α Cephei	4,45	α Ophiuchi	4,03	δ Ursae min.	1,19
δ Aquilae	2,27			α Aquilae	4,01	α Cephei	2,79
α Aquilae	0,96			α Aquarii	5,11	α Urs. maj. s. p.	2,27
α Aquarii	3,19			Moyenne	$45^\circ 20' 3,66$		$45^\circ 20' 2,55$
Moyenne	$45^\circ 20' 1,87$		$45^\circ 20' 3,51$				

En donnant le même poids aux résultats moyens obtenus par N et S, dans les différents jours, nous avons

Août 31	$\varphi = 45^\circ 20' 2,12$
Sept. 1	2,69
" 2	3,24
" 3	3,10
Moyenne générale	$45^\circ 20' 2,86 \pm 0,13$
Réduction au centre de la station	— 0,10
Latitude	$45^\circ 20' 2,76$

Pour les observations faites par M. Prazmovski à l'aide du même instrument, en l'employant comme instrument des passages établi dans le premier vertical, il n'y a pas de réduction au centre de la station. Le tableau suivant indique les distances zénithales déduites des observations complètes de chaque étoile. Aux observations exécutées dans des conditions atmosphériques moins favorables M. Prazmovski a indiqué le poids $\frac{1}{2}$.

Distances zénithales réduites au 1 Jan. 1852.

δ Cygni	Poids	α Cygni	Poids	ρ Cygni	Poids
1852 Sept. 6 0° 33' 43,33	1	Sept. 5 0° 34' 49,57	1	Sept. 5 0° 23' 41,37	1
7	43,74 1	7	49,34 1	6	41,42 1
10	44,44 $\frac{1}{2}$	8	50,04 $\frac{1}{2}$	7	41,37 1
11	43,83 $\frac{1}{2}$	10	50,25 1	10	41,30 1
12	44,38 1	11	50,21 $\frac{1}{2}$	12	41,47 1
14	44,24 1	12	50,32 1	14	41,64 $\frac{1}{2}$
Moyenne 0° 33' 43,97		13	50,14 1	16	41,79 $\frac{1}{2}$
		14	50,56 1	Moyenne 0° 23' 41,44	
		Moyenne 0° 34' 50,04			

22 Androm.	Poids	β Aurigae	Poids	13 Lyrae
Sept. 5 0° 5' 8,56	1	Sept. 7 0° 24' 28,48	1	Sept. 10 1° 34' 49,85
7	8,14 1	8	28,82 1	
12	8,52 $\frac{1}{2}$	9	28,80 1	
16	8,68 $\frac{1}{2}$	12	28,72 1	
18	8,05 1	13	28,19 $\frac{1}{2}$	
Moyenne 0° 5' 8,34		16	29,16 $\frac{1}{2}$	
		Moyenne 0° 24' 28,70		

Parmi les 6 étoiles observées il n'y a que trois, δ Cygni, α Cygni et β Aurigae, qui se trouvent dans le catalogue de M. Airy. Les déclinaisons moyennes de ces étoiles au 1 Janv. 1852 sont

pour δ Cygni	$\delta = 44^{\circ} 46' 18,21$
» α »	45 12,83
» β Aurigae	55 34,96

Les déclinaisons combinées avec les valeurs moyennes précédentes donnent

par δ Cygni	$\varphi = 45^{\circ} 20' 2,18$
» α »	2,87
» β Aurigae	3,66
	Moyenne = $45^{\circ} 20' 2,90 \pm 0,29$

Les déterminations de la latitude, obtenues par M. Wagner à l'aide du cercle méridien transportable de Repsold, sont données dans le tableau suivant. Elles sont réunies en différents groupes dans lesquels les distances zénithales N. et S. ne diffèrent entre elles que de peu de degrés. Quelques observations isolées indiquées par un astérisque, pour lesquelles l'état de l'atmosphère n'a pas permis de rassembler le nombre fixé de 4 pointages dans les deux positions de l'instrument, Cercle Est et Cercle Ouest, ont reçu le poids $\frac{1}{2}$ dans la déduction des moyennes fournies par chaque étoile.

Position de l'objectif et de l'oculaire I.

	α Ursae min. le soir	β Aquilae	δ Aquilae	α Aquarii
Sept. 3	15 ^h 59 ^m t. sid. $45^{\circ} 20' 2,39$	$45^{\circ} 20' 4,00$		$45^{\circ} 20' 3,63$
	21 24 » $3,29$			
Sept. 4	13 16 » $2,75$		$45^{\circ} 20' 3,07$	3,67
	17 0 » $2,02$			
Sept. 7	15 59 » $2,71$	3,63	2,89	
Sept. 8	18 1 » $1,20$			
	Moyenne $45^{\circ} 20' 2,39$	$45^{\circ} 20' 3,86$	$45^{\circ} 20' 2,98$	$45^{\circ} 20' 3,65$
	α Ursae min. le matin	β Orionis	δ Orionis	α Canis. min.
Sept. 3	5 ^h 49 ^m t. sid. $45^{\circ} 20' 3,95$			
	6 12 » $2,94$			
Sept. 6	8 12 » $2,69$			$45^{\circ} 20' 3,03$ *
	8 37 » $3,17$			
Sept. 7	4 34 » $1,68$	$45^{\circ} 20' 3,91$	$45^{\circ} 20' 3,68$	4,12
	5 52 » $3,46$			
	7 9 » $2,42$			
Sept. 8	4 39 » $3,53$ *	3,12 *	2,47	3,92
	6 5 » $2,94$			
	7 13 » $2,52$			
	Moyenne $45^{\circ} 20' 2,90$	$45^{\circ} 20' 3,65$	$45^{\circ} 20' 3,07$	$45^{\circ} 20' 3,82$

	β Ursae min.	α Bootis	α Ophiuchi
Sept. 3			45° 20' 4,25
	4 45° 20' 1,63	45° 20' 1,66	
	5 3,20	1,87	
	7 2,58	4,49 *	2,73
	1,90		
Sept. 8	2,22	3,43	4,16
	1,99		
Moyenne	<u>45° 20' 2,25</u>	<u>45° 20' 2,63</u>	<u>45° 20' 3,71</u>

α Cephei	Sept. 4	45° 20' 3,73	α Coronae	Sept. 3	45° 20' 3,27 *
α Ursae maj.	» 6	2,06		» 4	3,35
» » »	» 8	1,40		» 5	2,86
» » »	» 18	1,83		» 7	3,18
				» 8	2,83
Moyenne		<u>45° 20' 2,24</u>			<u>45° 20' 3,08</u>

β Ursae min. s. p.		α Canis maj.	
Sept. 7	45° 20' 3,12	Sept. 6	45° 20' 3,63
» 7	2,59	» 7	3,80
» 8	2,61	» 8	3,75
» 8	2,96	» 8	3,53
Moyenne	<u>45° 20' 2,82</u>		<u>45° 20' 3,68</u>

α Ursae maj. s. p.		α Scorpii	
Sept. 3	45° 20' 3,68	Sept. 3	45° 20' 3,34
» 18	3,85	» 4	3,23
» 18	3,75	» 5	3,22
		» 7	3,36
		» 8	2,95
Moyenne	<u>45° 20' 3,76</u>		<u>45° 20' 3,22</u>

Position de l'objectif et de l'oculaire II.

		α Ursae min. le soir	β Aquilae	α Aquilae	α Aquarii
Août 31			45° 20' 3,31		
Sept. 1	15 ^A 45 ^m t. sid.	45° 20' 2,11	3,74		45° 20' 4,54
»	2 15 58 »	1,53	4,71	45° 20' 3,43	4,67
	17 6 »	1,60			
»	10 18 11 »	1,44	3,70	3,76	
»	11 21 50 »	1,75 *			
»	12 21 34 »	3,06	4,20	3,08	4,18
	23 25 »	2,76			
»	13 17 7 »	1,96			
	18 12 »	2,48			
»	14 17 19 »	2,82			
	Moyenne	45° 20' 2,17	45° 20' 3,93	45° 20' 3,42	45° 20' 4,46
		α Ursae min. le matin	β Orionis	δ Orionis	α Canis. min.
Sept. 1	5 ^A 57 ^m t. sid.	45° 20' 2,47		45° 20' 4,57	45° 20' 3,49
»	9 4 19 »	2,33	45° 20' 3,91	4,01	4,19
	5 53 »	2,49			
	7 11 »	2,14 *			
»	12 5 41 »	2,72	3,45		3,24
»	16 8 11 »	3,78			
	Moyenne	45° 20' 2,70	45° 20' 3,68	45° 20' 4,29	45° 20' 3,64
		β Ursae min.	α Bootis	α Ophiuchi	
Sept. 1		45° 20' 1,48	45° 20' 4,38	45° 20' 4,12	
		1,10			
»	2	2,16	2,95	3,99	
		1,22			
»	9	2,11			
»	10	2,51	3,22	3,34	
		2,00			
»	13	2,34	3,22	2,79	
		1,22			
	Moyenne	45° 20' 1,79	45° 20' 3,44	45° 20' 3,56	

α Cephei	Sept. 1	45° 20' 1,74	α Coronae	Sept. 2	45° 20' 3,73
α Ursae maj.	» 9	1,91	»	» 10	3,23
»	» 10	1,71	»	» 13	3,58
»	» 12	1,63			
	Moyenne	45° 20' 1,75			45° 20' 3,51

β Ursae min. s. p.			α Canis maj.		
Sept. 9	45° 20' 1,24		Sept. 1	45° 20' 3,58	
» 9	2,17		» 9	3,39	
» 16	0,90		» 9	4,27	
» 16	2,00		» 16	3,01	
Moyenne	45° 20' 1,58			45° 20' 3,56	

α Ursae maj. s. p.			α Scorpii		
Sept. 2	45° 20' 3,33		Août 31	45° 20' 4,25	
» 12	1,63		Sept. 1	4,36	
» 13	2,57		» 2	3,79	
» 13	2,85		» 10	3,36	
			» 13	3,33	
Moyenne	45° 20' 2,59			45° 20' 3,82	

En combinant dans les différents groupes les latitudes trouvées par les étoiles boréales avec les moyennes correspondantes des valeurs obtenues par les étoiles qui passent au sud du zénith, nous avons

	I	II	Moyenne	Dist. au zén.
par le groupe I	45° 20' 2,94	45° 20' 3,05	45° 20' 3,00	44°
II	3,21	3,29	3,25	45
III	2,71	2,65	2,68	29
IV	2,66	2,63	2,64	18
V	3,25	2,57	2,91	61
VI	3,49	3,21	3,35	72

En assignant maintenant aux moyennes précédentes des poids correspondants au nombre des étoiles observées au sud du zénith nous avons pour la détermination de M. Wagner la moyenne générale

$$\varphi = 45^{\circ} 20' 3,00 \mp 0,07.$$

L'instrument ayant été établi sur le parallèle du centre de la station, la réduction au centre est zéro. Pour toutes les trois déterminations les erreurs probables sont déduites de l'accord des moyennes avec les

déterminations isolées, en y supposant qu'il n'y ait pas d'erreurs constantes ou systématiques dans les déclinaisons puisées dans le catalogue de M. Airy.

Nous avons donc les trois moyennes générales

$$\begin{aligned} \varphi &= 45^{\circ} 20' 2,76 \mp 0,13 \\ &2,90 \mp 0,29 \\ &3,00 \mp 0,07 \end{aligned}$$

d'où nous déduisons la valeur finale:

LATITUDE DE STARONEKRASSOWKA
 terme méridional de l'arc du méridien
 = **45° 20' 2,94 ± 0,05.**

2. LATITUDE DE WODOLUI.

Cette latitude a été observée, en 1848, par M. Sabler, à l'aide de l'instrument D, p. XLIV, établi exactement sur le parallèle du centre de la station. Voici le tableau donné par M. Sabler, dans lequel chaque chiffre présente le résultat d'une mise composée de quatre pointages pour chacune des deux positions du cercle vertical. Le calcul des latitudes a été fait en prenant les déclinaisons moyennes dans *Airy's Catalogue 1850*.

Latitudes obtenues par les étoiles observées du côté nord.

Latitudes obtenues par les étoiles observées du côté sud.

	$\varphi =$		$\varphi =$
α Ursae min., passage sup.	47° 1' 25,0	α Aquilae	47° 1' 26,6
— —	24,5	—	24,0
— —	26,8	—	25,5
— —	27,8	—	23,3
— —	25,4	—	22,7
— —	25,2	—	22,8
α Ursae min., passage infér.	23,6	—	22,0
— —	23,1	α Pegasi	25,4
— —	23,7	—	26,3
— —	24,2	α Andromedae	27,7
α Ursae maj., passage sup.	25,8	—	27,7
— —	24,2		
β Cephei —	25,3		
γ Cephei —	27,5		
— —	27,8		
Moyenne	47° 1' 25,33	Moyenne	47° 1' 24,63

Par conséquent

LATITUDE DE WODOLUI,
 point trigonométrique
 = **47° 1' 24,98 ± 0,24.**

3. LATITUDE DE S SUPRUNKOWZI.

La latitude de ce point a été déterminée, en 1852, depuis le 22 jusqu'au 30 octobre, par des distances au zénith, observées de la part de M. Prazmovski à l'aide de l'instrument B, p. XLIII, par M. Wagner, à l'aide de l'instrument A, p. XLIII. Les observations de M. Prazmovski furent interrompues par un accident qui arrivait à l'instrument le 27 octobre. Voyez la note annexée de M. Prazmovski.

Latitude déterminée par M. Prazmovski.

	<i>Étoiles du côté nord.</i>	<i>Étoiles du côté sud.</i>	Moyenne
Lieu du zénith à 135°	1852. Oct. 22 γ Cephei . . . 48° 45' 2,61	γ Pegasi . . . 48° 45' 5,14	
	α Ursae min. 1,45	β Ceti 4,80	
	β Ursae min. s. p. 1,02	α Arietis 4,93	
	α Ursae min. 2,41	γ Ceti 6,50	
	δ Ursae min. s. p. 1,11	α Tauri 4,16	
		α Orionis 5,04	
	Oct. 24 α Ursae min. 0,95		
	β Cephei 2,26		
	Moyenne 48° 45' 1,69	48° 45' 5,09	48° 45' 3,39
Lieu du zénith à 45°	Oct. 26 α Ursae min. 48° 45' 3,32	α Bootis . . . 48° 45' 1,84	
	β Ursae min. 2,92		
	Moyenne 48° 45' 3,12	48° 45' 1,84	48° 45' 2,48

En combinant les résultats trouvés à part par chaque série d'observations, faite avec le même lieu du zénith, conformément aux poids relatifs que leur assignent les nombres des observations, nous avons en moyenne:

$$\begin{aligned} \varphi &= 48^\circ 45' 3,26 \\ \text{réduction au centre de la station} &+ 0,20 \\ \text{latitude du centre} &\dots\dots\dots 48^\circ 45' 3,46 \end{aligned}$$

Latitude déterminée par M. Wagner.

	<i>Étoiles du côté nord.</i>	<i>Étoiles du côté sud.</i>	
Pos. de l'obj. I. 1852	Oct. 22 α Ursae min. 1,8 l. sid. 48° 45' 1,38	α Ceti . . . 48° 45' 3,10	
	» » 5,9	2,49 α Tauri . . .	4,39
	» » 6,6	2,54 α Orionis	3,72
Oct. 24	» » 20,7	2,18	
» 25	» » 13,7	1,63	
» 26	β Ursae min. 1,71	α Bootis	2,99
	Moyenne 48° 45' 1,99	48° 45' 3,55	

	<i>Étoiles du côté nord.</i>	<i>Étoiles du côté sud.</i>
Pos. de l'obj. II. 1852 Oct. 28	α Ursae min. 18 ^h 0 t. sid. 48° 45' 1,74	α Ophiuchi . . 48° 45' 3,67
» » 18,7	1,57	α Aquilae . . . 4,26
β Cephei	1,28	α^2 Capricorni 4,15
α Ursae maj. s. p. *	3,38	α Aquarii . . . 3,73
γ Cephei	2,12	α Andromedae 3,75
Oct. 30 α Ursae min. 18,0	1,30	ζ Aquilae . . . 2,97
» » 19,9	1,76	α Aquilae . . . 3,19
β Cephei	1,77	α^2 Capricorni 3,06
α Ursae maj. s. p. *	1,85	α Aquarii . . . 3,18
β » » » *	1,77	α Arietis . . . 2,98
γ Cephei *	2,74	α Ceti 3,48
	Moyenne 48° 45' 1,82	48° 45' 3,49

Nous avons donc, par les observations de M. Wagner, les deux moyennes 48° 45' 2,77 poids 1

2,65 » 2

$$\varphi = 48^{\circ} 45' 2,69$$

$$\text{réduction au centre} \quad + 0,25$$

$$\text{latitude du centre} \quad 48^{\circ} 45' 2,94$$

Le poids de la latitude trouvée par le cercle méridien doit être estimé à 4 si nous supposons l'unité du poids pour la détermination obtenue par l'instrument universel. En combinant donc les deux déterminations indépendantes conformément à ces poids relatifs, nous trouvons la latitude du point trigonométrique 48° 45' 3,04.

En considérant que l'erreur probable de la latitude de STARONEKRASSOWKA a été déduite = 0,05 d'un nombre d'observations quatre fois plus grand que celui qui a fourni la latitude de SSUPRUNKOWZI, nous estimons l'erreur probable de la dernière détermination à 0,10. L'accord des observations isolées avec leurs moyennes respectives n'accuserait dans ce cas qu'une erreur probable de 0,06 pour le résultat moyen. Donc :

LATITUDE DE SSUPRUNKOWZI

point trigonométrique

$$= 48^{\circ} 45' 3,04 \pm 0,10.$$

4. LATITUDE DE KREMENETZ.

L'amplitude de l'arc compris entre SSUPRUNKOWZI et KREMENETZ se déduit, avec un degré très-satisfaisant de certitude, des latitudes que Melan, observateur aussi habile qu'intelligent, avait déterminées sur les deux lieux en y observant, à l'aide du même instrument universel \odot , p. XLIV, les distances circomméridiennes des mêmes étoiles polaires et fondamentales. Les observations ont été faites à KREMENETZ entre le 10 août et le 11 septembre 1837; à SSUPRUNKOWZI, en 1838, entre le 4 septembre et le 24 no-

vembre. Sur les deux points l'instrument a été établi au-dessus du centre de la station trigonométrique indiqué dans le terrain. Voir *Zanucku XII*, sect. 2, p. 182 et p. 263.

Amplitudes entre SSUPRUNKOWZI et KREMENETZ.

Par α Ursae min., passage inf.	1°20'47,74
» » » » sup.	» 47,76
δ » » » sup.	» 48,00
β Cephei » sup.	» 45,81
γ Pegasi	» 45,89
γ Aquilae	» 46,27
Moyenne.	<u>1°20'46,91</u> \mp 0,28

L'erreur probable de cette moyenne est déduite des écarts que présentent les 6 chiffres.

Malgré l'accord très-satisfaisant des amplitudes fournies par les différentes étoiles il reste à regretter qu'en 1852 la saison avancée ne permettait plus à notre expédition de répéter la détermination absolue de la latitude de ce point à l'aide des moyens instrumentaux supérieurs dont elle disposait.

En partant de la latitude finale de SSUPRUNKOWZI, 48° 45' 3,04 \mp 0,10 nous avons :

LATITUDE DE KREMENETZ

point trigonométrique

$$= 50^{\circ} 5' 49,95 \mp 0,30.$$

5. LATITUDE DE BELIN.

Cette latitude a été déterminée, en 1853, depuis le 31 août jusqu'au 13 septembre, par M. Prazmovski, à l'aide de l'instrument \mathfrak{A} de Repsold, p. XLIII, avec un soin et un succès distingués. Je répète ici le tableau original de M. Prazmovski.

		α Canis min.		
	I Pos. de l'obj.	II Pos. de l'obj.	Moyenne	Poids relat.
1853 Sept. 5	52° 2' 27,87	Sept. 11	52° 2' 28,71	
» 14	28,48	» 12	29,06	
	<u>52 2 28,18</u>		<u>52 2 28,88</u>	52° 2' 28,53 1,0
		α Bootis.		
Sept. 6	52 2 26,47	Sept. 2	52 2 27,10	
» 8	26,04	» 12	27,15	
	<u>52 2 26,25</u>		<u>52 2 27,13</u>	52 2 26,69 1,0

INTRODUCTION.

I Pos. de l'obj.		II Pos. de l'obj.		Moyenne	Poids relat.
1853 Sept. 6.	52° 2' 27,51	Sept. 2.	52° 2' 27,25		
» 10.	27,14	» 11.	27,63		
		» 12.	27,53		
	<hr/>		<hr/>	52° 2' 27,40	1,2
	52 2 27,33		52 2 27,47		
α Coronae.					
Sept. 4.	52 2 26,40	Août 31.	52 2 26,03		
» 6.	26,28	Sept. 3.	26,84		
		» 11.	26,57		
	<hr/>		<hr/>	52 2 26,41	1,2
	52 2 26,34		52 2 26,48		
ζ Aquilae.					
Sept. 4.	52 2 27,89	Sept. 11.	52 2 26,41		
» 6.	27,28	» 13.	26,57		
	<hr/>		<hr/>	52 2 27,04	1,0
	52 2 27,58		52 2 26,49		
α Aquilae.					
Sept. 6.	52 2 26,89	Août 31.	52 2 27,16		
		Sept. 10.	27,26		
		» 12.	26,19		
	<hr/>		<hr/>	52 2 26,88	0,7
	52 2 26,89		52 2 26,87		
ε Pegasi.					
Sept. 5.	52 2 26,96	Sept. 3.	52 2 27,81		
» 6.	26,65	» 12.	27,32		
	<hr/>		<hr/>	52 2 27,18	1,0
	52 2 26,81		52 2 27,56		
α Pegasi.					
Sept. 4.	52 2 25,74	Sept. 11.	52 2 27,20		
» 5.	26,90	» 12.	27,84		
» 6.	26,74				
	<hr/>		<hr/>	52 2 26,99	1,2
	52 2 26,46		52 2 27,52		

α Andromedae.

I Pos. de l'obj.	II Pos. de l'obj.	Moyenne	Poids relat.
Sept. 4....52° 2' 26,19	Sept. 11....52° 2' 28,59		
» 6.... 28,43	» 12.... 28,95		
<u>52 2 27,31</u>	<u>52 2 28,77</u>	52° 2' 28,04	1,0

 β Ursae min.

Sept. 6....52 2 25,95	Août 31....52 2 25,43		
» 10.... 26,23	Sept. 2.... 25,34		
	» 11.... 26,17		
	» 12.... 26,20		
<u>52 2 26,09</u>	<u>52 2 25,78</u>	52 2 25,94	1,3

 δ Ursae min.

Sept. 4....52 2 26,58	Août 31....52 2 26,94		
» 5.... 26,74	Sept. 3.... 26,05		
» 6.... 26,18	» 11.... 25,95		
	» 12.... 26,25		
<u>52 2 26,50</u>	<u>52 2 26,30</u>	52 2 26,40	1,7

 γ Cephei.

Sept. 4....52 2 28,41	Sept. 11....52 2 27,72		
» 6.... 26,43	» 12.... 25,63		
<u>52 2 27,42</u>	<u>52 2 26,68</u>	52 2 27,05	1,0

 α Ursae min.

Sept. 4 21,8 t. sid. 52 2 26,24	Août 31 13,7 t. sid. 52 2 25,03		
» 4 22,5 » (29,07)	Sept. 2 13,7 » 25,50		
» 5 21,2 » 25,49	» 3 20,7 » 24,74		
» 5 7,8 » 26,44	» 3 22,1 » 25,69		
» 6 13,5 » 26,22	» 10 10,2 » 25,28		
» 6 20,9 » 26,34	» 10 11,5 » 25,07		
» 6 22,4 » 26,66	» 11 21,2 » 26,09		
	» 11 8,0 » 26,69		
	» 12 12,1 » 24,80		
	» 12 22,3 » 25,32		
	» 12 8,2 » 27,13		
<u>52 2 26,23</u>	<u>52 2 25,58</u>	52 2 25,90	3,9

En combinant les latitudes fournies par les étoiles boréales avec les résultats obtenus par les étoiles qui passent par le méridien au sud du zénith à des hauteurs à peu près égales, on peut déduire de ces observations quatre différentes déterminations de la latitude.

	Latitude	Poids relat.
α Ursae min. combinée avec α Canis min., α Ophiuchi,		
ζ Aquilae, α Aquilae et ϵ Pegasi	52° 2' 26,56	8,6
δ Ursae min. avec α Pegasi et α Bootis	26,26	3,6
γ Cephei avec α Andromedae	27,54	2,0
β Ursae min. avec α Coronae	26,67	2,2
d'où l'on déduit la moyenne 52° 2' 26,63 \mp 0,14		

En outre M. Prazmovski, ayant combiné entre elles les observations des différentes étoiles faites les mêmes jours, a trouvé:

	Latitude	Poids relat.
Août 31	52° 2' 26,20	1,2
Sept. 2	26,30	1,0
» 3	26,41	1,2
» 4	26,82	1,7
» 5	26,73	1,5
» 6	26,66	3,4
» 10	26,47	0,7
» 11	26,87	2,4
» 12	26,80	3,2
Moyenne 52° 2' 26,66 \mp 0,05.		

L'accord de cette moyenne avec la valeur précédente est une preuve que le résultat est à peu près indépendant du procédé qu'on suit dans la combinaison des observations. Cependant nous donnons la préférence au premier résultat, parce que dans celui-ci les erreurs constantes de l'observation nous paraissent plus rigoureusement éliminées.

L'observatoire temporaire de M. Prazmovski s'est trouvé de 8,95 au sud de l'observatoire où le Général Tenner avait observé en 1827. En ajoutant à cette valeur la quantité 6,58 dont l'observatoire du Général Tenner se trouvait au sud de la station trigonométrique (Voir *Записки IX* p. 13) nous avons la réduction totale = + 15,53.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \text{LATITUDE DE BELIN} \\ & \text{point trigonométrique} \\ & = 52^{\circ} 2' 42,16 \mp 0,14. \end{aligned}$$

6. LATITUDE DE NEMESCH.

Cette latitude a été déterminée, en 1855, dans l'intervalle entre le 14 juillet et le 19 août par M. Sabler, directeur de l'Observatoire de Wilna, à l'aide de l'excellent cercle vertical de Reichenbach, G, p. xiv, de 18 pouces de diamètre, qui appartient au dit Observatoire. M. Sabler a observé les étoiles en variant le lieu du zénith successivement de 15° . Voici le tableau détaillé des latitudes, qui a été envoyé à Poulkova, avec tous les documents originaux des observations et des calculs de réduction. L'unité du poids se rapporte à une observation complète composée de 4 pointages exécutés dans les deux positions opposées du cercle.

<i>Étoiles du côté nord.</i>				<i>Étoiles du côté sud.</i>				
Jour de l'obs.			Poids	Jour de l'obs.			Poids	
1855. Juill. 14	α Ursae min.	I	54° 38' 63,16	2	Juill. 14	α Coronae	I 54° 38' 59,22	2
» 21	» »	II	61,10	1	» 17	» II	60,28	2
» 23	» »	III	61,30	2	» 22	» III	60,47	2
Août 2	» »	IV	59,69	2	» 31	» IV	61,05	2
» 8	» »	V	60,00	2	Août 9	» V	61,96	2
Juill. 16	» »	VI	60,84	2	Juill. 16	» VI	60,78	2
<hr/>				<hr/>				
54 39 1,01				54 39 0,63				
Juill. 14	α Urs. min. s. p.	I	54 38 61,27	2	Juill. 14	α Bootis	I 54 38 59,72	2
» 17	» »	II	60,13	2	» 17	» II	61,23	2
Août 9	» »	III	59,65	2	» 22	» III	60,63	2
» 2	» »	IV	58,50	2	Août 2	» IV	62,94	2
» 4	» »	V	59,10	2	» 4	» V	62,52	1
Juill. 16	» »	VI	61,39	2	Juill. 16	» VI	61,95	2
<hr/>				<hr/>				
54 39 0,01				54 39 1,41				
Juill. 14	β Ursae min.	I	54 38 61,51	2	Août 9, 10	α Lyrae	I 54 39 0,60	2
» 17	» »	II	61,25	2	» 12	» II	2,48	2
» 22	» »	III	59,41	2	» 13	» III	2,33	2
Août 2	» »	IV	59,01	2	» 13	» IV	1,23	2
» 9	» »	V	59,76	2	» 9	» V	2,13	2
Juill. 16	» »	VI	63,07	1	» 10	» VI	2,03	2
<hr/>				<hr/>				
54 39 0,45				54 39 1,80				

1855. Juill. 14	β Ursae min. s. p. I	54° 38' 61,57	2	Août 9	α Orionis I	54° 38' 58,51	2
» 21	» » » II	60,94	2	» 10	» II	61,22	2
» 23	» » » III	62,47	2	Juill. 23	» III	61,73	2
Août 2	» » » IV	62,94	1,5	Août 12	» IV	59,97	2
» 8	» » » V	60,40	2	» 8	» V	59,93	2
Juill. 16	» » » VI	59,76	2	Juill. 16	» VI	62,34	2
		<u>54 39 1,28</u>				<u>54 39 0,62</u>	

Juill. 15	η Draconis	I 54 38 62,98	1,5	Juill. 14	α Aurigae I	54 38 57,82	2
» 17	»	II 62,81	2	» 21	» II	59,52	2
» 22	»	III 61,08	2	» 23	» III	62,51	2
» 31	»	IV 60,84	2	Août 2	» IV	60,79	2
Août 9	»	V 61,17	2	» 8	» V	62,45	2
Juill. 16	»	VI 62,98	1,5	Juill. 16	» VI	62,18	2
		<u>54 39 1,89</u>				<u>54 39 0,88</u>	

Août 19	η Draconis s. p. I	54 38 60,87	2	Juill. 15	α Virginis I	54 38 62,26	2
Juill. 21	» » » II	59,79	2	» 17	» II	61,74	2
» 23	» » » III	61,42	1,5	Août 9	» III	60,47	2
Août 2	» » » IV	60,72	1,5	» 2	» IV	58,82	2
» 8	» » » V	60,63	1,5	» 4	» V	60,53	1
» 12	» » » VI	60,33	1	Juill. 16	» VI	62,09	2
		<u>54 39 0,61</u>				<u>54 39 1,03</u>	

Nous avons donc par α Ursae min. et α Coronae	$\varphi = 54^{\circ} 39' 0,82$
» α Ursae min. s. p. et α Bootis	0,71
» β Ursae min. et α Lyrae	1,12
» β Ursae min. s. p. et α Orionis	0,95
» η Draconis et α Aurigae	1,38
» η Draconis s. p. et α Virginis	0,82

Moyenne générale $\varphi = 54\ 39\ 0,97 \mp 0,07$

La réduction au point trigonométrique est $+ 3,19$ (Voir *Zanucku IX* p. 15), donc :

$$\begin{aligned} & \text{LATITUDE DE NEMESCH} \\ & \text{point trigonométrique} \\ & = \mathbf{54^{\circ} 39' 4,16 \mp 0,07^*}. \end{aligned}$$

*) La latitude préalable, donnée T. I, p. 214 du texte, est trop grande de 1,7. Mais ce défaut n'a exercé aucun effet sur les résultats géodésiques, de l'azimut et des distances des parallèles, donnés dans le texte.

C) Latitudes de l'arc septentrional, entre le Golfe de Finlande et la Mer Glaciale.

Les latitudes préliminaires, employées dans le calcul des azimuts, se trouvent T. II, p. 149.

Dans les travaux sur les latitudes des points astronomiques, situés au nord de l'île de HOGLAND, les instruments suivants ont été employés.

- §. *Cercle vertical de Repsold*, de nouvelle construction, fait en 1851. Le diamètre des divisions de 4' à 4' est de 11 pouces. La lecture se fait à l'aide de deux microscopes qui pointent sur les traits horizontalement opposés. La lunette a une ouverture de 18 lignes avec un foyer de 18 pouces, et un grossissement d'environ 50 fois. L'instrument employé pour la latitude de KILPI-MÄKI, en 1852, appartient à l'État-major Impérial et se trouve maintenant en usage pour les opérations géodésiques du Caucase.
- ⑥. *Instrument des passages transportable*, construit à Poulkova, en 1849, par M. Brauer. Cet instrument appartient à l'Observatoire de Moscou qui nous le cédait pour nos opérations de 1850 et 1851. Une description détaillée de cet instrument remarquable est attendue de la part du directeur actuel du dit Observatoire, M. Schweizer, notre ancien collaborateur à Poulkova. Il suffit de dire ici, que la lunette a un objectif de 30 lignes d'ouverture, une distance focale de 30 pouces, et trois oculaires qui grossissent 60, 90 et 120 fois. L'oculaire le plus fort, de 120 fois, et qui est d'une précision distinguée, a servi dans toutes les observations. L'instrument a été employé, dans le premier vertical, à FUGLENAES en 1850, à TORNEA en 1851.
- §. *Le cercle méridien transportable de Repsold*, cité p. XLIII A, a déterminé les latitudes à l'aide de distances au zénith, en 1850 à FUGLENAES, en 1851 à TORNEA.

Les déclinaisons ont été prises également dans *Airy's Catalogue 1850*.

1. LATITUDE DE HOGLAND, STATION TRIG. E SUR MÄKI-PÄÄLYS.

Cette latitude a été donnée *Introd.* p. XLIII = $60^{\circ} 4' 29''.16$.

2. LATITUDE DE KILPI-MÄKI.

Cette latitude a été déterminée en 1852, depuis le 4 jusqu'au 20 août, par M. Woldstedt, à l'aide du *cercle vertical de Repsold*, §. Il observa, du côté nord, par préférence l'étoile α Ursae min., sous des angles horaires très-variés, comme l'occasion se prêtait, et exceptionnellement β Ursae min., dans le passage inférieur. Du côté sud, M. Woldstedt a observé les étoiles fondamentales α Persei, α Tauri, α Aurigae, α Bootis et α Coronae. Le lieu du zénith sur le cercle fut changé successivement d'environ 45° .

Étoiles du côté nord.

I. Zénith à 359° 56'.

1852. Août	4	α Ursae min.	13 ^h 17 ^m	temps sid.	62° 38' 5,5
		α » »	16 17	» »	4,1
		β Ursae min.	s. p.		6,9
		α Ursae min.	6 ^h 46 ^m	temps sid.	7,1
Août	5	α Ursae min.	1 28	» »	4,3
Août	9	α Ursae min.	10 49	» »	6,0
Août	12	α Ursae min.	12 49	» »	5,6
					Moyenne 62 38 5,64

Étoiles du côté sud.

Août	4	α Bootis	62° 38' 1,6
		α Tauri	4,6
Août	5	α Persei	4,8
		α Tauri	4,9
Août	12	α Bootis	4,7
			Moyenne 62 38 4,72

II. Zénith à 90° 0'.

Août	12	α Ursae min.	15 ^h 59 ^m	temps sid.	62° 38' 5,2
		» »	2 7	» »	5,8
		» »	6 14	» »	5,5
Août	13	α Ursae min.	12 30	» »	5,3
		» »	13 24	» »	5,5
					Moyenne 62 38 5,46

Août	12	α Coronae	62° 38' 4,4
		α Persei	5,4
		α Tauri	4,9
		α Aurigae	6,6
Août	13	α Bootis	4,0
		α Coronae	3,4
			Moyenne 62 38 4,78

III. Zénith à 135° 1'.

Août	15	α Ursae min.	12 ^h 58 ^m	temps sid.	62° 38' 5,3
		» »	16 5	» »	5,1
		β Ursae min.	s. p.		4,2
		α Ursae min.	5 ^h 53 ^m	temps sid.	5,5
Août	16	α Ursae min.	13 22	» »	5,2
Août	17	α Ursae min.	5 41	» »	5,7
Août	18	α Ursae min.	10 4	» »	6,1
		» »	12 18	» »	6,3
					Moyenne 62 38 5,43

Août	15	α Tauri	62° 38' 6,1
		α Aurigae	4,5
Août	17	α Persei	4,8
		α Tauri	5,3
		α Aurigae	5,2
Août	18	α Bootis	5,0
			Moyenne 62 38 5,15

IV. Zénith à 43° 58'.

1852. Août 18	α Ursae min.	16 ^h 12 ^m temps sid.	62° 38' 5,5	Août 18	α Coronae	62° 38' 4,3
	Août 19	α Ursae min.	15 42 » » 5,5		α Ophiuchi	3,4
		β Ursae min.	s. p. 7,0	Août 19	α Ophiuchi	3,8
		α Ursae min.	5 ^h 49 ^m temps sid. 7,1		α Persei	4,3
		» »	7 49 » » 7,5		α Tauri	3,7
	Août 20	α Ursae min.	12 59 » » 7,3		α Aurigae	5,3
				Août 20	α Bootis	3,1
			Moyenne 62 38 6,65			Moyenne 62 38 3,99

Nous avons donc les quatre déterminations

par I	$\varphi = 62^{\circ} 38' 5,18$
» II	5,12
» III	5,29
» IV	5,32
	Moyenne 62 38 5,23

L'accord de ces quatre déterminations accuse pour la moyenne une erreur probable seulement de 0,032. En déduisant l'erreur probable de l'accord des déterminations isolées, dans les différentes mises, avec leurs moyennes respectives, nous la trouvons = 0,076, valeur qui sans doute doit être considérée comme preuve très-satisfaisante de la qualité supérieure de l'instrument employé.

En ajoutant à la moyenne précédente, la réduction = + 0,02 de l'instrument au centre de la station trigonométrique, nous avons

$$\begin{aligned} & \text{LATITUDE DE KILPI-MÄKI} \\ & \text{point trigonométrique} \\ & = 62^{\circ} 38' 5,25 \mp 0,08. \end{aligned}$$

3. LATITUDE DE TORNEA, ÉGLISE DU DISTRICT.

M. Lindhagen observa la latitude, depuis le 27 juin jusqu'au 19 septembre 1851, sur le point A, situé dans une distance d'un quart de verste de l'église. Une opération indépendante fut exécutée pour effectuer la jonction entre A et l'église. L'exposé de cette opération se trouve T. II, p. 52 — 56. L'instrument \S , p. LX, a servi pour l'observation des distances au zénith, à l'aide du cercle divisé et en échangeant la position de l'objectif sur les extrémités du tube. L'instrument \mathcal{G} , p. LX, fut placé dans le plan du premier vertical, pour l'observation d'étoiles zénithales.

a) Latitude déterminée par l'instrument ζ .		Position II de l'objectif.		Moyenne de deux positions de l'objectif.
Position I de l'objectif.		η Ursae maj.		
1851. Juill. 13.....	65° 49' 35,83	Juill. 1.....	65° 49' 36,61	
» 14.....	36,20	» 1.....	36,45	
» 14.....	36,99	» 9.....	35,81	
Sept. 19.....	34,80	» 9.....	36,35	
		» 19.....	36,25	
		» 19.....	35,45	
	<hr/>		<hr/>	
Moyenne	65 49 35,96		65 49 36,15	65° 49' 36,05
α Cygni.				
Juin 27.....	65 49 34,91	Juin 30.....	65 49 35,95	
» 28.....	35,87	» 30.....	36,08	
» 28.....	34,96	Juill. 3.....	35,66	
» 29.....	36,41	» 3.....	35,68	
» 29.....	36,30	» 30.....	37,00	
		» 31.....	35,20	
	<hr/>		<hr/>	
Moyenne	65 49 35,69		65 49 35,93	65 49 35,81
α Lyrae.				
Juin 27.....	65 49 34,02	Juill. 30.....	65 49 36,04	
» 28.....	35,86	Sept. 12.....	36,92	
» 28.....	35,30	» 12.....	37,39	
» 29.....	35,61	» 14.....	37,32	
» 29.....	36,15	» 14.....	36,53	
	<hr/>		<hr/>	
Moyenne	65 49 35,39		65 49 36,84	65 49 36,11
α Coronae.				
Juin 28.....	65 49 34,72	Juill. 1.....	65 49 36,06	
» 28.....	34,62	» 1.....	37,13	
» 30.....	36,22	» 9.....	36,14	
» 30.....	35,68	» 9.....	36,12	
Juill. 14.....	36,39	» 19.....	37,49	
» 14.....	35,21	» 19.....	36,87	
	<hr/>		<hr/>	
Moyenne	65 49 35,47		65 49 36,63	65 49 36,05

γ Aquilae.

1851. Juin 28.....	65° 49' 36,39	Juin 30.....	65° 49' 34,93	
» 28.....	36,90	Juill. 3.....	35,12	
» 29.....	34,82	» 3.....	36,03	
Sept. 15.....	38,57	» 9.....	36,16	
» 18.....	37,21	» 9.....	36,38	
	<hr/>		<hr/>	
Moyenne	65 49 36,78		65 49 35,72	65° 49' 36,25

α Ursae min.

Juin 27 19 ^h 47 ^m t. sid.	65 49 35,17	Juin 30 23 ^h 48 ^m t. sid.	65 49 38,06	
» 29 17 12 »	35,83	» 30 0 19 »	37,95	
» 30 13 59 »	35,86	Juill. 4 13 55 »	35,67	
» 30 14 34 »	36,47	» 4 14 21 »	35,26	
Juill. 10 11 27 »	35,44	» 4 15 0 »	35,53	
» 10 12 24 »	35,68	» 9 11 8 »	35,22	
» 10 13 0 »	36,62	» 9 11 30 »	35,64	
» 13 11 52 »	35,26	» 9 11 59 »	35,32	
» 14 14 22 »	36,10	» 9 12 22 »	35,37	
» 14 14 42 »	35,24	Sept. 9 1 3 »	38,73	
» 14 0 20 »	36,64	» 9 1 38 »	38,32	
» 14 0 49 »	36,46	» 9 2 29 »	38,84	
» 14 1 22 »	36,94	» 11 20 40 »	36,44	
» 17 1 12 »	36,82	» 11 0 8 »	35,61	
» 17 1 34 »	37,00	» 11 0 49 »	36,06	
» 17 2 10 »	36,34			
» 17 2 35 »	36,00			
	<hr/>		<hr/>	
Moyenne	65 49 36,11		65 49 36,53	65 49 36,32

α Ursae maj. s. p.

Juin 29.....	65 49 37,74	Juin 30.....	65 49 37,19	
Juill. 14.....	35,62	Juill. 30.....	35,02	
» 14.....	35,58	Sept. 1.....	33,75	
» 17.....	36,99	» 2.....	33,20	
Sept. 15.....	37,30	» 4.....	35,69	
		» 9.....	35,51	
		» 9.....	34,76	
		» 11.....	35,99	
	<hr/>		<hr/>	
Moyenne	65 49 36,65		65 49 35,14	65 49 35,89

En combinant le résultat fourni par l'étoile polaire avec les latitudes obtenues par η Ursae maj., α Cygni, α Lyrae et α Coronae on trouve $\varphi = 65^{\circ} 49' 36,16 \mp 0,075$.

La combinaison de α Ursae maj. s. p. avec γ Aquilae donne $\varphi = 65^{\circ} 49' 36,07 \mp 0,175$.

Dans ces deux cas l'erreur probable a été déduite par M. Lindhagen de l'accord des valeurs isolées de chaque étoile avec les moyennes respectives. Eu égard à ces erreurs probables nous avons la moyenne générale

$$\varphi = 65^{\circ} 49' 36,14 \mp 0,07$$

quantité qu'il faut augmenter de $+ 8,43$ pour la réduction à l'église du district.

b) Latitude déterminée par l'instrument des passages \odot , établi dans le premier vertical.

M. Lindhagen observa les trois étoiles $\lambda 2$ Draconis, π Draconis et ι Cephei. Les distances au zénith ou les $\varphi - \delta$ observées et réduites à la même époque 1851,0, sont les suivantes:

42 Draconis.			π Draconis.			ι Cephei.		
1851	$\varphi - \delta$		1851	$\varphi - \delta$		1851	$\varphi - \delta$	
Juin 29	21' 17,95		Juill. 31	23' 54,62		Juin 29	24' 32,35	
" 30	17,99		Août 27	55,02		Juill. 30	32,66	
Juill. 2	18,31		Sept. 1	54,82		Sept. 2	32,41	
" 9	17,76		" 2	54,45		" 7	31,96	
" 17	18,00		" 7	54,66		" 9	31,84	
" 31	18,06		" 9	54,74		" 10	32,20	
Août 27	18,20		" 10	54,54		" 11	32,36	
Sept. 7	18,15		" 11	54,77		" 14	32,52	
" 12	18,29		" 15	54,51		" 15	32,51	
" 15	17,88							
Moyenne	21' 18,06 $\mp 0,04$			23' 54,68 $\mp 0,04$			24' 32,31 $\mp 0,06$	
Réduction à l'église du district	+ 8,41			+ 8,41			+ 8,41	
	<u>21' 26,47</u>			<u>24' 3,09</u>			<u>24' 40,72</u>	

Pour deux de ces étoiles, π Draconis et ι Cephei, les déclinaisons suivantes se trouvent dans le catalogue de M. Airy.

	1851,0
π Draconis	$\delta = 65^{\circ} 25' 40,91$
ι Cephei	65 25 3,55

Pour la troisième étoile M. Düllen a déduit des observations faites au grand cercle vertical de Poulkova

$$42 \text{ Draconis} \dots\dots\dots \delta = 65^{\circ} 28' 47,78$$

En ajoutant ces déclinaisons aux distances zénithales correspondantes nous avons

par 42 Draconis	$\varphi = 65^{\circ} 49' 44,25$
» π Draconis	44,00
» ι Cephei	44,27

Malgré l'accord très-satisfaisant de ces trois valeurs il n'y a pas de doute que l'incertitude des déclinaisons, basées pour 42 Draconis et ι Cephei sur un très-petit nombre d'observations, y peut jouer un rôle très-important. Vu que par cette raison il est très-difficile d'assigner même approximativement l'erreur probable de la dernière détermination, nous préférons de nous en tenir exclusivement au résultat fourni par l'instrument \S , tant que les déclinaisons des trois étoiles employées ne seront soumises à une nouvelle recherche soignée. Nous avons donc:

LATITUDE DE TORNEA*)

église du district

$$= 65^{\circ} 49' 44,53 \mp 0,02.$$

5. LATITUDE DE STUOR-OIVI.

Cette latitude, déterminée par M. Selander et M. Agardh, est pour le centre de la station

$$= 68^{\circ} 40' 58,40.$$

Les détails de cette valeur se trouvent T. II p. 73.

6. LATITUDE DE FUGLENAES, TERME SEPTENTRIONAL DE L'ARC DU FINMARKEN
ET DE L'ARC COMPRIS ENTRE LA MER GLACIALE ET LE DANUBE.

M. Lindhagen a déterminé cette latitude, en 1850, en se servant du cercle méridien transportable de Repsold, \S , p. LX, par l'observation des distances au zénith à l'aide du cercle divisé. C'est le même instrument que M. Wagner employa depuis, en 1852, à STARO-NEKRASSOWKA, terme méridional de notre arc total. Pour l'observation dans le plan du premier vertical, M. Lindhagen fit usage de l'instrument des passages de Brauer, \mathcal{C} , p. LX, le même qui a servi en 1851 à TORNEA.

a) Latitude déterminée à l'aide du cercle divisé \S .

Les observations de M. Lindhagen conduisent, avec les déclinaisons puisées dans *Airy's Catalogue 1850*, aux latitudes suivantes:

*) L'indication faite T. II, p. 49, que notre station a été également la station employée par Maupertuis, est erronée. Car le point trigonométrique de Maupertuis a été l'église de la ville, et non pas celle du district.

Position I.		Position II.		Moyenne
γ Draconis.				
1850 Juill. 26....	70° 40' 10,86	Août 7....	70° 40' 10,71	
Août 13....	9,38	» 9....	9,75	
Sept. 21....	10,50	Sept. 22....	9,68	
Oct. 2....	8,63	» 29....	8,85	
» 4....	11,41	Oct. 5....	9,64	
Moyenne	70 40 10,16		70 40 9,73	70° 40' 9,94

β Draconis.				
Juill. 26....	70 40 9,92	Août 7....	70 40 9,84	
Août 13....	8,07	» 9....	9,87	
Oct. 2....	8,88	Sept. 22....	8,64	
» 4....	10,10	» 29....	9,19	
» 6....	10,82	Oct. 5....	9,94	
Moyenne	70 40 9,56		70 40 9,50	70 40 9,53

η Ursae maj.				
Juill. 26....	70 40 12,22	Juill. 29....	70 40 9,46	
Août 13....	9,77	Sept. 29....	9,64	
» 21....	9,69	» 29....	9,91	
Oct. 2....	9,63	Oct. 5....	10,31	
» 4....	8,69	» 5....	10,31	
Moyenne	70 40 10,00		70 40 9,93	70 40 9,96

α Coronae.				
Août 13....	70 40 10,82	Sept. 22....	70 40 11,06	
» 21....	9,60	» 29....	9,33	
Oct. 2....	10,68	Oct. 5....	10,96	
		» 5....	11,31	
		» 6....	9,57	
Moyenne	70 40 10,37		70 40 10,45	70 40 10,41

α Ursae min.

1850 Juill. 21 22 ^h 25 ^m t. sid. 70° 40' 11",29	Juill. 29 13 ^h 12 ^m t. sid. 70° 40' 12",63
» 22 16 3 » 10,95	» 29 14 54 » 12,85
» 22 20 53 » 13,08	» 31 15 11 » 11,90
» 25 19 20 » 13,96	» 31 15 43 » 12,44
» 25 6 3 » 10,91	Août 3 23 42 » 12,34
» 26 12 39 » 12,73	» 3 0 11 » 12,72
Août 9 23 9 » 13,23	» 3 1 14 » 12,74
» 20 7 14 » 14,49	» 6 6 39 » 13,06
» 20 8 18 » 13,60	» 7 23 8 » 13,14
» 21 18 22 » 11,85	» 7 23 38 » 13,40
» 21 8 58 » 12,82	» 9 12 55 » 12,91
» 21 10 4 » 13,03	» 9 16 11 » 12,40
Oct. 2 14 32 » 13,17	» 9 20 49 » 14,46
» 2 16 20 » 14,24	Sept. 22 14 41 » 13,59
» 5 12 54 » 13,38	» 22 16 3 » 13,86
	» 22 16 32 » 14,41
	Oct. 5 14 35 » 12,70
	» 6 16 5 » 12,38
	» 6 16 26 » 11,81
Moyenne <u>70 40 12,85</u>	<u>70 40 12,93</u> 70° 40' 12",89

 α Aurigae s. p.

Juill. 26....70 40 11,65	Juill. 29....70 40 11,39
Août 13.... 11,65	Août 7.... 11,58
» 21.... 12,01	Sept. 22.... 11,76
Oct. 2.... 11,58	» 29.... 12,31
» 6.... 12,21	Oct. 5.... 11,90
Moyenne <u>70 40 11,82</u>	<u>70 40 11,79</u> 70 40 11,80

En partant de ces données on trouve par α Ursae min. combinée avec γ Draconis, β Draconis et η Ursae majoris:

$$\varphi = 70^{\circ} 40' 11,35 \mp 0,07.$$

par α Aurigae combinée avec α Coronae:

$$\varphi = 70^{\circ} 40' 11,10 \mp 0,12.$$

Les erreurs probables étant déduit de nouveau de l'accord des déterminations isolées avec leur moyennes respectives, nous réunissons les deux valeurs précédentes dans le résultat moyen

$$\varphi = 70^{\circ} 40' 11,28 \mp 0,06.$$

La réduction au centre de la station trigonométrique ne s'élève qu'à $-0,05$.

b) Latitude déterminée par l'instrument des passages \odot , établi dans le premier vertical.

M. Lindhagen a déduit de ses observations les distances zénithales méridiennes suivantes:

Distances zénithales méridiennes, réduites au 1 Janvier 1850.

	41 Cephei	ϵ Draconis	β Cephei
1850 Août 3	$0^{\circ} 2' 54,14$		$0^{\circ} 46' 0,37$
» 7	54,06	$0^{\circ} 47' 2,32$	1,05
» 9	54,31		0,67
» 10		2,67	
» 13	54,35	2,56	0,93
» 21	54,26	2,37	1,22
Sept. 22	54,77	2,89	1,77
Oct. 2	54,58	2,59	1,33
» 5	54,58	2,66	1,31
» 6	54,82	2,50	1,31
Moyenne	$0^{\circ} 2' 54,43 \mp 0,06$	$0^{\circ} 47' 2,60 \mp 0,04$	$0^{\circ} 46' 1,13 \mp 0,08$
Réduction au point trigonométrique	$-0,02$	$-0,02$	$-0,02$
$\varphi - \delta$	$0^{\circ} 2' 54,41$	$0^{\circ} 47' 2,58$	$0^{\circ} 46' 1,11$

Une seule de ces trois étoiles, β Cephei, se trouve dans Airy's Catalogue. Nous y trouvons la déclinaison moyenne au 1 Janvier 1850 $\delta = 69^{\circ} 54' 10,33$.

Pour les deux autres étoiles M. Döllén a déterminé à Poulkova, en 1856, les déclinaisons suivantes qui pourtant ne peuvent pas encore être regardées comme valeurs définitives:

Réd. au 1 Janv. 1850

11 Cephei $\delta = 70^{\circ} 37' 17,76$

ϵ Draconis 69 53 9,47

Avec ces déclinaisons nous avons les latitudes

par 11 Cephei $\varphi = 70 40 12,17$

• ϵ Draconis 12,05

• β Cephei 11,44

Moyenne $70 44 11,89 \mp 0,15$.

Ayant basé toutes les autres latitudes de l'arc du méridien exclusivement sur les déclinaisons déterminées à Greenwich, il nous paraît préférable, pour l'uniformité du travail, de ne pas faire concourir, pour le moment, cette dernière détermination dans le résultat pour la latitude de FUGLENAES. Une recherche soignée sur les déclinaisons de toutes les étoiles zénithales observées au premier vertical à STARONEKRAS-SOWKA, à TORNEA et à FUGLENAES est entreprise par M. Döllén à l'aide du grand cercle vertical de l'Observatoire de Poulkova.

Nous avons donc, par les observations faites au cercle vertical \S :

LATITUDE DE FUGLENAES

terme septentrional de l'arc du méridien

= $70^{\circ} 40' 11,23 \mp 0,06$.



EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHES I. A., I. B., I. C.

Ces trois planches contiennent la carte générale des 258 triangles principaux, mesurés entre FUGLENAES, sur l'île de KWAL-OE dans la Mer Glaciale, et STARO-NERRASSOWKA sur le Danube. Les côtés fondamentaux, c. à d. les côtés de triangles primitivement liés aux bases, sont indiqués par des traits plus forts. Il y en a 10, savoir:

le côté Nuppi-vaara	Lodzihjokki	} sur I. A.
» » Pullinki	Avasaksa	
» » Sarvi-kangas.	Linnunsilmä	
» » Mustila	Korsmalm	} sur I. B.
» » Ebbafer	Tammik	
» » Ponedeli	Jakschti	
» » Ossownitza	Leskowitschi	} sur I. C.
» » Montschinzi	Katerinowka	
» » Gwosdauzi	Britschani	
» » Katlabuch	Taschbunar	

Sur I. C. sont encore tracés les 8 triangles auxiliaires qui produisent la jonction des triangles principaux avec les bords de la Mer Noire et qui sont répétés sur la planche II. La méridienne de Dorpat, divisée par degrés, est tracée sur les trois feuilles. L'échelle de la carte générale est $\frac{1}{1300000}$.

PLANCHES II—XVI.

Ces 15 planches représentent, sur l'échelle $\frac{1}{730000}$, les 225 triangles principaux russes qui s'étendent des bords du Danube jusqu'en Laponie. La méridienne de Dorpat est tracée sur les planches II—XIV. Les jonctions des bases, indiquées par des traits plus forts, sont directement données, pour l'arc méridional, en réunion avec les triangles principaux. Cependant, pour plus de clarté, j'ai placé séparément, pl. X, la jonction entre la base de SIMONIS et le côté EBBAFER-TAMMIK, sur une échelle 4 fois plus grande. Pour les triangles de Finlande où, à cause des difficultés du terrain, la jonction des bases était plus embarrassante et compliquée, j'ai donné, pl. XV, les figures plus détaillées de la jonction de la base d'ELIMÄ avec le côté MUSTILA-KORSMALM et de la base d'ULEABORG avec le côté LINNUNSILMÄ — SARVI-KANGAS.

La planche XVI représente:

1. la jonction multiple dans le triangle 224. Voir T. II, p. 49;
2. la jonction entre la station astronomique A, et les deux églises de TORNEA. Voir T. II, p. 52;
3. le triangle 225 avec ses deux stations auxiliaires. Voir T. II, p. 52.

PLANCHE XVII.

Cette planche représente les triangles de Laponie, mesurés, sous la direction de M. Selander, depuis TORNEA jusqu'à BAELJATZ-VAARA.

PLANCHE XVIII.

Sur cette planche la jonction compliquée entre la base d'ÖFVER-TORNEA et le côté principal AVASAKSA-PULLINEI est représentée.

PLANCHE XIX.

Cette planche donne les triangles principaux norvégiens, mesurés sous la direction de M. Hansteen, et la jonction très-compliquée de la base d'ALTEN avec le côté principal NUPPI-VAARA — LODIZHJOKKI.

PLANCHE XX.

Sur cette planche sont représentés les différents signaux construits sur les stations de l'arc Baltique.

PLANCHE XXI.

Elle représente les signaux et échaffaudages, construits par M. de Tenner sur les stations des opérations exécutées entre la Duna et le Danube.

PLANCHES XXII, XXIII, XXIV.

Ces trois planches représentent, par 23 figures différentes, l'appareil de Struve employé pour la mesure des bases, et le comparateur. Voir T. I, p. 40 — 44.

PLANCHE XXV.

Les deux figures de cette planche regardent la compensation de triangles, situés soit entre deux, soit entre trois côtés donnés. Voir I, p. 157 — 165.

PLANCHE XXVI.

L'explication de la Fig. 1 se trouve T. I, p. 245; celle de la Fig. 2 se trouve T. I, p. 322.



ADDITION A, A D P. XL.
COMPARAISONS DE MESURES LINÉAIRES.

TABLEAU DES RÉSULTATS

TIRÉS DES COMPARAISONS ENTRE PLUSIEURS UNITÉS LINÉAIRES FAITES A POULKOVA EN 1850, 1852 et 1853.

Nom de l'étalon.	Longueur exprimée en lignes de la toise de Fortin, celle-ci ayant la température + 13,0° R.	Température de l'étalon déterminé. Réaum.	Erreur probable de la longueur, en unités de la cinquième décimale et relative à :		
			<i>K'</i>	<i>N</i>	Fortin
1. Étalon primitif à bouts <i>N</i>	1728,01249	13°0	36	0	70
2. Copie à bouts <i>N'</i> = <i>P</i>	1727,99440	»	—	19	
3. Copie à bouts, étalon auxiliaire . <i>N''</i> = <i>Q</i>	1727,97405	»	36	22	
4. } Copie à bouts en { 1848 <i>N'''</i> = <i>R</i>	1728,01991	»	—	77	
5. } { 1852 <i>N''''</i> = <i>R'</i>	1727,99355	»	—	32	
6. Échelle provisoire à traits <i>L</i>	1728,60179	»	28	46	
7. Première copie de <i>N</i> à traits <i>K</i>	1728,01629	»	12	38	
8. Seconde copie de <i>N</i> à traits <i>K'</i>	1728,01767	»	0	36	
9. Copie à bouts de la toise de Bessel . . <i>B'</i>	863,99914	»	—	10	
10. La toise de Bessel <i>B</i>	863,99933	»	—	15	
11. Toise à traits sur l'étalon de Vienne . <i>T</i>	863,91726	»	30	35	
12. Copie du Klafter de Vienne <i>W'</i>	840,70342	»	27	32	
13. Le Klafter normal de Vienne <i>W</i>	840,70370	»	34	38	
14. Le Sajène à traits du général Tenner . <i>T</i>	945,75779	»	32	38	
15. Le Double-sajène à points de l'État-major <i>D</i> .	1891,60594	»	72	82	
16. Le premier sajène sur <i>D</i> <i>S</i>	945,79193	»	40	45	
17. Le second sajène sur <i>D</i> <i>S'</i>	945,81486	»	40	45	
18. L'échelle en fer à points de la mesure des Indes <i>J</i>	1351,14398	13 ¹ / ₃	34	44	
19. Le Standard-Scale de la Soc. astr. de Londres, original appartenant à Poulkova &	675,59473	»	45	47	
20. } Les différents pieds de & I	135,11743	»	15	15	
21. } II	135,11987	»	15	15	
22. } III	135,11881	»	15	15	
23. } IV	135,11991	»	15	15	
24. } V	135,11870	»	15	15	
25. } $\frac{1}{3} (II + III + IV) = M$	135,11953	»	10	10	

Nom de l'étalon.	Longueur exprimée en lignes de la toise de Fortin, celle-ci ayant la température $+ 13,0^{\circ}$ R.	Température de l'étalon déterminé. Réaum.	Erreur probable de la longueur, en unités de la cinquième décimale et relative à :		
			F	N	Fortin.
Longueur de 10 pieds des différentes échelles de mesure anglaise et russe :					
26. D'après 18, 10 pieds de l'échelle des Indes ^B <i>J</i>	1351,14398	$13\frac{1}{3}^{\circ}$	34	44	
27. » 15, » » » <i>D</i> $\frac{10}{14}$ <i>D</i>	1351,14710	13.0	51	59	
28. » 19, » » » <i>R</i> $2\frac{2}{3}$ <i>R</i>	1351,18946	$13\frac{1}{3}$	90	94	
29. » 25, » » » <i>R</i> 10 <i>M</i>	1351,19532	$13\frac{1}{3}$	96	100	
30. » 14, » » » <i>T</i> $\frac{10}{7}$ <i>T</i>	1351,08256	13.0	47	54	
31. Règle N° 4 de l'appareil de Schumacher. .	1727,80694	13.0		64	

REMARQUES RELATIVES AU TABLEAU PRÉCÉDENT.

Remarque générale.

Toutes les longueurs sont exprimées en lignes = $\frac{1}{864}$ de la toise de Fortin construite à Paris en 1821 et qui se conserve depuis à l'Observatoire de Dorpat. Je la désigne par *F*. L'autorité de cette toise repose sur le certificat suivant du Bureau des longitudes signé par Arago :

Je sousigné, membre de l'Institut et du bureau des longitudes certifie, avoir comparé la Toise en fer construite par Fortin et destinée à Monsieur Struve, à la Toise de Pérou qui est conservée dans les archives de l'observatoire Royal. Les deux toises m'ont paru parfaitement égales; le comparateur dont je me suis servi m'auroit fait connoître une différence de la deuxcentième partie d'un millimètre.

Paris, le 14 Novembre 1821.

Arago.

Voyez *Gradmessung* T. II, p. 400. La deuxcentième partie du millimètre est environ $\frac{1}{400000}$ de la longueur de la toise.

J'avais fait exécuter à Dorpat une seconde toise que je désigne par *H*, terminée d'un côté en un petit cylindre saillant d'acier de 4,0 lignes de diamètre, de l'autre côté en un levier de touche vertical qui marchait sur un arc divisé. La valeur d'une division de cet arc correspondait à 0,00352 ligne. Comme la position de l'index pouvait être lue, à l'aide d'une loupe, jusqu'à la vingtième et même jusqu'à la quarantième partie d'une division, chaque comparaison isolée jouissait d'une précision distinguée. La

comparaison effective entre F et H se fit, en 1828, une fois dans une localité d'une température presque invariable pendant la journée et un peu plus élevée que $13^{\circ}0 \text{ R.} = 16^{\circ}25 \text{ C.}$, une seconde fois dans une autre localité d'une température voisine de zéro. Voici le tableau de ces deux comparaisons, voir *Gradmessung* T. II, p. 406.

		Température
1828 Sept. 10	$H = F - 0,0072$	+ $16^{\circ}45 \text{ C.}$
» 11	- 0,0087	+ 16,90
» 12	- 0,0078	+ 16,75
» 13	- 0,0082	+ 16,95
» 13	- 0,0102	+ 16,98
» 14	- 0,0078	+ 16,12
» 15	- 0,0071	+ 15,36
	Moyenne - 0,00812 \mp 0,00025	+ $16^{\circ}50$
Nov. 4	- 0,0106	+ 1,99
» 5	- 0,0103	+ 2,77
	Moyenne - 0,01045 \mp 0,00047	+ 2,38

La combinaison des deux moyennes conduit à

$$H = F - 0,00816 \mp 0,00025, \text{ à } 16^{\circ}25 \text{ C. (2)}$$

Pour parvenir à la valeur de notre étalon primitif à bouts, désigné par N , il fallait comparer N à $F + H$. Cette comparaison se fit une fois en septembre 1828, simultanément avec les comparaisons de F et H , une seconde fois, en décembre 1828, à une température très-basse:

		Température
1828 Sept. 9	$N = F + H + 0,0245$	+ $16^{\circ}75 \text{ C.}$
» 9	+ 0,0201	+ 16,52
» 10	+ 0,0207	+ 16,63
» 11	+ 0,0183	+ 16,68
» 12	+ 0,0174	+ 17,01
» 12	+ 0,0194	+ 17,08
» 13	+ 0,0199	+ 16,71
» 14	+ 0,0249	+ 16,69
	Moyenne + 0,02065 \mp 0,00065	+ 16,76
Déc. 29	+ 0,02030 \mp 0,00183	- 15,36

Ces deux valeurs conduisent par une simple interpolation à la valeur

$$N = F + H + 0,02065 \mp 0,00065, \text{ à } 16,25 \text{ C. } (\odot) .$$

En combinant les deux équations \triangleright et \odot , nous parvenons au résultat:

$$N = 2F + 0,01249 \mp 0,00070$$

$$= 1728,01249 \mp 0,00070 \text{ lignes de la toise de Fortin, et}$$

c'est le premier chiffre de notre tableau. Dans toutes les autres comparaisons, je n'ai plus fait usage ni de F , ni de H ; mais elles ont été faites soit directement avec N , pour les mesures à bouts, soit avec K' , pour les mesures à traits.

Remarques relatives à 1, 2, 3, 4, 5.

Trois copies ont été faites de l'étalon primitif N , désignées dans le tableau N' , N'' , N''' . J'ai introduit, à côté de N' , N'' , N''' , les synonymes $P = N'$, $Q = N''$, $R = N'''$, qui ont été employés dans les journaux originaux d'observation et de calcul*). Tous ces 4 étalons sont des barres de fer forgé de $1\frac{1}{2}$ pouce carré, mais à des bouts saillants cylindriques en acier trempé et poli. Pour donner les justes valeurs, les barres doivent être supportées à exactement $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de la longueur totale. Voici l'origine et l'usage de ces 4 étalons.

1) N désigne partout l'étalon primitif, construit à Dorpat en 1827. La longueur de N est 1728,01249 lignes de la toise de Fortin. *Gradmessung* T. II, p. 407. N a été directement employé à la mesure de trois bases, savoir à la mesure de la base de Simonis en Esthonie, 1827, et à la mesure des deux bases de Finlande, d'ELIMÄ et d'ULEABORG, en 1844 et 1845. Depuis N n'a pas été éloigné de Poulkova.

2) $P = N'$ a été confectionné à l'atelier de l'Observatoire central en 1850, pour accompagner le nouvel appareil, destiné à la mesure des deux bases les plus septentrionales. En effet $P = N'$ a servi, en 1850, pour la mesure de la base d'Alten, au Finmarken norvégien, et en 1851, pour la mesure de la base d'ÖFVER-TORNEA, en Laponie. En 1852, cet étalon a été envoyé en Bessarabie pour être employé à la mesure de la base de Taschbunar, la plus méridionale de toutes. La même année, 1852, cet étalon a été remis entre les mains du général Wrongschenko pour servir à la mesure des différentes bases des opérations géodésiques de la Russie méridionale, entreprises de la part du Dépôt topographique. Il se trouve à l'époque actuelle, 1859, entre les mains du colonel Wassiliew, dirigeant les opérations trigonométriques qui longent le Wolga.

*) Il y a cependant une exception de cette concordance, savoir dans les journaux manuscrits et les calculs manuscrits de M. Prazmovski et de M. Wagner, relatifs aux opérations de Bessarabie de l'année 1852, où R est nommé N' et P est indiqué par N'' , de sorte que dans ces manuscrits les dits N' et N'' doivent être remplacés par N''' et N' .

3) $Q = N''$ a été confectionné à Poulkova également en 1850, pour servir, dans nos travaux de comparaison, à reproduire la mesure à bouts de deux toises par une échelle à traits, K' , en comparant K' avec $\frac{N+N''}{2}$ et en déterminant $\frac{N-N''}{2}$. Pour ce but, N et N'' ont été divisés en deux moitiés, par une ligne tirée, sur chacun des deux étalons, à mi-chemin entre les deux bouts. Ce $Q = N''$ n'a jamais été employé pour les bases elles-mêmes, mais on le rencontre dans les cahiers et les calculs des comparaisons, des années 1850, 1852 et 1853 *).

4) et 5) L'étalon $N''' = R$ a été construit en 1847, pour accompagner l'ancien appareil des bases en Bessarabie, où M. Sabler devait exécuter la mesure de la base de ROMANKAUTZI, et instruire les officiers topographes présents à pouvoir entreprendre la mesure de l'autre base de Bessarabie, celle de TASCHEUNAR. La longueur avait été trouvée à Poulkova, en 1847, $R = 1728,01991$ lignes, et ce chiffre a été employé pour le calcul de la base de ROMANKAUTZI, mesurée en 1848 par M. Sabler. L'appareil des bases et l'étalon R passèrent, après cette opération entre les mains des officiers topographes qui effectuèrent, à l'aide de cet appareil, en 1849, la mesure de la base de TASCHEUNAR. Plus tard dans la même année, l'appareil avec l'étalon fut remis au général Wrongschenko. Les nouvelles que celui-ci donna depuis à l'Observatoire central, ayant indiqué que l'appareil avait essentiellement souffert en 1849, par un traitement peu soigné: il fut décidé que la mesure de la base de TASCHEUNAR dût être répétée. Ce qui se fit, en 1852, par l'expédition de Bessarabie dirigée par M. Prazmovski. En considération de ce qu'avec la détérioration de l'appareil, une altération de la longueur de l'étalon pût avoir eu lieu, l'étalon $P = N'$ accompagna l'expédition en Bessarabie de 1852. Les comparaisons entre P et R , faites soit à Ismaïl avant la mesure de la base de TASCHEUNAR, soit immédiatement après cette mesure, mirent le changement que l'étalon R avait souffert en 1849, hors de doute. En désignant maintenant la nouvelle longueur de l'étalon N''' par R' , nous avons, par les dites comparaisons, $R' = P - 0,00083 \mp 0,00026$, d'où suit

$$\text{pour 1852, } R' = 1727,99355 \mp 0,00032 \text{ lignes;}$$

ce qui comparé à la valeur

$$\text{pour 1848, } R = 1728,01991 \mp 0,00077 \text{ lignes}$$

donne le raccourcissement qu'a éprouvé l'étalon en 1849:

$$R - R' = 0,02636 \mp 0,00083 \text{ lignes.}$$

*) La comparaison entre Q et N étant une des opérations fondamentales pour l'évaluation de K' , j'ai porté à cette comparaison, ou à la détermination de $N - Q$, tous les soins possibles, ayant perfectionné, en 1853, l'appareil du levier de touche de sorte, que les erreurs de la vis micrométrique qui mesure les petites différences, s'éliminassent par une mesure de répétition sur des portions contigues de la vis. Pour ce but, l'échelle divisée sur laquelle pointe le microscope, avait été rendue mobile. Cet arrangement n'a été fait qu'en avril 1853.

Remarque relative à 6, 7, 8.

Deux barres de fer forgé, de 2 pouces de haut sur 1 pouce de large, supportées, comme les étalons de l'article précédent, à $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de la longueur, ont servi à y établir la longueur approximative de deux toises, par des traits. Ces traits sont placés sur les surfaces de clous d'argent, de 2,6 lignes de diamètre, enfoncés dans le corps de la barre. Les subdivisions de la longueur totale sont également marquées sur de tels clous d'argent. Il s'agissait de diviser les deux toises de sorte qu'un des traits de division correspondit à la longueur de 10 pieds anglais = 1351,14 lignes de la toise, d'assez près pour admettre une détermination micrométrique de la différence. Or $\frac{43}{53}$. 1728 étant = 1350,98, la différence n'est que de 0,16 ligne. Voilà pourquoi j'ai divisé la longueur totale de 1728 lignes en 5 portions égales, et puis la quatrième des portions en 11 parties. Les $\frac{3}{5} + \frac{10}{55}$ donnent les $\frac{43}{53}$ requis.

6 et 7) Les deux dimensions L et K sont tracées sur les mêmes clous d'une seule barre et entre les mêmes lignes parallèles. La longueur L , préalablement comparée à N , donnait par la circonstance qu'elle surpassait N de près de 0,6 ligne, l'avantage de pouvoir tracer, à côté du trait initial de L , un trait auxiliaire sur le même clou et qui devait donner une distance de très-près égale à N , comprise entre ce trait auxiliaire et le trait final. Désignons les différents traits de L par O , I, II, III₀, III₁, III₁₁ = IV et V, et nous avons le trait d'où commence K , soit K_0 , situé entre O et I, mais distant de O seulement de 0,58550 \mp 0,00025. Un autre trait auxiliaire h se trouve sur le clou de III₁₀, du côté de III₉, et distant du trait III₁₀ de 0,28975 \mp 0,00012. C'est l'intervalle entre K_0 et ce trait auxiliaire h , qui représente la longueur approximative des 10 pieds anglais de l'échelle des Indes orientales, désignée par J . La relation définitive entre K et N a été déterminée avec l'intermédiaire de K' . La différence $K' - K$ a été fixée, en 1850, 1852 et 1853, par l'équation $K' = K + 0,00138 \mp 0,00012$, sans variation perceptible avec la température.

8) Une autre barre, de dimensions égales à celle, où L et K sont tracés, porte, entre ses traits extrêmes, la longueur K' correspondante à N . La division en 5 cinquièmes, et de la quatrième de ces portions en 11 parties égales est analogue à celle de L dans la note précédente. A côté du trait III₁₀ et sur le même clou se trouve, dans la direction de III₁₁, le trait auxiliaire h' et la distance entre K'_0 et h' correspond encore à la longueur J . Il y a en outre sur cette barre trois petites divisions auxiliaires qui sont tracées sur de petites plaques d'argent, invariablement réunies au corps de la barre, par un mastic. Chacune de ces divisions donne 10 intervalles de 0,083 = $\frac{1}{12}$ ligne de très-près. La première de ces plaques est fixée sur le milieu de la barre. La seconde plaque se trouve entre III₄ et III₅; la troisième entre III₉ et III₁₀. C'est à l'aide de ces deux dernières divisions auxiliaires que le Klatter de Vienne et les Sajènes de Tenner et de Kater ont été comparés à K' . La relation entre K' et

$\frac{N+K'}{2} = \frac{N+Q}{2}$ était le problème le plus difficile de tous ceux qui entraient dans le cercle de nos comparaisons. Cette difficulté provenait de deux causes. $N+Q$ offrait une étendue de 4 toises, et il fallait avoir une identité presque parfaite dans les températures de $N+Q$, dans toute la longueur, et de K' . En second lieu, la mesure de K' sous les microscopes du comparateur ne demandait que peu de minutes; mais l'arrangement de $N+Q$, pour l'observation micrométrique, était une opération compliquée d'une demi-heure au moins, et réclamait 4 individus actifs. Cette dernière circonstance a dû élever tant-soit-peu, mais toujours d'une quantité sensible, la température de $N+Q$, et produire une trop petite valeur de $K' - \frac{N+Q}{2}$, dès que les deux opérations, de la mesure de K' et de $\frac{N+Q}{2}$, se succédaient sans interruption, même si avant les opérations les températures de K' et de $N+Q$ avaient été sensiblement identiques. Ce n'est qu'en 1853 que j'ai réussi à vaincre entièrement ces difficultés graves, après avoir choisi pour local de travail la partie centrale de la salle du milieu de l'Observatoire, séparée pour ce but, de la partie extérieure, par une double rangée de coulisses, appliquées aux passages entre les piliers, par lesquels la partie centrale communique avec la partie extérieure. Par cet arrangement, la température de la partie centrale était d'une constance admirable. Mais le plus essentiel, c'était une modification dans l'opération de comparaison. L'arrangement de $N+Q$ sous les microscopes est devenue antérieure à la mesure elle-même, d'un intervalle de plusieurs heures, pour reproduire l'égalisation des températures des pièces qui, pendant ces heures, se trouvaient dans une juxta-position, pour K' et la portion de $N+Q$ à comparer, à une distance, de seulement deux pouces, sur toute la longueur de K' . Les deux mesures de $\frac{N+Q}{2}$ et de K' s'effectuaient, par cette voie, dans le court espace de peu de minutes. La série des opérations définitives, pour trouver $K' - \frac{N+Q}{2}$, fut exécutée depuis le 27 mars jusqu'au 1 avril 1853.

Remarque à 9 et 10.

Le Gouvernement Prussien envoya à Poulkova, en 1852, une copie B' de la toise de l'Observatoire de Königsberg B , employée par Bessel dans ses expériences du pendule et dans sa mesure de degrés, toise qui depuis a servi d'unité pour toutes les opérations géodésiques de Prusse. Cette copie B' , en fer avec des boutons saillants en acier poli, est presque exactement égale à la dite toise de Bessel (B^*), la

*) Quant à la différence $B - B' = 0.00019$ ligne, elle a été déterminée à Berlin, une fois par M. le général Baeyer avec l'assistance de l'artiste M. Baumann, une seconde fois par feu M. Busch, alors directeur de l'Observatoire de Königsberg, avec l'assistance du même artiste. Tous les deux se servirent du même comparateur de Baumann, qu'avait employé Bessel dans ses travaux pour fixer l'unité linéaire de Prusse. D'après les renseignements donnés de la part de M. Baeyer à M. Tenner, l'erreur probable du résultat $B - B' = 0,00019$ ligne n'est que de $\mp 0,00011$ ligne. C'est par ce chiffre que se déduit, pour $B = 863,99933$, dans notre tableau l'erreur probable $= \sqrt{(10^2 + 11^2)} = 0,00015$ ligne.

différence étant $B - B' = 0,00019$, d'après l'inscription gravée sur B' . Ce B' a été directement comparé à N , à l'aide d'une toise auxiliaire H , à l'un bout fixe et à l'autre bout pourvu d'un levier de touche. La comparaison a été effectuée en déterminant alternativement $B' - H$ et $N - (B' + H)$.

Remarque à 11, 12, 13.

L'étalon en fer, envoyé à Poulkova de la part du gouvernement Autrichien, porte deux mesures, la copie W' du Klafter de Vienne et une toise $\overset{\circ}{T}$. Ces mesures sont données par des points marqués sur trois lames d'argent, enfoncées dans le corps de l'étalon. Les points sont de forme très-régulière et admettent une observation précise. Le Klafter normal de Vienne W est $= W' + 0,00028$ ligne par., d'après le certificat donné à Vienne, le 18 avril 1849, par M. S. Stampfer, certificat vérifié de la main de M. J. Prechtl, directeur de l'institut polytechnique, et de la main de M. J. Bebiska, vice-directeur.

Remarque à 14.

T est l'étalon du Sajène russe, en fer, à traits sur argent, dont le général Tenner s'est servi pour déterminer les longueurs des 4 règles en fer qui forment l'appareil, à l'aide duquel il a mesuré, depuis l'an 1816 jusqu'à l'époque actuelle, les différentes bases de ses vastes opérations géodésiques. La relation de T à la toise de Fortin avait été évaluée à Dorpat, en 1828, par M. Tenner et W. Struve, $T = 945,7664$ lignes*). La différence entre l'ancienne détermination de 1828, et la détermination définitive, faite à Poulkova en 1852, par des moyens incomparablement supérieurs, $T = 945,75779$ n'est que de 0,00831 ligne ou $\frac{1}{113800}$ de la longueur, et prouve que l'ancienne comparaison avait très-bien réussi, en considérant les moyens dont nous avons disposé en 1828. Le corps de T est composé de deux règles invariablement réunis sous un angle droit, par une multitude de vis, et par là d'une rigidité extrême. Dans les comparaisons, T reposait toujours sur $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de sa longueur.

Remarque à 15, 16, 17.

Le Double-sajène en fer de l'État-major Impérial a été construit, vers 1832, par Dollond à Londres, sous la direction de Kater; voir: *H. Kater, An account of the construction etc. of standards for the Russian Government. London 1832.* Dans nos expériences, le corps a été supporté en $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de sa longueur. La somme des deux sajènes isolés $S + S' = 1891,60679$ lignes est plus grande que le Double-sajène pris entre les points extrêmes, $D = 1891,60594$ lignes de 0,00085 ligne. C'est que le

*) Mémoires de l'Académie, VI^{me} série, Vol. II p. 414.

point du milieu dévie considérablement de la ligne droite qui joint les points extrêmes, dans les deux sens, horizontal et vertical.

Remarque à 18.

Cet étalon, transporté en 1847 de Londres à Poulkova, et reconduit en Angleterre en 1850, est le standard *B* de la mesure des Indes-orientales, exécutée par M. le Colonel Everest. Il avait été comparée à l'autre standard *A*, employé aux Indes à la mesure des bases et qui y est resté. D'après les deux séries de comparaisons entre *B* et *A*, faites en 1834 et 1835 à DEHRA-DUN, $B - A$ est $+ 0,0000459$ pouce angl. = $0,00052$ ligne par.; voir: *Everest Account of the measurement of two sections of the meridional arc of India. London 1847*, p. 435 et 436. D'où suit $J = 1351,14346$ lignes.

Remarque à 19 — 25.

C'est le standard Ø (Russia) confectionné simultanément avec le New standard scale of the Royal astronomical Society, dont Baily avait été chargé. Voyez le mémoire de Baily dans les *Memoirs of the astr. Soc. Vol. IX*.

Remarque à 31.

D'après une communication, émanée du Ministère Royal danois des finances, sous la date 1858, Janv. 30, Schumacher avait adopté, pour le calcul préalable de la base de BRAAK, la longueur de cette règle = $1727,7945$ lignes de la toise. La différence qui existe entre ce chiffre et celui du tableau, est $1727,8069 - 1727,7945 = 0,0124$ ou $\frac{1}{139000}$ de la longueur. C'est un accord tout-à-fait satisfaisant, en considérant que les deux comparaisons ont été faites avec deux différentes copies de la toise du Pérou. Cette règle No. 4 de Schumacher se trouve encore à l'époque actuelle, 1859, à Poulkova. Elle sera renvoyée dès que nous aurons appris, de la part des autorités danoises, où l'adresser.



ADDITION B.

RAPPORT DE M. LINDHAGEN

SUR

L'EXPÉDITION AU FINMARKEN NORVÉGIEN DE 1850.

(Voir: p. xxviii de l'Introduction.)

**Rapport adressé à M. le Directeur de l'Observatoire central,
sur l'expédition au Finmarken norvégien, exécutée pendant l'été 1850.****Par D. G. Lindhagen.**

L'expédition avait pour but d'achever les opérations de la mesure de l'arc du méridien, commencées sur le terrain du Finmarken norvégien. En effet, pour prolonger les triangles des opérations russes et suédoises jusqu'à l'extrémité septentrionale de l'Europe, M. Klouman, officier du corps des ingénieurs norvégien, avait recherché et trouvé, dans le courant des étés 1845 à 1847, une suite de stations trigonométriques qui s'étendaient à partir du point le plus septentrional des opérations suédoises jusqu'à FUGLENAES, près de HAMMERFEST; et après avoir construit des signaux convenables, sur toutes les stations, il avait mesuré tous les angles terrestres. Celui qui a étudié les rapports sur la nature de ces régions, comprend aisément, que ces opérations ont été sujettes à des difficultés extraordinaires. Néanmoins, Vous avez déclaré Vous-mêmes, après une inspection soignée des journaux de travail, que le choix des triangles a été heureux et que la mesure des angles présente une exactitude satisfaisante, en considérant les circonstances de l'exécution. Il s'agissait depuis, en premier lieu, de déterminer la longueur d'un côté de nos triangles par la mesure d'une base et par la jonction convenable entre la base et le côté choisi. Secondement, il fallait déterminer à FUGLENAES la latitude et l'azimut d'un côté de triangle qui y aboutissait. Une correspondance avec M. le professeur et commandeur Hansteen, chef des opérations géodésiques de Norvège, conduisit à ce que, conformément à une résolution Royale du 27 décembre 1849, l'exécution des travaux encore à faire fût confiée à M. Klouman et moi. Par suite de cette résolution, la Direction des opérations géodésiques norvégiennes Vous engagea, par un office du 15 févr. 1850, à fournir, de la part de l'Observatoire central, les instruments et appareils requis pour l'expédition intentionnée. Déjà en automne 1849, l'Observatoire central m'avait délégué à Christiania, pour consulter, avec M. Hansteen et les géodètes norvégiens, sur l'arrangement d'une expédition pour le but indiqué. Les résultats de ce voyage Vous ont été présentés, dans un rapport spécial. Par suite des consultations indiquées, M. Klou-

man fut envoyé, en printemps passé, de la part du gouvernement à Poulkova, pour y recevoir, en commun avec moi, les instruments et appareils destinés à l'expédition, et en même temps Vos instructions relatives au traitement de ces appareils.

Pendant le séjour de M. Klouman, nous mesurâmes, sous Vos yeux, une petite base sur le terrain de l'Observatoire. Ce travail nous procura l'avantage d'être devenus familiers avec les qualités et l'usage de l'appareil. Nous étions par conséquent à même d'exécuter depuis la même opération sans direction supérieure. L'appareil, y compris le comparateur, avait été construit, l'hiver dernier, sous Votre direction, par le mécanicien de l'Observatoire, M. Brauer, en général d'après l'idée de l'ancien appareil employé dans les opérations de Russie, mais avec des améliorations essentielles et qui avaient pour but soit une plus grande exactitude, soit une marche plus commode et plus rapide des opérations. Avant d'employer l'appareil à la mesure de la petite base, Vous l'avez examiné et contrôlé en notre présence. En même temps l'étalon qui fait partie de l'appareil fut comparé avec l'étalon normal des opérations de Russie, conservé à l'Observatoire central. Il y a 19 thermomètres qui appartiennent à l'appareil. Ils ont été examinés par M. Klouman et moi, d'après les méthodes que Vous aviez indiquées, pour en fixer les corrections depuis 0° jusqu'à + 30° R.

Les autres préparatifs pour l'expédition, faits à Poulkova, avaient pour but un examen soigné de nos instruments astronomiques, dont voici l'énumération.

1. *Un cercle méridien transportable de Repsold*, destiné à la détermination de la latitude, par l'observation des distances au zénith circomméridiennes des étoiles. Plusieurs améliorations avaient été faites dans cet instrument. Le poids considérable de la partie supérieure mobile de l'instrument produisait une si grande friction dans les moyeux de la partie inférieure et immobile, que le mouvement azimutal était difficile à exécuter. Contre ce défaut un ressort qui supportait l'axe fut appliqué. Un examen minutieux avait démontré, que les vis micrométriques avaient des défauts considérables. Elle furent rejetées et remplacées par d'autres plus parfaites, exécutées dans l'atelier de l'Observatoire. A l'analogie des grands instruments du méridien, il fut arrangé que l'objectif et l'oculaire pouvaient changer de place sur les extrémités du tube, pour éliminer, au moins approximativement, l'effet de la flexion du tube, produite par la pesanteur. L'objectif de 2,1 pouces avait un oculaire qui grossissait 50 fois. Il était à présumer que l'objectif admettait un grossissement plus fort, sans trop diminuer la clarté des images. Cependant l'application d'un grossissement de 80 fois n'eut point de succès, par manque de précision de l'image. Puis j'ai reconnu les erreurs de division, par des lectures microscopiques; et finalement j'ai déterminé les coefficients de flexion, pour les deux positions de l'objectif et de l'oculaire, par la mesure d'amplitudes verticales entre deux lunettes dirigées l'une sur l'autre.

2. *Un Instrument des passages transportable de Brauer*, destiné aux latitudes à déterminer par l'observation des étoiles zénithales dans le premier vertical. Cet instrument était sorti de l'atelier de l'Observatoire peu de temps avant le départ de l'expédition. Il est pourvu d'un appareil de renversement qui se fait avec une telle promptitude, qu'il est possible d'observer le même passage dans les deux positions de l'instrument. Une petite série d'observations de ν Ursae maj., faite au printemps avant mon départ et que je Vous ai présentée, avait donné des résultats très-satisfaisants.

3. *Un Instrument universel d'Ertel*, employé pour déterminer le temps et l'azimut. Avant mon départ, cet instrument a été revu, nettoyé et amélioré dans l'atelier de l'Observatoire.

En outre l'expédition fut pourvue des appareils auxiliaires que voici :

- a. *Deux chronomètres réglés sur le temps sidéral*, Kessels 1297 et Dent 1942;
- b. deux nouveaux *baromètres* de Brauer, comparés avant le départ avec le baromètre de Fortin, puis à Christiania avec le baromètre de Pistor 103, de l'Observatoire norvégien;
- c. un *appareil pour examiner les niveaux*;
- d. une petite *collection d'outils*, et de *matériaux*;
- e. *niveaux de réserve*, *lampes* etc.

A Christiania, les utensiles et instruments suivants furent ajoutés :

- f. 18 *trépieds* en bois pour la mesure de la base et pour l'emplacement du comparateur;
- g. un petit *Instrument universel* de Repsold;
- h. un *héliotrope* de Meyerstein, construction de Gauss;
- i. un *chronomètre* à temps moyen, Dent 2103;
- k. une *boussole* à statif;
- l. un *baromètre*;
- m. une *roulette* à mesure et une chaîne.

Avec ces appareils, notre expédition composée de trois personnes, M. Klouman, l'aide mécanicien M. Lysander et moi, partit de Poulkova le 21 mai n. st. Plus tard, à Christiania, un soldat fut ajouté en qualité de domestique. Le soir du 21 nous nous embarquâmes à Kronstadt à bord du bateau à vapeur anglais, le NEPTUNE, destiné pour Copenhague. Nous y arrivâmes après un trajet de 84 heures, le matin du 25 mai. Bientôt après entra dans le port le bateau à vapeur de poste norvégien, le NORDCAP, sur lequel tout avait été préparé pour nous recevoir, comme il a été le cas également, plus tard, sur les bateaux à vapeur de poste qui longent la côte norvégienne. C'est que le Ministère norvégien de l'intérieur avait donné une ordonnance aux capitaines des bateaux, de faciliter les voyages de l'expédition par les pre-

nières occasions favorables. Nous pûmes aussi transporter tous nos appareils etc. du bord du NEPTUNE à bord du NORDCAP. Une plus grande difficulté se présentait, pour délivrer nos instruments de l'impôt de passage (Sundzoll). Mais l'affaire s'arrangea par l'intercession de l'ambassade suédoise-norvégienne à Copenhague. Le jour suivant, le 26 mai, nous quittâmes Copenhague; le 28 nous arrivâmes à Christiania. Avec la même circonspection, comme ailleurs, on avait arrangé que nos instruments fussent déposés, sans révision de la part de la douane, dans une localité convenable.

Nous restâmes 13 jours à Christiania. Dans cet intervalle, nous fîmes les préparatifs économiques pour la continuation du voyage. En outre, je profitai de ce loisir, pour comparer nos chronomètres et nos baromètres avec ceux de l'Observatoire de Christiania. Sur le désir de M. Hansteen, je fis ouvrir toutes les boîtes de nos instruments, pour être inspectés par lui-même et par plusieurs autres connaisseurs. L'appareil de la base et le nouvel instrument des passages excitèrent un intérêt général. Plus tard, M. Hansteen nous présenta au Ministre de l'intérieur, M. le conseiller d'état Stang, sous l'administration duquel se trouvaient toutes les opérations géodésiques du pays, donc également les opérations qui se rapportent à la mesure de l'arc du méridien. M. Hansteen m'a déclaré à plusieurs reprises, que c'est par l'intérêt que voue M. le Ministre à tout ce qui touche le progrès des sciences, et spécialement à la grandiose entreprise dont l'arc de Norvège forme une portion si importante, qu'il a réussi de faire marcher les affaires de la mesure de l'arc du méridien avec cette promptitude et cette libéralité que Vous avez reconnues avec gratitude à plusieurs occasions. Aussi me crus-je autorisé de lui exprimer oralement ces sentiments de reconnaissance sincère en Votre nom.

M. Klouman, engagé par des intérêts de famille de commencer son voyage par les chemins de terre, quitta Christiania le 8 juin. Nous autres nous nous embarquâmes, le 10, avec tous les appareils et nos malles, à bord du bateau à vapeur le PRINDS CARL, et nous arrivâmes le 16 à Aalesund, où nous passâmes sur un autre bateau à vapeur, le PRINDS GUSTAVE, qui nous conduisit le jour suivant à DRONTHEIM, où M. Klouman nous attendait déjà. Depuis au complet, nous continuâmes notre voyage sur le même bateau, PRINDS GUSTAVE, jusqu'à BOSEKOP sur l'Allenfiord, où nous arrivâmes le 25 juin. La base devait être mesurée aux environs de BOSEKOP. C'est pourquoi l'appareil de la base avec toutes les appartenances fut débarqué et resta ici sous la surveillance de M. Lysander et du domestique. M. Klouman et moi, nous continuâmes notre voyage maritime, avec les instruments astronomiques, jusqu'à HAMMERFEST. Il fallait arranger ici l'érection d'une maisonnette en bois à FUGLENAES, destinée aux observations astronomiques et qui devait être achevée pendant notre absence pour mesurer la base à BOSEKOP. Nous atteignîmes le but de cette visite à HAMMERFEST complètement, en faisant un contrat avec un menuisier qui s'engageait à construire et à placer la dite maisonnette, pendant les trois semaines de notre absence.

d'après les dessins et nos instructions, et aux stipulations arrêtées. Nos instruments furent déposés chez un négociant qui demeurait à FUGLENAES. Ces arrangements faits, nous nous en retournâmes à ALTEN. Par ce retour à BOSEKOP, le 27 juin, notre voyage par mer touchait à sa fin, le 17^{me} jour depuis notre départ de Christiania. L'impression que ce voyage a fait sur nous, n'a pas été des plus agréables. On sait que la côte occidentale de Norvège forme un archipel aussi laid et uniforme, que l'intérieur du pays est beau et varié. Cette seule circonstance a dû rendre notre long voyage un peu fatigant. Ajoutons encore un temps mauvais et orageux avec ses suites désagréables pour tous ceux qui ne sont pas habitués à la mer. Il paraît, d'après nos expériences ultérieures, que ce voyage avait été destiné à préparer notre patience à supporter ce qui nous attendait encore.

Notre première occupation à ALTEN était de chercher un terrain convenable pour la mesure de la base. Il faut remarquer ici que d'après les renseignements de M. Klouman qui avait travaillé, pendant 7 ou 8 étés, à la levée du Finmarken, et avait acquis une connaissance détaillée du pays, les bords de l'Altenfiord présentent le seul endroit, où la mesure d'une base soit possible en Finmarken. Ne pouvant employer que peu de semaines pour la mesure d'une base, il nous fallait choisir un terrain qui ne réclamait point de longues préparations, afin de pouvoir, comme il était prescrit, terminer cet été les opérations du Finmarken. Pour ce but, il fallait, selon notre avis, que le terrain fût aisément traitable, d'une étendue suffisante, et convenablement situé pour la jonction à faire entre la base et les triangles. Déjà lors de ma visite à Christiania, en automne 1849, M. Klouman avait proposé, pour terrain de la base, les collines sablonneuses et couvertes de sapins, qui s'étendent à l'est de BOSEKOP. La reconnaissance effective démontra cependant que ce terrain ne pouvait devenir praticable qu'après une longue et coûteuse préparation. Car il fallait non seulement abattre la forêt le long de toute la ligne, mais ôter encore le gazon épais, formé par la bruyère et d'autres plantes ligneuses. L'étendue de la base qui pouvait être mesurée ici, était d'environ 1200 toises, et la première station à choisir, pour effectuer la jonction avec les triangles, se trouvait à une distance de 3500 toises (6,5 verstes). Les difficultés indiquées du terrain nous engagèrent à rechercher un autre terrain. Nous le trouvâmes bientôt. L'Altenfiord se termine du côté méridional, dans un petit golfe, nommé RAFSBUNDEN, et qui entre plus profondément dans le terrain. La rivière Alten se jette dans ce golfe, et la côte méridionale du golfe est longée, de l'est à l'ouest, par les collines de sable dont j'ai parlé, dans une distance décroissante. Une plaine sablonneuse s'est formée entre les collines et la mer. Cette plaine est sur 500 toises, donc en majeure partie, sans aucune végétation. Une autre portion en est couverte d'une forêt. Cette circonstance accéléra la marche de notre travail. Nous pouvions commencer la mesure effective sur la portion libre du terrain, et faire préparer simultanément le reste. La base offrait encore l'avantage essentiel que l'angle opposé à la base, du pre-

mier triangle, était moins aigu. Mais pour ne rien perdre sur la longueur de la base, il y avait encore un nouvel obstacle à vaincre. C'est que l'eau du golfe coupe le terrain, vers l'extrémité occidentale, et s'étend jusqu'aux pieds des collines sablonneuses. Heureusement la basse mer mettait cette portion du terrain à sec, ce qui nous indiqua la possibilité de la mesurer pendant la basse marée. Convaincus ainsi que le terrain ne présentait point de difficultés insurmontables, nous le choisîmes définitivement et procédâmes immédiatement à l'exécution des opérations. Après avoir tracé la ligne par des jalons, nous commençâmes les autres préparatifs. Puis, les deux termes de la base furent marqués durablement et avec précision, par des blocs de granit enfouis dans le terrain de manière, que la partie supérieure sortit du terrain de 8 pouces. Dans chacun des blocs un trou cylindrique fut foré, dans lequel entra un boulon de fer. Ce boulon fut scellé par du plomb. Finalement un petit trou vertical fut travaillé dans le boulon, pour recevoir une épingle dont l'axe indiquait, avec une précision plus que suffisante, l'extrémité de la base. Nous appellâmes nos deux termes d'après les maisons les plus voisines, savoir le point oriental *TERME ELVEBAKKEN*, l'autre *TERME BUGTEN*. Suivaient les comparaisons des 4 règles de mesure avec l'étalon et les autres rectifications de ces règles. Ces travaux se faisaient dans la grande salle de la maison principale de *BOSEKOP*, salle située vers le nord et qui offrait, par la constance de la température, une pièce plus propre au but, que nous n'avions espéré de trouver.

Après avoir terminé tous les préparatifs, nous procédâmes à la mesure effective de la base. *BOSEKOP* étant éloigné de 6 verstes du terrain de la base, nous étions forcés de changer de domicile. Un médecin d'Allengard, M. le Dr. Klingenberg, eut la complaisance de nous recevoir dans sa maison, pour tout le temps de la mesure. Nous lui sommes, en outre, obligés, pour une assistance personnelle dans notre mesure. Les travaux de cette mesure furent ordonnés le plus méthodiquement possible, afin de combiner la plus grande sûreté des opérations avec un progrès rapide. Les individus employés étaient les suivants.

- 1 et 2. M. Klouman et Lindhagen, nous avions à diriger les règles et à faire les lectures des divisions. Les deux journaux de lectures furent comparés pour chaque règle.
3. M. Lysander, placé à la lunette du théodolite de Christiania, pour aligner les règles.
4. M. Klingenberg s'était chargé de diriger le transport des règles et l'emplacement des trépieds.
- 5 — 8. Quatre hommes employés pour transporter les règles et pour placer les trépieds.

Le 5 juillet, à 6½ heures du soir, la première perche fut placée, en partant du terme d'*ELVEBAKKEN*. Le 9 juillet nous atteignîmes à peu près le milieu de la base, par la 294^{me} perche. La fin de cette perche fut soigneusement marquée sur le terrain, pour gagner le moyen de contrôler notre mesure par une jonction trigonométrique des deux moitiés. Ce point est nommé dorénavant point du milieu de la

base. Le 15 juillet, à 8 heures du soir, la dernière perche, la 577^{me}, fut placée et l'excédant, d'une toise environ, entre la fin de cette perche et le terme de БУГТЕН, fut mesuré. Chaque perche étant de 2 toises, nous avons la longueur de la base = 1155 toises, en nombre rond. L'opération de notre mesure avait été interrompue plusieurs fois, le 6 juillet par une pluie qui continuait pendant toute la journée. Le 9 nous rattrapâmes ceux qui préparaient le terrain, ce qui nous fit perdre une journée. Si je puis prétendre, que nos opérations s'exécutaient dans le meilleur ordre, avec calme et sans trouble, il faut cependant faire une restriction. En effet le calme des opérations a été très-souvent interrompu par nos détestations bruyantes des cousins qui sont les vrais révolutionnaires du Finmarken. Le soir du 12 juillet la mesure fut terminée et nous reconduisîmes nos perches à БОСЕКОН, pour effectuer, les jours suivants, une nouvelle comparaison entre les perches et l'étalon. Les résultats de cette comparaison sont entièrement satisfaisants, par l'accord qui se trouve dans les deux comparaisons, faites avant et après la mesure de la base. Dans les premières, la température moyenne avait été de 15°1 C., dans les comparaisons postérieures à la mesure de la base, elle avait été + 15°8 C. La moyenne + 15°45 C. est de 0°80 plus basse que la température normale + 16°25 de l'étalon. La température moyenne des perches, durant la mesure de la base, était + 15°00 C., ou de 1°25 inférieure à la dite température normale.

Après avoir terminé de la sorte tout ce qui se rapporte à la mesure de la base, il nous restait à exécuter la jonction trigonométrique, entre la base et les triangles principaux, et à faire les observations astronomiques sur l'extrême point septentrional de Parc terrestre. Le temps étant, dans ces régions, sujet en été à de fréquents changements, nous résolûmes de nous séparer immédiatement, pour entreprendre simultanément les deux travaux, dont chacun réclamait un temps considérable. M. Klouman se chargea du travail pénible, d'exécuter seul les opérations trigonométriques qui devaient produire la jonction de la base avec les triangles principaux. Nous étions cependant convenus de réunir nos efforts, dès qu'il aurait terminé la mesure sur les autres stations, pour la mesure des angles sur les stations de la base, stations qui réclamaient des réductions au centre plus exactes et plus compliquées. Les consultations, faites avant de nous séparer, conduisirent en outre à ce résultat, qu'il fallait relier la base au côté principal NUPPI-VAARA — LODIZHOKKI. En voici les motifs. En premier lieu plusieurs signaux avaient été endommagés, p. e. celui de HALDI: donc les deux côtés occidentaux HALDI — NUPPI-VAARA et HALDI — KAAVEN ne pouvaient plus être utilisés pour la dite jonction. Nous étions, secondement, convaincus que la jonction serait bien plus facile, si les stations se trouvaient sur le continent et, autant que possible, éloignées de la mer, parce que les sommets des montagnes voisines de la mer sont presque continuellement enveloppés de brouillard. Ce n'est que dans la direction méridionale, que les stations trigonométriques s'éloignent de la mer. Il était peu avantageux d'effectuer la jonction avec le côté BALKIS-OIVI — LODIZHOKKI,

ce côté étant le plus long de tous et presque le double du côté *НУРРИ-ГАЛА — ЛОДИЗЯЮККИ*. Une telle jonction aurait exigé des opérations trop compliquées. Vu qu'il était impossible de fixer d'avance les détails du réseau de jonction, il fallait les remettre jusqu'après une recherche du terrain, entreprise exprès dans ce but. Avant de nous séparer, nous étions cependant d'accord sur les stations voisines de la base à choisir, et nous pûmes arranger l'érection des signaux sur ces stations ainsi que sur les trois stations de la base elle-même.

M. Klouman avait donc, en premier lieu, à faire le voyage de reconnaissance, pour trouver de convenables stations et à ériger en même temps les signaux. C'est pourquoi un nombre suffisant en furent travaillés, destinés à accompagner le voyageur. J'ai l'intention de revenir sur l'expédition de M. Klouman dans les rochers, et je rapporterai maintenant mes propres aventures, après avoir mentionné un petit délassement de notre vie d'affaires sérieuse.

Le bateau à vapeur qui fait les communications entre le Finmarken et le sud, entreprend d'ordinaire, chaque année, une excursion de plaisir au Cap-Nord, éloigné de 13 milles géographiques (90 verstes) de *HAMMERFEST*, point de relâche régulier le plus septentrional. Cette excursion était fixée à l'arrivée du bateau prochainement attendue à *Bosekop*. M. Lysander et moi nous eûmes l'intention de nous rendre par le même bateau à *HAMMERFEST*, car j'avais à faire les observations astronomiques à *FUGLENAES*. M. Klouman devait nous accompagner jusqu'au premier point d'où *ЈЕДКИ* devenait visible. C'était pour ne pas me tromper dans la découverte de ce signal dont j'avais à déterminer l'azimut à *FUGLENAES*. En outre, nous étions incertains si le signal de *ЈЕДКИ* se trouvait bien conservé, n'ayant pas pu décider cette question, lors de notre première visite à *HAMMERFEST*, à cause des brouillards qui régnaient alors. Puis, l'idée nous vint d'accompagner la société qui allait faire la visite annuelle au Cap, et nous crûmes ne pas devoir être trop scrupuleux quant à ce petit voyage de plaisir, en considérant surtout que la perte de temps ne s'élèverait guère qu'à un couple de jours. Le trajet de *HAMMERFEST* au Cap-Nord ne dura que 7 heures. Dans l'admirable soirée du 16 juillet notre société, singulièrement mixte quant aux nationalités et aux langues, escalada le fameux Cap du côté de la mer, et salua de la cime du promontoire, avec musique et libations, le soleil de minuit, visible dans une élévation de $2\frac{3}{4}^{\circ}$ au-dessus de l'horizon. L'autre jour, nous fûmes de retour à *HAMMERFEST*, où M. Lysander et moi nous nous établîmes pour un temps indéfini, mais dans l'espoir que notre séjour ne se prolongerait pas trop. M. Klouman retourna à *Bosekop* et commença son voyage aux rochers le 22 juillet.

À *FUGLENAES* la maisonnette d'observation étant achevée, nous pûmes commencer immédiatement nos travaux. Je dressai un plan de travail que j'ai suivi fidèlement, malgré toutes les adversités que j'avais à essayer. Les observations que j'avais à entreprendre, étaient les suivantes.

1. *Déterminations du temps et de l'azimut.* J'avais l'intention d'atteindre à ce double but, en combinant les observations azimutales de l'étoile polaire avec celles des étoiles fondamentales. L'instrument était placé exactement dans la verticale du point désigné par un boulon de fer scellé dans le roc. Un signal à 4 traverses avait été construit au-dessus de ce boulon, de la sorte qu'un trou foré dans la poutre cylindrique du milieu était dirigé sur le boulon, et que cette poutre fût retenue dans une position exactement verticale. Le pilier pour l'emplacement de l'instrument devant être construit dans mon absence, il n'y avait point d'autre moyen, pour trouver plus tard le point du pilier correspondant au centre de la station, que de prescrire à l'architecte de laisser le signal intact et de construire le pilier en briques, de sorte qu'il entourât la poutre verticale du signal. Après mon retour je fis ôter les traverses du signal et scier la poutre du milieu à la hauteur du pilier. Le centre de la coupe circulaire pouvait être pris pour centre du signal. Afin de n'être pas forcé, pour la détermination du temps absolu, d'observer à la fois deux étoiles, la polaire et une étoile fondamentale, je me servais d'une mire terrestre. Dès que l'azimut de cette mire était fixé, chaque différence azimutale entre la mire et une étoile fondamentale fournissait une détermination du temps absolu. La même mire me servit depuis pour déterminer l'azimut du signal de JEDKI , par la mesure de l'angle horizontal compris entre la mire et le signal. J'ai préféré cette voie à la détermination directe de l'azimut de JEDKI , non seulement à cause de la plus grande facilité, la direction de JEDKI étant assez éloignée de la méridienne, mais surtout parce que ce signal était si rarement visible, que la détermination directe de l'azimut me parût à peu près impraticable. Je choisis pour mire une pierre pointue, placée jadis et pour un but inconnu de l'autre côté du golfe, sur une des cimes qui longent cette côte. La pierre se projetait sur le ciel et admettait, par sa forme régulière, une observation précise. Se trouvant à une distance de 3 verstes, avec une déviation de la méridienne de 9° , elle présentait un objet toujours visible à travers la trappe même de l'Observatoire. Je fis placer une seconde mire, du côté nord, presque exactement dans la méridienne, et éloignée d'une verste. Elle pouvait être illuminée convenablement et était destinée aux observations de nuit. Les angles entre ces deux mires et le signal de JEDKI furent directement mesurés. La mire septentrionale ne fut cependant employée que vers la fin de nos travaux, lorsque les nuits devenaient plus obscures. Pour déterminer les azimuts des deux mires, j'observais la polaire sous différents angles horaires, cependant avec cette restriction que je choisissais pour les dernières observations, destinées à compléter la série totale, de tels temps, que l'influence d'une erreur, soit dans l'ascension droite soit dans la déclinaison de l'étoile polaire, s'éliminât de très-près. J'avais fixé que le *minimum* de mon travail devait être de 20 mises complètes d'observations de la polaire, telle mise étant composée de deux pointages sur l'étoile pour chacune des deux positions de l'instrument. J'ai même dépassé ce minimum. Quant à la détermination du temps, il n'était pas indispensable, sous cette grande

latitude, de la restreindre à de petits azimuts. Cependant, la construction de l'observatoire ne permettait pas de dépasser une certaine limite, d'où se formait la règle d'observer les étoiles fondamentales dans des angles horaires compris entre les limites de ∓ 10 minutes de temps. Cette restriction donnait encore l'avantage que, pour trouver les étoiles, je pouvais me passer de tables auxiliaires calculées. Cet avantage était d'autant plus important, que la saison défavorable (j'en parlerai plus bas) me força d'employer, pour la détermination du temps, un nombre assez considérable d'étoiles. Par les nuits souvent très-fraîches, nos chronomètres étaient exposés à des températures assez basses et qui en détruisaient la régularité de la marche. Par cette raison, mes déterminations du temps absolu ont été plus fréquentes qu'ailleurs; c. à d. j'ai déterminé chaque jour la correction des chronomètres et même à deux reprises le jour. L'instrument universel d'Ertel, employé dans ces observations, ne répondit d'abord pas entièrement à mes attentes. Dans les premières observations, l'instrument paraissait sujet à une grande variabilité, énoncée par un chancellement de l'axe vertical qu'indiquait le niveau, et par un considérable changement de relation entre les deux cercles, du limbe et des verniers. Il paraissait difficile de remédier à ces deux défauts par les moyens qui étaient à notre disposition. La cause du premier défaut était évidemment dans la circonstance que l'axe vertical était trop soulevé par le ressort d'en bas, tandis que le second défaut ne pouvait provenir que d'une friction trop considérable dans l'endroit où le moyeu du cercle divisé embrasse l'axe vertical auquel le cercle des verniers est réuni. Un abaissement de l'axe aurait augmenté la friction, comme l'essai le prouva. Par suite de cet état de l'instrument, les premières observations sur l'azimut de la mire méridionale étaient peu satisfaisantes. Ayant fait décomposer l'instrument par M. Lysander, je parvins à découvrir l'origine de la friction augmentée, dans le fait que, lors de la dernière révision de l'instrument à Poulkova, l'action du ressort circulaire qui supporte le cercle divisé, avait été augmentée d'une manière nuisible, en le plaçant sur un anneau d'acier. Dès que cet anneau était ôté, et après avoir huilé de nouveau les différents endroits de contact, l'instrument réuni de nouveau donnait des résultats pleinement satisfaisants*).

2. Détermination de la latitude, à l'aide du cercle vertical de Repsold. Il ne s'agissait pas

*) Nous avons sous nos yeux 13 mises calculées d'observations sur l'azimut de la mire méridionale. De ces mises 7 ont été faites avant d'ôter l'anneau, les 6 autres après l'avoir ôté. L'azimut est:

par les 7 premières mises $9^{\circ} 34' 56,7 \mp 0,96$

» » 6 dernières » $9 34 58,9 \mp 0,36$,

et les erreurs probables d'une mise isolée sont $2,56$ et $0,88$. On voit, qu'après avoir ôté l'anneau, l'exactitude de l'observation est triplée. On conviendra sans doute que la détermination d'un azimut à $\mp 0,36$ près, sous la latitude de $70^{\circ} 40'$, fait prouve soit de la qualité de l'instrument, soit de l'intelligence de l'observateur.

Struve.

seulement de l'amplitude entre FUGLENAES et le point le plus méridional de l'arc norvégien, mais de la latitude absolue de ce terme septentrional de l'arc total. Voilà pourquoi l'astronome avait à arranger ses observations sur un plan, qui faisait disparaître les erreurs constantes de différente origine. Les sources de ces erreurs sont dans les positions des étoiles, dans les bases du calcul de réduction (temps absolu, réfraction) et dans la nature de l'instrument. Quant aux positions des étoiles, Vous m'aviez indiqué, avant mon départ, que Vous Vous étiez proposé, de faire déterminer à Poulkova, à l'aide du grand cercle vertical d'Ertel, les déclinaisons de toutes les étoiles, dont on s'était servi dans le courant des opérations de Russie, de Suède et de Norvège. Pour diminuer l'effet de l'incertitude dans les déclinaisons, je choisis un plus grand nombre d'étoiles. Une erreur constante, dans l'ascension droite et dans le temps absolu, ne peut exercer qu'une influence comparative-ment minime, et qui est évanouissante dans les observations circomméridiennes des étoiles. Il en est autrement dans les observations de l'étoile polaire sous de grands angles horaires (près de 90° et 270°). Mais, dans ce cas, rien n'empêche de choisir les angles horaires de sorte, que l'effet des erreurs constantes disparaisse dans la moyenne. On pourrait douter de ce que, dans ces grandes latitudes et dans un état de l'atmosphère essentiellement différent, par l'humidité, de celui de l'Europe moyenne, la réfraction suive exactement la loi sur laquelle les tables de réfraction sont basées. Si une différence de ce genre existe réellement, il est évident que l'effet en disparaît pour une latitude, déterminée par deux étoiles qui passent par le méridien dans d'égales distances au zénith et sous d'identiques conditions atmosphériques. Les erreurs qui proviennent de l'imperfection de l'instrument lui-même, sont en tout cas les plus compliquées. Quoique nous ayons tâché de diminuer au possible les sources d'erreurs de cette espèce, par des améliorations dans la construction de l'instrument, par l'examen de la division et par la détermination du coefficient de flexion, il reste toujours des sources d'erreurs possibles, au nombre desquelles on peut compter une certaine incertitude dans la valeur et dans la loi de la flexion, et l'effet variable, pendant l'observation elle-même, de la chaleur rayonnante sur les différentes parties de l'instrument. Ces considérations me guidaient dans le choix des étoiles à observer. En premier lieu, l'étoile polaire devait être observée près de ses deux passages qui se font dans des distances au zénith de $17^\circ 50'$ et de $20^\circ 49'$. Mais, pour augmenter le nombre des déterminations, il fallait l'observer aussi sous d'autres angles horaires. Puis, je choisis trois étoiles qui présentaient, en passant le méridien du côté sud, une moyenne des distances au zénith égale à celle du pôle, du côté nord. C'étaient les étoiles η Ursae maj. $z = 20^\circ 36'$, β Draconis $z = 18^\circ 15'$, et γ Draconis $z = 19^\circ 9'$. La moyenne de ces z est $19^\circ 20'$, chiffre identique avec le complément de la latitude de FUGLENAES = $70^\circ 40'$. Je m'étais proposé de faire 30 mises d'observations de la polaire et dix mises de chacune des trois autres étoiles. D'un côté je comptais gagner, par l'égalisation du nombre d'observation, un poids égal dans les latitudes obtenues des deux côtés du zénith, et par le nombre de

trois étoiles j'espérais contrebalancer l'avantage que présente la polaire en ce que le lieu de l'étoile s'élimine dans le résultat. En second lieu, l'incertitude dans la réfraction et dans le coefficient de la flexion devait disparaître du résultat, dès que les observations des deux genres avaient été faites sous des circonstances atmosphériques à peu près identiques, ce qui effectivement avait lieu. J'avais primitivement l'intention d'observer encore 4 étoiles dans des $z = 40^\circ$ et $z = 60^\circ$, savoir deux de chaque côté du zénith, pour mieux reconnaître la différence entre les latitudes des deux genres. Mais je me vis forcé, par manque de temps, de renoncer à ce plan plus étendu et de restreindre mon travail à l'observation de α Coronae $z = 43^\circ 27'$ du côté sud, et de Capella, pass. inf., $z = 63^\circ 30'$. J'eus le bonheur d'exécuter mes observations, strictement d'après ce plan. Dans la moyenne des observations de la polaire, l'élimination intentionnée des sources d'erreurs n'est cependant pas complète. La raison en est, que j'avais terminé l'observation de la polaire avant d'achever celle des autres étoiles, et que, pour ne pas renoncer à la simultanéité des observations, faites des deux côtés du zénith, je continuais d'observer la polaire dans des temps commodes. L'instrument était placé, sur un pilier en briques, au nord du signal. Les qualités distinguées de cet instrument, reconnues dans les travaux antérieurs, furent confirmées par ces nouvelles observations.

3. *Latitude* déterminée dans le premier vertical, à l'aide de l'instrument des passages. Il s'agissait ici de la latitude absolue. Voilà pourquoi j'avais à choisir, en premier lieu, des étoiles bien déterminées, et qui passaient très-près du zénith. Avant mon départ de Poulkova, j'avais pensé aux deux étoiles β Cephei et α Draconis. Mais je n'ai pas pu observer la seconde étoile, parce que le passage avait lieu trop près de midi et qu'elle était, à cette heure, invisible dans l'instrument. Par cette raison, j'ajoutai deux autres étoiles, choisies de l'*Uranographie* de M. Argelander, savoir ϵ Draconis et une étoile de la constellation du Céphée, de 5^me grandeur, et indiquée dans mon journal comme *Anonyma Cephei*. Voici la liste des trois étoiles observées:

	Dist. zén. au mérid.	Intervalle entre les deux passages
β Cephei	$0^\circ 46'$	$2^h 12^m$
ϵ Draconis	$0 46$	$2 12$
<i>Anonyma Cephei</i>	$0 3$	$0 34$

En considérant les qualités de l'instrument, je jugeai que 8 observations de chaque étoile suffisaient. Je parvins à 10 observations. L'instrument était placé sur un pilier maçonné au NOu. du centre de la station. Pour les deux instruments excentriquement établis, j'ai déterminé la distance et la direction, relatives au centre de la station. En tant que je pouvais juger par la marche des observations, avant d'avoir fait le calcul, l'instrument ne laissait rien à désirer sous tous les rapports.

Après avoir exposé le plan et l'histoire générale de mes travaux, il me reste à mentionner plusieurs circonstances extérieures des travaux de FUGLENAES.

FUGLENAES et HAMMERFEST sont situés sur KVAL-OE, île située entre les latitudes $70^{\circ} 30'$ et $70^{\circ} 43'$, en s'étendant jusqu'à 22 verstes dans la direction de la méridienne et à 15 verstes dans celle du parallèle. A l'analogie des SKÅRS de Norvège, elle forme un amas de rochers parmi lesquels il y a des sommets qui s'élèvent jusqu'à la hauteur de 1300 pieds, p. e. notre station trig. TYVFIELD, le point dominant de l'île et peu éloigné de HAMMERFEST. La végétation a presque cessé sur l'île et il n'y a qu'un peu d'herbe dans les vallées couvertes contre les vents. Il s'en suit que dans le nourrissage des hommes et des animaux domestiques le sol n'est pour rien. La pêche et le commerce de poissons fournissent sur ces îles, où les rennes ne viennent pas, les seuls moyens d'existence, et en général les sources du bien-être pour le Finmarken. On serait tenté de croire que les gens vivent ici très-mesquinement. C'est bien le cas pour les natifs du pays, les Lapons. Quant aux autres habitants, il en est tout autrement. Les négociants et les employés vivent à leur aise, et même dans un luxe que l'on rencontre rarement dans des régions bien plus favorisées par la nature. Certes, le raisin ne croît pas ici, mais on trouve le suc des raisins, le vin, dans une telle abondance, qu'on est tenté de croire qu'il suit une attraction polaire de grande intensité. Après avoir mentionné cette circonstance, dans l'énumération des conditions extérieures de nos travaux astronomiques, il faut bien ajouter qu'elle n'a jamais produit, pour nos observations, des erreurs, ni constantes ni accidentelles. La ville de HAMMERFEST, où se concentre la population de l'île (car sur les côtes on ne rencontre que des huttes isolées), compte 700 habitants et est située sur la côte occidentale, dans le coin SOu. d'un petit golfe qui entre de 1,5 verste dans le terrain. Ce golfe est couvert, du côté de la mer, par des îles, et offre un port dans lequel environ 300 navires à voiles entrent annuellement. Le golfe est entouré de montagnes. Le bord oriental offre cependant une petite plaine, où la ville se trouve. Du côté NOu. une langue étroite et plate et qui porte le nom de FUGLENAES, avance dans le golfe. Sur l'endroit dominant de cette langue, le terme septentrional de notre arc se trouve, sous $70^{\circ} 40'$, dans une élévation de 45 pieds au-dessus de la mer. C'était bien un peu gênant que notre demeure à HAMMERFEST était éloignée de FUGLENAES d'une verste par mer, de deux verstes par le chemin de terre, surtout en considérant les fréquents et brusques changements dans l'état de l'atmosphère. A l'exception des deux dernières semaines, nous n'eûmes pas une seule fois un ciel clair pendant 24 heures consécutives. D'après l'opinion des habitants, une belle journée était celle qui présentait des heures entremêlées claires et couvertes. Dans ces circonstances, l'observateur se trouvait engagé à faire la promenade entre la demeure et l'observatoire, à chaque changement atmosphérique, ou de passer des journées entières sur un roc désert. Au commencement je préférais les promenades, plus tard je résolus

de rester à l'observatoire. Il se peut qu'au commencement j'ai perdu quelques heures claires isolées. Cependant je suis persuadé, que je n'ai jamais manqué de profiter d'un ciel clair qui continuait pendant deux heures. Une suite des plus désavantageuses de l'inconstance du temps se prononçait dans ce que les observations à faire à des temps fixes, ne réussissaient que rarement. Les observations de l'étoile polaire, pour déterminer la latitude et l'azimut, pouvaient être faites sous tous les angles horaires, et j'en rassemblais bientôt un nombre suffisant. Il en était de même quant à la détermination du temps absolu; car j'avais le choix parmi le grand nombre d'étoiles fondamentales. De l'autre côté, j'avais bien des troubles pour les passages des étoiles choisies pour le premier vertical, et pour le petit nombre d'étoiles fondamentales qui devaient être observées au cercle vertical, pour fixer la latitude. Ces remarques se rapportent aux 5 premières semaines du séjour à HAMMERFEST, pendant lesquelles j'eus le bonheur d'attraper de temps en temps quelques observations. La période suivante me désespérait complètement, car, pendant un mois entier, je ne vis pas une seule fois une tache bleue sur le ciel. Durant cette période une lettre de M. Klouman me parvint, dans laquelle il m'indiquait qu'il était heureusement arrivé à ALTEN de retour de son excursion par les montagnes, et qu'il avait terminé la mesure des angles aux stations éloignées, de sorte qu'il ne lui restait qu'à mesurer le premier triangle, savoir celui dont la base forme un côté. Avec cette nouvelle il m'adressa l'invitation de venir à ALTEN pour participer aux travaux à faire à cette place. Mais à cette époque j'étais bien loin encore du *minimum* requis de mes observations astronomiques. Par conséquent, en quittant HAMMERFEST, j'étais décidé à y revenir une autre fois. En tout cas il fallait faire le voyage, le travail géodésique étant aussi important que le travail astronomique, en considérant qu'avec le progrès de la saison les difficultés des opérations géodésiques augmentaient rapidement. Dans l'espérance de rencontrer plus tard une saison plus favorable aux observations astronomiques, je partis pour ALTEN, avec mon instrument universel, le jour suivant, dans une embarcation à voiles et le 26 j'arrivais à BOSEKOP. M. Lysander resta à HAMMERFEST pour surveiller les autres instruments et pour monter les chronomètres.

Pour ne plus revenir sur le même sujet, j'exposerai encore ici les détails relatifs aux opérations de M. Klouman, entreprises pour effectuer la jonction entre la base et les triangles principaux. Pour être mieux compris j'ajoute un dessin des triangles de jonction*).

M. Klouman, à la tête d'une caravane composée de 6 chevaux et d'autant de guides, commença le 27 juillet son voyage aux montagnes de l'intérieur. En considérant le but triple de l'expédition, savoir de trouver les stations trigonométriques, d'y construire les signaux et d'y mesurer les angles, on comprend qu'un grand appareil de voyage était inévitable. Il fallait transporter les instruments, la charpente des

*) Voyez la planche XIX.

signaux, et les moyens d'existence indispensables pour un temps considérable. Même après avoir fait les arrangements les plus soignés, il fallait s'attendre à un voyage fatigant, privé d'aisances et même dangereux. Si la vie d'une caravane dans les régions tropiques se dépeint quelquefois avec des couleurs assez attrayantes, ces attraits disparaissent entièrement à 70° de latitude. M. Klouman passa un mois entier dans les montagnes, et pendant ce temps il lui fallait passer les nuits dans sa tente, établie sur un rocher nu mais couvert de neige, dans une hauteur de 2000 à 3000 pieds, ou placée dans un marais où l'humidité et les cousins détruisaient tout agrément et tout repos. Une chose également pitoyable était la nourriture. M. Klouman s'était pourvu d'appareils de chasse et de pêche, et à ces moyens il fallait recourir à plusieurs occasions. J'ai cru devoir indiquer ici ces conditions d'existence, parce qu'elles se répétaient dans le courant de plusieurs années et qu'elles nous font apprécier la persévérance et la résignation à l'aide desquelles M. Klouman a su vaincre tous les obstacles qui s'opposaient à son importante entreprise.

Voici la première lettre de M. Klouman, qu'il m'adressa de son voyage et qui donne une idée plus précise sur la marche de ses travaux.

LÖDIZHJOKKI le 2 août (1850).

«Vous excuserez la brièveté de ma lettre, car la perche du milieu qui supporte la tente, offre un appui très-peu solide pour une table d'écriture, surtout par un vent fort, sans compter d'autres inconvénients produits par la fraîcheur de la saison actuelle. C'est pourquoi je choisis la forme historique pour les détails suivants. Le jour même de mon retour à HAMMERFEST, jeudi le 18 juillet, j'ai été à SKUODDEVAARA pour y placer le signal. Les deux jours suivants étaient orageux, nébuleux et pluvieux, et il devenait impossible d'aller à REIPAS avant le dimanche. Je dressai un signal sur STORE-REIPAS, un autre sur LILLE-REIPAS, et par l'addition de cette dernière station, la jonction a été essentiellement renforcée, d'autant plus que ELVERAKKEN et SKUODDEVAARA n'étaient pas réciproquement visibles. Le lundi je commençai mon voyage dans les rochers, et les jours suivants je réussis à placer les signaux sur toutes les stations qui, d'après mon opinion, appartenaient à la jonction intentionnée. Aussi cette jonction me paraît-elle entièrement satisfaisante et, en tout cas, elle est préférable aux autres qu'admet le terrain. Ayant eu, dès le commencement, la crainte que la force de ma lunette ne fût trop faible, pour distinguer ceux des signaux qui ne se projetaient pas sur le ciel, je pourvoyais tous les signaux, y compris celui de KONGSHAVN-FJELD, de demi-tonneaux, peints en blanc avec de la chaux. Mais à mon regret ce moyen ne suffisait pas pour les signaux très-éloignés. Pour faciliter la reconnaissance de ces signaux, j'envoyai un homme qui devait amasser autour du signal des pierres jusqu'à la hauteur où les contrefiches entrent dans la poutre du milieu. Sur LÖDIZHJOKKI le signal avec son tonneau avait disparu, mais on reconnut avec précision le trou dans lequel la poutre du milieu avait été placée, et je suis entièrement convaincu

de ce que le centre du nouveau signal est identique avec celui de l'ancien. Après cette digression sur les signaux, je continue l'histoire du voyage. Sans autre désagrément, à l'exception de ce que nos chevaux avaient déserté pour un jour, je terminai ma tournée vendredi le 26 juillet, ayant atteint VUOSGOL-VAARA. Quoique, le jour suivant, le temps fût favorable, cependant les mesures étaient encore impraticables par la difficulté de trouver les directions des signaux. C'est d'ici que j'expédiai l'homme pour amasser les murs de pierres autour des signaux. Mais ces murs n'ont jamais été pointés, car ils ne servaient que pour trouver les signaux plus facilement. Lundi je fis les mesures à VUOSGOL-VAARA, le mercredi à NUPPI-VAARA. Quoique le temps n'ait pas été aussi favorable que pendant la première semaine employée à l'emplacement des signaux, les mesures étaient néanmoins satisfaisantes, en présentant, d'après une estime approximative, le même accord qui se trouve dans les mesures antérieures. Malheureusement il était impossible de voir à NUPPI-VAARA le signal de SKUODDE-VAARA et ce triangle secondaire (MGF) n'a pas été utilisé. Avant de quitter la station, j'ai attendu encore hier, si le temps ne changeait pas favorablement. Mais le contraire avait lieu. Aujourd'hui à midi je suis arrivé ici.»

Dans une seconde lettre datée de BOSEKOP le 18 août, M. Klouman m'apprend que la mesure des angles sur les stations plus éloignées avait été exécutée régulièrement, et qu'après l'avoir achevée, il était revenu le même jour à ALTEN. Cette lettre m'engagea de me rendre à ALTEN où j'arrivai le 26 août.

Durant mon séjour à ALTEN, j'ai fait, à l'aide de l'instrument universel de Poulkova, la mesure des angles, aux trois stations de la base et à RAFSUOLMEN. Le petit instrument universel de Christiania fut utilisé dans les opérations de centration. Pour reconnaître le niveau moyen du golfe qui touche le terrain de la base, j'avais fixé dans l'eau, lors de mon dernier séjour, une échelle divisée, tout près du bord S.O.U. du golfe. Depuis, M. Klouman avait observé les marées. Ces observations furent continuées pendant mon séjour actuel, et j'entrepris les mesures nécessaires pour déterminer la différence de hauteur entre le point de l'échelle, correspondant au niveau moyen de la mer, et BUGTEN. En considérant que M. Klouman avait encore quelque temps libre, jusqu'au départ du bateau à vapeur qui devait le transporter aux régions méridionales, je l'engageai de répéter les observations des marées. Je désirai donner à la hauteur de BUGTEN une bien plus grande précision, que ne l'exigeait la réduction de la base, ayant été engagé, par une lettre de M. Selander datée de Stockholm, de contribuer, autant que le temps le permettait, au succès du nivellement entre le Golfe Bothnique et l'Altenfjord, nivellement dont M. Selander avait été chargé de la part de l'Académie de Stockholm. Je dus cependant me borner à déterminer avec précision, par des observations réciproques et simultanées, la différence de hauteur entre BUGTEN et la station KONGSNAVN-FJELD. Après avoir terminé ce travail, je quittai ALTEN. M. Klouman seul acheva plus tard les quelques affaires restantes. Il s'agissait encore des mesures angulaires sur les points extrêmes

de la base, et de maçonneries en briques, pour mettre ces points à l'abri de toute destruction, vu qu'il était possible qu'il fallait revenir un jour à cette base, pour l'employer dans l'intérêt d'autres opérations géodésiques. M. Klouman s'achemina vers le sud le 20 septembre, joyeux dans l'espérance de ne jamais revoir ces régions. Comme nous étions convenus, il reconduisit l'appareil de la base à Christiania.

Je retournai (de BOSEKOP) à HAMMERFEST le 8 septembre, désirant ardemment de rencontrer une saison assez favorable pour pouvoir achever mes observations astronomiques, dans l'intervalle des 11 jours qui restaient jusqu'au prochain voyage du bateau à vapeur, destiné pour le départ de M. Klouman, et de pouvoir quitter alors le Finmarken en bonne conscience. Mais il était autrement écrit dans les étoiles. Dans tout ce temps, je ne pus pas faire une seule observation. Je n'essaierai pas de décrire mon désespoir, lorsque je dus prendre une résolution le 18 septembre. D'un côté il fallait considérer qu'en manquant cette occasion, je risquais d'arriver, par le dernier bateau, trop tard à Christiania pour y rejoindre un autre bateau à vapeur, pour la continuation de mon voyage. Ce retard non seulement m'aurait forcé à continuer mon voyage par les chemins de terre, d'une manière aussi dispendieuse que lente, surtout dans cette saison, mais elle m'aurait en outre ôté la possibilité de remplir Votre commission de transporter les instruments à Stockholm. De l'autre côté, la considération grave m'imposait, que peut-être par suite de mon départ précipité, le nombre insuffisant des observations Vous forcerait à arranger pour l'année suivante une nouvelle expédition. *Salvavi animam meam*. Je restai à HAMMERFEST, décidé même d'y passer l'hiver en cas que, dans les trois semaines suivantes, je ne réussissais pas à atteindre mon but. Heureusement cette résignation menaçante ne se réalisa pas. Les deux dernières semaines me portaient plusieurs belles journées d'observation et, le 12 octobre, je me vis à même de renfermer mes instruments dans les boîtes et de les transporter à bord du bateau à vapeur.


Pour la conservation du point trigonométrique de FUGLENAES, les arrangements suivants furent pris. Le pilier en briques, maçonné au-dessus de ce point et sur lequel l'instrument universel avait été placé, fut détruit, de sorte que le boulon de fer, scellé dans le roc, devint libre. Ce boulon fut recouvert d'une couche épaisse de suif et puis d'une pièce en bois qui l'isolait complètement. Une maçonnerie de grosses et très-pesantes scories entourait le tout. En remettant les clefs de l'observatoire au bourguemâitre de la ville d'ALTEN, j'ajoutai une lettre officielle, dans laquelle j'exposais l'importance de conserver le terme le plus septentrional de tous les arcs du méridien mesurés jusqu'à présent, en l'engageant à faire des arrangements officiels qui mettraient, aussi pour l'avenir, le point désigné sous la surveillance du bourguemâitre. A mon retour à Christiania nous convinmes, M. Hansteen et moi, de ce que l'observatoire de FUGLENAES fût conservé aussi longtemps qu'il résisterait au climat, et que le ministère de l'intérieur fût engagé à

émettre un ordre officiel, par lequel la surveillance et la conservation du point de FUGLENAES fût spécialement recommandé au bourguemaître de la ville de HAMMERFEST.

Enfin le 13 octobre nous quittâmes HAMMERFEST. Après un trajet des plus pénibles de 3 semaines, nous arrivâmes le 2 novembre à Christiania. La communication par bateaux à vapeur avec St.-Petersbourg, à travers la Suède et par la Baltique, ayant cessé, nous étions forcés de modifier essentiellement le premier plan de notre retour. En effet, j'avais été chargé primitivement de retourner, avec les instruments, par l'intérieur de la Suède et de déposer les instruments, à l'exception d'un seul, du cercle vertical, à Stockholm, parce qu'au moins quelques-uns des instruments devaient être employés, l'année prochaine, dans le Lapmarken suédois. Le cercle vertical devait rentrer à Poulkova, pour pouvoir continuer la recherche du coefficient de flexion. Mais je me vis forcé à laisser tous les instruments à CHRISTIANIA. Je remis les chronomètres entre les mains et aux soins de M. Hansteen. Les instruments astronomiques trouvaient un bon emplacement dans une pièce de la maison de la Direction de la levée du pays. L'appareil de la base fut très-bien placé à la maison de la douane. Toutes les boîtes avaient été ouvertes, et il avait été constaté que tous les instruments se trouvaient dans un état de conservation parfaite. Quant au transport final des instruments, j'obtins la promesse, qu'ils seraient expédiés par les voies choisies par Vous, et que Vous auriez à décider, si M. Klouman, destiné à escorter les instruments, parce qu'il en connaît le traitement par expérience, les conduira seulement à Gothenbourg, pour y arranger le transport ultérieur, ou s'il les accompagnera à Stockholm. Quant à mon retour et à celui de M. Lysander, il fallait choisir entre deux voies. Nous pouvions traverser la Suède jusqu'à Stockholm, passer le Golfe pour venir en Finlande, et traverser ce pays pour arriver à Pétersbourg. L'autre voie qui se présentait, allait par Copenhague, Travemünde ou Wismar, puis par le nord de l'Allemagne et par les provinces Baltiques russes. Nous choisîmes la dernière route, la première étant à peu près impraticable et réclamant trop de temps, surtout à cause des quarantaines établies en Suède d'une ville à l'autre. Nous quittâmes la ville de Christiania par le bateau à vapeur CHRISTIANIA, le 6 novembre; et nous arrivâmes le matin du 8 novembre à KLAMPENBORG près de Copenhague, où nous fûmes soumis à une quarantaine de trois jours. Nous restâmes encore trois autres jours à Copenhague. Le 14 nous partîmes pour WISMAR, à bord du bateau à vapeur ONOTRIT, et le 16 novembre nous arrivâmes à Berlin. Après nous être reposés 4 jours à Berlin, nous nous rendîmes, sur le chemin de fer, par STETTIN à WOLDENBERG et de là, par la diligence de poste, à KOENIGSBERG, où nous arrivâmes le 23 novembre. Un grand malheur me frappa ici. M. Lysander, mon compagnon de voyage, tomba malade de douleurs dans le ventre, et la continuation de notre voyage fut remise. Au commencement la maladie paraissait légère. Le médecin, appelé immédiatement, et qui visitait le malade régulièrement, m'assura que nous pourrions continuer le voyage après peu

de jours de repos. Encore le matin du 28 l'état du malade n'avait rien d'alarmant. Mais l'après-midi la maladie changea brusquement et déjà le soir l'état du malade paraissait très-dangereux, et empirait progressivement et avec plus de rapidité. L'autre jour le médecin désespéra de la guérison du malade. La triste crise arriva bientôt. Mon fidèle et chéri compagnon succomba la nuit du 29 au 30 novembre. Le rapport que le médecin me remit, s'exprime dans les termes suivants: «Il est indubitable qu'une tympanitis aiguë s'est formée brusquement et a été la cause de la mort». Je Vous ai remis, immédiatement après mon retour, tous les documents qui se rapportent à cet accident, conformément à l'opinion du consul-général de Russie à Koenigsberg. Plusieurs arrangements à faire par suite de la mort de mon ami, me retenaient plus longtemps. Je quittai Koenigsberg le 7 décembre, l'autre jour j'arrivai à Tauroggen. Le 11, j'obtins une place dans la diligence de poste. Ayant passé par Mitau, Riga et Dorpat, j'arrivai le 16 décembre à Pétersbourg et le même jour je revis Poulkova.

Poulkova le $\frac{29}{17}$ janvier 1851.



A D D I T I O N C.

R A P P O R T S U R L' E X P É D I T I O N E N L A P O N I E

E X É C U T É E E N 1 8 5 1.

P A R

M. D. G. L I N D H A G E N.

Rapport adressé à M. le Directeur de l'Observatoire central, relatif au voyage en Laponie entrepris, en été 1851, dans l'intérêt de la mesure de degrés.

Par D. G. Lindhagen.

Le rapport que je Vous ai adressé, après être revenu de l'expédition au Finmarken norvégien, de 1850, a fait voir que j'avais complètement atteint le but de ce voyage, savoir celui de terminer les opérations de l'arc norvégien. Le temps défavorable avait cependant causé un tel retard des travaux, que j'avais été forcé de déposer à Christiania, pour l'hiver, les instruments qui appartenaient à l'Observatoire de Poulkova. J'ai mentionné, dans le même rapport, que les autorités de Christiania avaient proposé de faire transporter les instruments de Christiania à Stockholm sous la surveillance de M. Klouman. Simultanément avec mon rapport qui parut dans le bulletin de l'Académie de St. Pétersbourg, un autre rapport, dressé par M. Selander et relatif aux opérations suédoises, fut publié dans les *Comptes-rendus mensuels* de l'Académie de Stockholm. On voit dans ce dernier rapport que, pour terminer les travaux suédois, il restait, à cette époque, à mesurer une base, à en faire la jonction avec les triangles principaux, et à exécuter les observations astronomiques sur le point méridional de cet arc. D'après l'opinion du rapporteur, ces derniers travaux pouvaient être faits dans un été. Par conséquent, ces travaux auraient été les seuls encore à faire, pour terminer entièrement les opérations les plus septentrionales, s'il n'avait pas paru essentiel d'effectuer une jonction plus intime entre les triangles de Finlande et ceux de Laponie, triangles qui jusqu'alors n'avaient qu'un seul point commun, savoir TORNEA. En outre il paraissait essentiel, que les astronomes de Russie répéassent la détermination du point le plus septentrional de leurs opérations, en y faisant usage des mêmes instruments qu'ils avaient employés, l'année dernière, pour fixer la latitude de FUGLENAES, point extrême de l'arc norvégien. Dans cet état des choses, il était convenable d'entreprendre les observations de latitude simultanément avec les opérations trigonométriques qui étaient à faire de la

part des géomètres suédois, d'autant plus que Vous étiez convenu avec M. Selander que, pour mesurer la base suédoise, le même appareil dût être employé qui avait servi, l'été dernier, à la mesure de la base norvégienne et qui allait être transporté de Christiania à Stockholm, au printemps, avec les instruments astronomiques. Nous jugeâmes convenable, en outre, pour profiter le mieux des expériences rassemblées antérieurement, qu'un individu qui connaissait l'appareil intimement, participât à la mesure de la nouvelle base de Laponie. Par suite des négociations entre les deux Académies, Vous m'avez délégué à Stockholm, en printemps 1851, chargé des commissions suivantes:

1. De recevoir les instruments attendus de Christiania, et de remettre l'appareil de la base à la disposition de l'Académie de Stockholm;
2. de donner à messieurs les géomètres suédois toutes les explications relatives à l'appareil qu'ils désireraient, et de participer personnellement à la mesure effective de la base de Laponie, dès que ces messieurs le voudraient;
3. d'examiner de plus près la possibilité de la jonction des triangles finlandais avec les triangles suédois, et d'exécuter cette jonction, si cela pouvait se faire;
4. de déterminer sur un point voisin de TORNEA la latitude et l'azimut, en faisant usage des mêmes instruments dont on s'était servi à FUGLENAES.

Pour ces travaux, l'Observatoire central m'associa un aide dans la personne de M. Wagner.

Les préparatifs pour ce voyage étaient très-simples, parce que nous pouvions prévoir avec confiance, que les instruments, arrivés sans accident à Christiania, nous parviendraient, à Stockholm, dans le même bon état. Dans le rapport sur le voyage de l'année passée, j'ai énuméré tous les appareils qui nous avaient été remis lors du départ de Poulkova. Plusieurs petits instruments furent ajoutés à Christiania. De plus, on nous donna une nouvelle tente, récemment achevée, et construite de sorte, que les trois instruments y pouvaient être employés aux observations avec toute aisance. Cet arrangement avait été fait, pour que nous fussions en état de commencer les observations, dès notre arrivée. La construction d'une maison d'observation nous aurait coûté deux ou trois semaines, si elle devait abriter les instruments et en même temps offrir les arrangements essentiels pour l'observation. L'instruction dont Vous m'aviez pourvu, était conçue dans les expressions suivantes:

«La commission dont Vous êtes chargé, au nom de l'Académie des sciences et de la part de l'Observatoire central, et dans l'exécution de laquelle M. Wagner Vous est associé comme aide, consiste dans les points suivants:

1. Vous exécuterez, sur le point le plus septentrional des triangles russes, aux environs de TORNEA ou de КЕМІ, des observations de latitude et d'azimut, à l'aide des instruments qui, l'année

- passée, ont été employés à FUGLENAES. Vous ferez la jonction de votre lieu d'observation avec une ou plusieurs des stations trigonométriques voisines.
2. Vous avez à effectuer la jonction des triangles russes et suédois, soit avec la coopération de plusieurs les géomètres suédois, soit, si cela ne peut se faire, directement de votre côté.
 3. Vous remettrez l'appareil de la base à la Commission de l'Académie Royale de Stockholm, et Vous donnerez toutes les explications sur l'appareil qui seront désirées. En cas que les savants de Suède réclament votre assistance, pour la mesure effective de la base, Vous Vous rendez avec M. Wagner à l'endroit où cette mesure aura lieu.
 4. Si, dans l'intérêt des opérations, il est indispensable de mesurer une seconde base, aux environs de TORNEA, je Vous charge de cette opération. Dans ce cas, Vous consulterez avec les géomètres suédois pour fixer, laquelle des deux mesures doit être exécutée la première.

Le 28 mai n. st. M. Wagner et moi, nous quittâmes Kronstadt, à bord du bateau à vapeur STORFURSTEN. Le 1 juin nous arrivâmes à Stockholm. Nous reconnûmes en arrivant notre excellent collaborateur de l'année passée, M. Klouman, qui nous attendait. Il était arrivé, avec ses instruments, une semaine avant nous. Avant qu'il se mit en route, le 4 juin, pour retourner en Norvège, toutes les boîtes furent ouvertes, pour faire l'inspection des instruments. Nous les trouvâmes dans un état parfait de conservation, et M. Klouman les ayant remis entre mes mains, je lui en donnai quittance. Plus tard M. Selander et M. Skogman, lieutenant de la marine, son collaborateur, et plusieurs membres de l'Académie des sciences en firent également l'inspection. Depuis M. Selander les reçut.

Dans les conférences que j'avais, pendant mon séjour à Stockholm, avec M. Selander, et qui traitaient des affaires de la mesure de degrés, je fus informé de ce que le terrain, pour la mesure d'une base suédoise, avait été choisi aux environs d'ÖFVER-TORNEA, à 70 verstes au nord de la ville de TORNEA; puis, que M. Selander, comme délégué de l'Académie à la diète du royaume, se voyait engagé à remettre son voyage en Laponie jusqu'après la clôture de la diète; qu'il espérait cependant pouvoir se mettre en route vers la mi-juillet; mais que M. Skogman, son aide, se rendrait en Laponie par le premier bateau à vapeur, pour préparer le terrain de la base, pour en désigner solidement les deux extrémités et pour commencer les opérations de jonction entre la base et les triangles principaux. Par la raison que M. Selander ne pouvait d'abord participer aux travaux, il devenait impossible de parvenir à une décision sur quelques autres travaux qui devaient être faits, cet été, en commun; car nous ne pouvions guère prévoir les circonstances futures. Entre autres, il resta sans décision si, d'après ma proposition, M. Selander devait mesurer la base suédoise à deux reprises, pour gagner une connaissance directe sur l'exactitude de l'opération. En effet, l'occasion paraissait s'y prêter, vu que les moyens personnels étaient

en abondance et que c'était le dernier travail de cette espèce à exécuter dans l'intérêt de la mesure de degrés. Nous résolûmes cependant d'expédier l'appareil le plus tôt à HAPARANDA, par mer, sous la surveillance de M. Skogman, et de là jusqu'à ÖFVER-TORNEA, pour pouvoir entreprendre la mesure de la base, immédiatement après l'arrivée de M. Selander sur les lieux. M. Selander se chargea encore de faire exécuter tous les trépieds de bois à Stockholm, et de les faire transporter à l'occasion de son propre voyage maritime.

Avant de quitter Stockholm, en société de M. Wagner, j'avais engagé à mon service un sous-officier qui devait nous accompagner en Lapmarken. C'était d'autant plus essentiel, qu'il devait être difficile d'arranger, dans un lieu inconnu à nous et très-faiblement peuplé, une surveillance convenable des instruments placés sous la tente, pour le temps de l'absence des astronomes. Enfin, le 15 juin, nous quittâmes Stockholm à bord du premier bateau à vapeur, dirigé vers le nord, le TRULE, accompagnés de M. Skogman. Après avoir fait visite à toutes les villes suédoises, situées le long de la côte, depuis Stockholm jusqu'à HAPARANDA, nous arrivâmes, le 19, à SALMIS, point de relâche des bateaux à vapeur, éloigné de 10 verstes de HAPARANDA. Le commissionnaire des bateaux reçut ici l'ordre de conduire, sans retard, nos instruments, à bord d'un radeau sûr, jusqu'à HAPARANDA. Nous-mêmes nous nous y rendîmes par le chemin de terre, et le soir du même jour nous entrâmes dans notre quartier général d'été permanent à TORNEA. D'ici nous avons toute facilité de faire nos excursions, plus ou moins longues, aux différentes places où nos travaux nous appelaient. M. Skogman nous quitta peu de jours après et se mit en route vers le nord pour y remplir ses obligations. D'après ce qui était arrêté, il prit avec lui l'appareil de la base.

Il était impossible de fixer d'abord un plan définitif sur l'arrangement de nos travaux, parce que tout ce qui se rapportait à la mesure de la base, devait rester en suspens jusqu'à l'arrivée de M. Selander. Même la question proposée dans l'instruction que Vous m'aviez donnée, s'il était nécessaire de mesurer une seconde base, près de TORNEA, ne pouvait être décidée qu'en présence de M. Selander. Car, après avoir mesuré une base près de ÖFVER-TORNEA, qui devait être mise en jonction avec le côté PULLINKI-AVASAKSA, il paraissait inutile de mesurer une autre base pour renforcer les derniers triangles de Finlande, vu que le côté suédois PULLINKI-AVASAKSA se transportait jusqu'au côté finlandais TORNEA-KIVALO par seulement 5 triangles, en supposant que la réunion des triangles suédois et finlandais pouvait se faire sans avoir recours à de nouvelles stations auxiliaires. Quant à la dite réunion, nous devons bien renoncer à l'assistance des géomètres suédois entièrement absorbés, pour cet été, par leurs propres travaux. C'était donc, pour nous, un point décidé, que l'exécution de cette réunion restait à nous seuls, et nous avions à arranger nos travaux conformément à cette décision. Notre plan préalable était celui-ci. Il fallait commencer par les observations astronomiques. Pendant le progrès de ces travaux nous étions disposés,

d'après les conditions du temps et de la saison, à faire des excursions, pour reconnaître la voie la plus propre de la jonction projetée et pour l'exécuter. Quant à la mesure de la base, nous n'avions d'abord point de soucis.

Nous eûmes, par conséquent, en premier lieu à chercher l'endroit le plus convenable aux observations astronomiques. Il devait se trouver près de TORNEA, et non pas aux environs de KEMI. Déjà la circonstance, que TORNEA doit être regardé comme dernier point des opérations de Finlande, nous décida, après avoir reconnu que nous ne rencontrions ici point de difficultés, quant à l'exécution des observations. TORNEA offrait, sans cela, encore deux avantages essentiels. Nous n'avions pas à transporter nos instruments plus loin. Puis, nous y trouvions des demeures plus facilement, que partout ailleurs dans ces régions septentrionales. La ville finlandaise de TORNEA est située sur une péninsule, formée par la rivière du même nom, et qui communique avec le continent suédois par un isthme. La ville suédoise de HAPARANDA se trouve sur le bord occidental du fleuve, de sorte que la partie septentrionale de HAPARANDA est placée vis à vis de la partie méridionale de TORNEA. La rivière se divise, un peu au-dessous de TORNEA, en deux bras et, en se jetant dans le Golfe Bothnique, forme le Delta où se trouve l'église de district de TORNEA, c. à d. l'église du grand district de NEDER-TORNEA. La flèche de cette église joue un rôle dans les annales de la géodésie, en formant une des stations de SVANBERG et la station la plus méridionale des opérations suédoises récentes. L'église bien conservée est construite en briques, et par cette raison elle est, pour un but scientifique, préférable à l'église de la ville de TORNEA, construite en bois. Les géomètres suédois, dans leurs opérations, n'ont pas seulement employé la flèche de cette église comme objet de pointage, mais ils ont mesuré, sur cette tour, les angles; de sorte que la tour elle même leur a été une station trigonométrique, dans le sens le plus complet. Dans les opérations de Finlande, cette église n'est pas, dans le sens propre du mot, la station trigonométrique, parce que les angles n'y ont pas été observés. C'est plutôt le point KOKKO-MÄKI qui doit être regardé comme notre station trigonométrique. Il est situé, dans la direction SOu. de l'église de district et dans la distance d'une verste, sur les mêmes collines de sable, où se trouve aussi la dite église. Ce point a été durablement marqué dans le terrain, comme les autres stations finlandaises. Il y avait eu auparavant un signal pour être observé des autres stations. La position de l'église de district à TORNEA, relative aux autres stations de Finlande, a été déterminée par l'intersection des lignes qui partent de ces stations, et cette église doit être regardée avec pleine confiance comme le point septentrional extrême de l'arc de Finlande. Sans cela, nous aurions dû entreprendre une nouvelle jonction géodésique de la dite église avec les autres stations, pour combler la lacune. Quoique la nécessité d'une telle nouvelle opération n'existât pas, nous résolûmes cependant de refaire cette jonction, vu qu'elle pouvait être aisément achevée et sans perte de temps. C'était une des

conditions à remplir, que de choisir l'endroit des observations astronomiques de sorte, qu'il pût être mis en jonction avec l'église de district, et que la même opération conduisit à une relation indépendante entre l'église et KOKKO-MÄKI, pour fournir un contrôle des différents travaux. Il s'agissait encore de ce que l'endroit choisi offrit la tranquillité requise pour l'observation, l'absence de toute perturbation extérieure et l'aisance de l'existence, vu que nous avons appris par l'expérience l'importance de ces conditions pour le succès des travaux. Quant à la dite aisance, il aurait été certainement le plus propre d'établir notre tente soit à TORNEA, soit à HAPARANDA, où les demeures se trouvaient facilement, et où les géomètres suédois avaient fait les observations astronomiques. Nous cédâmes cependant aux autres motifs. Les collines sablonneuses qui vont de l'église à KOKKO-MÄKI, sont du côté de l'église sans arbres et se prêtaient à la mesure d'une petite base, et la plaine située, du côté Est, au bas des collines, offrait le moyen de choisir de convenables stations auxiliaires. Par ces stations et par la base, nous pouvions aisément effectuer une jonction de notre tente soit avec l'église, soit avec KOKKO-MÄKI. Les collines sablonneuses offraient, en sus, une vue libre sur les environs, ce qui nous donnait l'avantage de pouvoir faire, dans notre tente, l'observation des angles qui appartenaient à la jonction à faire entre les triangles suédois et de Finlande. Notre tente, établie ici, se trouvait éloignée de 860 pieds, à peu près, de l'église, vers SSE. Les jours de fête et le mauvais temps retardèrent un peu l'établissement de notre tente et une semaine s'écoula, avant que nous pussions transporter nos instruments de HAPARANDA, pour les établir sur les piliers, et commencer les observations.

Quant à l'arrangement de ces observations, il suffit de dire, que nous avons suivi le même plan qui avait réglé, l'année passée, les observations de FUGLENAES, et dont j'ai donné un exposé dans le rapport sur l'expédition norvégienne. Comme à FUGLENAES, il s'agissait de déterminer le temps et l'azimut à l'aide de l'instrument universel, et d'observer la latitude, à l'aide du cercle vertical et de l'instrument des passages établi dans le premier vertical. M. Wagner se chargea des observations du temps et de l'azimut, et les exécuta entièrement, à l'exception de quelques mises de la polaire que j'ai observées pour l'azimut. Dans l'intérêt de ces travaux, je fis établir une mire, pour mesurer les différences en azimut entre cette mire et soit une étoile fondamentale, pour déterminer le temps, soit la polaire pour déterminer l'azimut. L'azimut de la mire fut changé, à l'aide de mesures angulaires directes, en celui du point finlandais KIWALO, situé à l'est et en celui de KAAKAMA-VAARA, situé au nord. Un de nos chronomètres, Kessels 1257, s'était arrêté d'abord, pendant le transport de TORNEA à l'église de district, à ce qui paraît par quelque secousse brusque, et ne pouvait être mis en marche depuis. L'autre, DENT 1942, n'avait pas, cet été, une marche bien régulière. Mais M. Wagner, en faisant chaque jour plusieurs déterminations du temps, y pourvint que les corrections du chronomètre fussent reconnues avec une sûreté plus que suffisante pour nos buts.

Pour déterminer la latitude, j'ai observé, à l'aide du cercle vertical, les distances au zénith d'étoiles qui passaient par le méridien des deux côtés du zénith. La polaire a été observée dans différents angles horaires, mais en considérant l'élimination d'une erreur dans la position de l'étoile pour la moyenne finale. Les autres étoiles observées sont:

	$z =$
η Ursae maj.	15° 46'
α Coronae	38 36
α Lyrae	27 11
γ Aquilae	55 34
α Cygni	21 5
α Ursae maj., pass. inf.	51 37.

J'ai choisi ces étoiles sur les motifs suivants:

1. Les observations des deux étoiles α Lyrae et α Cygni, correspondaient, par la moyenne des z , égale à 24° 8' du côté sud, aux observations de la polaire, pour lesquelles le z moyen est 24° 10'. C'était pour éliminer, dans la moyenne des deux latitudes, l'effet de la flexion de la lunette et d'une incertitude quelconque dans la réfraction.
2. η Ursae maj. et α Coronae, étoiles observées à FUGLENAES, devaient contribuer spécialement à l'évaluation de l'amplitude entre FUGLENAES et TORNEA.
3. Les deux étoiles γ Aquilae et α Ursae maj. pass. inf., ayant des z opposés, mais presque égaux, devaient donner des renseignements sur la différence des latitudes obtenues des deux côtés du zénith.

J'ajoute encore que j'ai observé plus de 30 mises de la polaire, chacune de 4 pointages, et au moins 10 mises de chacune des autres étoiles.

J'ai encore déterminé la latitude à l'aide de l'instrument des passages établi dans le premier vertical, en choisissant les 4 étoiles suivantes qui passaient le méridien dans de petites distances au zénith:

Grandeur	z	Intervalle entre les deux passages par le vertical.
α Draconis 3.4	0° 46'	1 ^h 58 ^m
Anonyma Draconis . . . 5	0 21	1 20
π Draconis 5	0 25	1 30
ϵ Cephei 3.4	0 25	1 29.

L'étoile Anonyma Draconis a la position moyenne pour 1851, $\alpha = 18^h 25^m 5$, $\delta = 65^{\circ} 29'$. La première des 4 étoiles, α Draconis a dû être omise plus tard, étant devenue trop faible pour la lunette de l'instrument, lorsque le passage approchait de midi. Il n'y a donc que 3 étoiles réellement observées. J'ai eu finalement 8 à 10 observations complètes de chacune de ces 3 étoiles, et qui conduisaient à un résultat plus que satisfaisant, à juger d'après les observations de l'année passée qui avaient donné, dans des circonstances analogues, une erreur probable de 0%15, pour la distance au zénith déduite du passage observé un seul jour.

J'ai encore à mentionner ici, à côté des observations astronomiques, la jonction entre notre tente d'observation et l'église de district. A l'aide d'une base et d'une petite triangulation, la tente a été jointe non seulement avec l'église de district, mais encore avec Кокко-мъки et avec l'église de la ville. Pour mesurer la base, j'ai employé deux fortes perches de bois, de 22 pieds de long, travaillées au rabot. Près des deux extrémités de chaque perche j'ai marqué deux points dont la distance a été déterminée à l'aide d'un compas à verge, d'après une règle divisée en acier, qui fait partie de l'appareil de la base. Pour exécuter la mesure de la base, les perches furent établies sur des trépieds, dans une inclinaison constante, produite d'abord approximativement à l'aide d'une équerre, puis exactement en employant de faibles coins placés sur les trépieds qui supportaient les perches. Vu que le terrain admettait ce procédé, je le préfèrai à une détermination directe de l'inclinaison de chaque perche, pour laquelle je n'avais pas les moyens convenables. L'inclinaison moyenne et constante de la base a été reconnue plus tard, en observant d'une extrémité de la base la distance au zénith de l'autre extrémité. Les perches, ayant reposé sur les trépieds, pendant plusieurs jours avant le commencement de la mesure de la base, avaient pris une petite courbure régulière. Dans la mesure effective de la base, j'ai choisi les points d'appui des perches sur les trépieds de sorte, que la petite courbure reconnue fût anéantie dans la perche par la flexion que produisait la pesanteur, ce qui pouvait être exactement reconnu par le coup-d'oeil. Chaque perche était séparée de la suivante par un intervalle d'au-moins 10 pouces et cet intervalle fut mesuré sur l'échelle divisée à l'aide d'un compas à verge. Le commencement de la base correspondait exactement au centre de l'instrument universel, placé, pour les observations astronomiques, sur son pilier. La longueur de la base, dirigée vers l'église, était de 523 pieds fr. Elle a été mesurée deux fois, en employant la même méthode. D'après un calcul préalable, les deux résultats s'accordent à 3,5 lignes près, ou à $\frac{1}{21000}$ de la longueur totale. Les angles de notre petite triangulation ayant été observés avec le soin requis, je suis persuadé que nous avons déterminé la distance de notre lieu d'observation à l'église de district à $\frac{1}{2}$ pouce près et celle de la dite église à Кокко-мъки avec l'exactitude d'un pouce. Ces opérations ont été exécutées durant le progrès des observations astronomiques, mais sans produire une interruption de celles-ci.

Je reviens à présent aux observations astronomiques, pour en indiquer la marche et les circonstances extérieures.

Il a été dit plus haut que la tente d'observation était placée sur le Delta que forme la rivière TORNEA avant de se jeter dans le golfe. Ne pouvant trouver un domicile sur l'île même et devant prendre notre quartier permanent dans la ville, nous avions un long chemin à faire, pour arriver à l'observatoire. Il fallait passer l'eau en bateau et puis marcher près d'une verste sur l'île jusqu'à l'observatoire. Sous ce rapport nous étions dans des conditions analogues à celles de l'été passé à FUGLENAES. Nous étions obligés d'employer les mêmes moyens, pour profiter des heures isolées d'un ciel clair. Il fallait attendre sur le lieu, dès que la moindre perspective d'une observation se présentait. Cependant le ciel de TORNEA était bien loin de nous causer autant de troubles, que le ciel gris qui enveloppe FUGLENAES. Au commencement, le temps favorisait assez les observations et les faisait marcher d'un pas assez rapide, à l'exception des observations du premier vertical. Ces dernières présentaient de grandes difficultés au milieu de l'été, parce que les étoiles choisies étaient trop faibles pour être observées, dès que l'atmosphère n'était pas entièrement pure et transparente. Après avoir exécuté le nombre désiré d'observations à l'aide des autres instruments, sans cependant avancer quant aux passages, nous résolûmes, vers la mi-juillet, d'interrompre pour quelque temps les travaux astronomiques et de nous occuper des opérations à faire, pour effectuer la jonction des triangles finlandais et suédois. Cette résolution fut prise, soit en considérant la saison, à ce qu'elle paraissait continuellement défavorable pour les occupations célestes, soit en jugeant qu'il serait plus avantageux, quant aux passages à observer, d'attendre les nuits plus longues de l'automne. L'interruption des observations astronomiques s'étendait jusqu'à 5 semaines, à l'exception d'un couple de jours qui tombaient sur l'intervalle entre les deux excursions entreprises pour les travaux de jonction. Cet intervalle fut utilisé non seulement pour les travaux indiqués, mais aussi pour mesurer une base près de ÖFVER-TORNEA qui, comme j'indiquerai plus tard, faisait partie des opérations de jonction. Dans ce qui suit, j'exposerai d'abord les travaux de jonction et puis la mesure de la base, en mentionnant en dernier lieu les observations astronomiques.

Il aurait été sans doute le plus avantageux de produire une jonction directe des triangles suédois et finlandais, sans faire usage de stations auxiliaires. Les deux stations déjà mentionnées, KAAKAMA-VAARA et KIWALO, dont nous avons déterminé les azimuts, se prêtaient par préférence, en y joignant le point TORNEA, commun aux deux opérations, pour former le triangle requis pour une jonction directe. La station finlandaise KIWALO est presque précisément à l'est de TORNEA dans une distance de 18000 toises (33 verstes). Ces trois stations forment un triangle à peu près rectangulaire, avec les deux cathètes de longueur presque égale; donc un triangle très-avantageux pour notre but. Un autre triangle, également con-

venable, se forme par les trois stations, KIWALO, KAAKAMA-VAARA et KOKKO-MÄKI. Nous avions à choisir un de ces deux triangles. Sans nous décider entièrement, nous résolûmes de faire en tout cas entrer l'église de TORNEA et KOKKO-MÄKI dans nos opérations, pour gagner un contrôle et pour augmenter l'exactitude de la jonction. A cet effet nous fîmes ériger un nouveau signal à KOKKO-MÄKI, près du point fixé dans le terrain. Le nouveau signal devait être mis en rapport avec le dit point. L'ancien signal de KOKKO-MÄKI, employé dans les opérations antérieures, avait entièrement disparu.

Il fallait examiner d'abord, si les stations choisies offraient des lignes de vision libres, de sorte que les angles pouvaient effectivement être mesurés. Nous savions que TORNEA et KOKKO-MÄKI étaient visibles, soit de KIWALO, soit de KAAKAMA-VAARA. Le signal suédois construit sur ce dernier lieu se trouvait bien conservé et nous le reconnûmes, de notre tente, distinctement dans les lunettes de nos instruments. Quant à l'ancien signal de KIWALO nous ne pûmes décider, à TORNEA, s'il existait. La montagne était aisément reconnue; mais nous soupçonnâmes, ce qui fut confirmé plus tard, qu'avec le temps le signal avait pâli et qu'il était délabré et déformé. Il ne nous restait qu'à décider, si la ligne de vision entre KAAKAMA-VAARA et KIWALO était libre; ce qui ne pouvait se faire avec certitude, qu'en visitant une des deux stations. Par cette raison, je m'acheminai, le 19 juillet, accompagné d'un interprète, pour aller à KAAKAMA-VAARA, la station la plus accessible des deux. Arrivé sur la place, je pouvais très-bien distinguer la montagne de KIWALO. Après avoir fait couvrir les traverses du signal du lieu où je me trouvais, par des planches, et peindre tout le signal en noir, je m'en retournai et, le soir de l'autre jour, je rentrai à TORNEA. Par cette visite à KAAKAMA-VAARA il était décidé que la jonction intentionnée des deux opérations pouvait être réalisée à l'aide des stations, TORNEA, KOKKO-MÄKI, KAAKAMA-VAARA et KIWALO. Une autre expérience nous jeta cependant dans un certain trouble. Le long sentier de 8 verstes qui conduit à KAAKAMA-VAARA, de l'endroit où l'on quitte le grand chemin, ou de la paroisse de KARUNGI, n'est que difficilement praticable même pour des piétons sans fardeau, en traversant en majeure partie des marais par lesquels on passe sur des arbres coupés, risquant d'être englouti par le marais, dès qu'on fait un faux pas. D'après les renseignements incomplets sur le chemin de KIWALO, reçus à TORNEA, la route de KIWALO devait être comparativement très-facile, et cette notice a été vraie, à ce que nous avons appris depuis par l'expérience. Le transport de l'instrument universel qui devait être employé sur les deux stations, nous fit naturellement de grands troubles. Les géomètres suédois s'étaient pourvus, pour un tel cas, d'un instrument bien approprié au but et qui, mis en pièces, pouvait être transporté en deux boîtes dont chacune fut placée sur le dos d'un homme. Pour chacune de nos boîtes il fallait deux hommes, ce qui présentait bien des embarras, soit en escaladant les montagnes, soit dans les passages étroits de ces régions sauvages. Mais ces difficultés n'étaient point insurmontables et nous nous acheminâmes pleins de

courage. La visite à KIWALO était la première à faire. Il s'y agissait de l'observation des angles et du rétablissement du signal, pour devenir observable de TORNEA et de KAAKAMA-VAARA. Ayant laissé le sous-officier, pour surveiller les autres instruments et pour monter les chronomètres, M. Wagner et moi, accompagnés de l'instrument universel et d'un interprète, nous nous acheminâmes, le 23 juillet, vers KEMI où nous arrivâmes le même soir. Ici nous engageâmes 8 hommes pour transporter les boîtes de l'instrument, les effets de voyage et les bois destinés pour construire un signal sur KIWALO. Nous quittâmes KEMI le 24 et, ayant passé la rivière KEMI, nous entrâmes sur nos chaloupes dans la rivière AKKORUS jusqu'à une distance de 15 verstes. A partir de cet endroit, nous quittâmes la rivière et en même temps toutes habitations et tous chemins et sentiers. Il nous fallait avancer encore 10 verstes à travers un chemin marécageux et bourbeux, souvent par une eau qui allait jusqu'aux cuisses. L'après-midi du 25 nous parvînmes enfin jusqu'à la montagne désirée et au bout de notre pénible migration. Nous établîmes nos instruments dans l'espérance flatteuse d'exécuter la mesure des angles le même jour et de retourner l'autre jour, après avoir terminé toutes nos affaires. Mais l'imagination animée par l'espérance et la lunette ne montraient pas les mêmes images. L'air était trop peu pur, pour laisser distinguer avec précision les signaux éloignés. Sans tente, pour y passer les nuits, et ayant négligé, en arrivant à KIWALO, tout autre préparatif pour le repos nocturne, nous passâmes la première nuit à la belle étoile. Nous fîmes un beau feu sur le rocher et nous nous couchâmes près du feu, chacun prenant une pierre pour oreiller. L'autre jour, une pluie qui continuait toute la journée, nous fit une visite très-embarrassante. Nous nous réfugiâmes dans une caverne du roc, mais l'humidité évitée d'en haut nous parvint en abondance d'en bas. Enfin nous construisîmes une hutte dans laquelle nous nous trouvâmes abrités et même, d'après nos sentiments, dans une aisance sybaritique. L'après-midi du 27, l'air redevint très-transparent, les images des objets distants étaient tranquilles et précises et nous ne tardâmes pas à profiter de cet état avantageux de l'atmosphère, pour la mesure des angles. Ce même soir nous fîmes le nombre suffisant de pointages sur les objets qui devaient être observés ici, savoir KAAKAMA-VAARA, KOKKO-MÄKI et TORNEA, église de district. L'ancienne marque du centre se trouvant entièrement conservée, la centration, soit du lieu d'observation, soit du signal, s'effectua avec pleine exactitude. L'ancien signal existant encore, mais dans un certain état de caducité, nous le restituâmes avec les changements essentiels pour nos travaux. La poutre du centre qui sortait de $2\frac{1}{2}$ pieds des contrefiches, n'avait que 4 pouces pour diamètre, et ne pouvait guère être vue à l'aide de la lunette de l'instrument universel, dans les grandes distances de notre triangle. Le côté le plus long était d'environ 26000 toises ou de 42 verstes. Le signal rétabli fut pourvu d'une table noire de 4 pieds de haut sur $2\frac{1}{2}$ pieds de large et qui devait donner un objet de pointage facile à saisir, même des plus grandes distances dans nos

triangles. Finalement nous déterminâmes la relation entre la dite table et le centre de la station. Après avoir terminé notre besogne, nous nous mîmes en route, le matin du 28, et la nuit suivante nous rentrâmes heureusement à TORNEA. Après ce retour, nous nous préparâmes immédiatement pour le voyage de KAAKAMA-VAARA. La veille de notre départ, fixé au 1 août, nous fûmes le plus agréablement surpris par une visite de M. Selander qui, arrivé le même jour, nous engagea de l'accompagner à ÖFVER-TORNEA, pour participer à la mesure de la base. Nous acceptâmes cette proposition sans hésitation, en contremendant tout-de-suite la visite à KAAKAMA-VAARA. Nous jugeâmes cependant convenable de prendre l'instrument universel avec nous et de le déposer à KARUNGI. De la sorte, nous pouvions, après l'achèvement de la base, sans perdre du temps, entreprendre l'excursion à KAAKAMA-VAARA et y faire notre besogne. Pour réunir ici tout ce qui se rapporte aux opérations de jonction, il faut faire un saut dans l'exposition de nos travaux. Dans la visite de KAAKAMA-VAARA, nous y fîmes la mesure des angles le 24 août, et la jonction a été depuis entièrement achevée par la mesure des angles sur les deux stations de la tente d'observation près de TORNEA et de KOKKO-MÄKI. Comme je l'ai déjà indiqué, le signal de KAAKAMA-VAARA, construit par les géomètres suédois, se trouvait encore en place; mais le point du centre n'avait pas été durablement marqué dans le terrain. Il n'y a cependant aucune raison pour présumer qu'un changement de position eût eu lieu et qu'il existe une incertitude sur l'identité du centre, pour les deux occasions. Le signal est d'une construction très-simple, étant formé par un arbre fort, appuyé par des contrefiches, et qui porte en haut un demi-tonneau, solidement réuni à l'arbre. La projection de l'axe du tonneau sur le roc a été prise, par M. Selander, pour centre de la station, et nous l'avons prise également. Nous avons observé de KAAKAMA-VAARA l'angle formé entre le signal de KIWALO et la flèche de l'église de district de TORNEA. Nous eûmes primitivement l'intention de pointer d'ici encore le signal de KOKKO-MÄKI. Mais il était invisible, parce qu'il se projetait sur une forêt. Dans le triangle supplémentaire, KAAKAMA-VAARA — KIWALO — KOKKO-MÄKI, il n'y a par conséquent que deux angles mesurés, savoir sur KIWALO et sur KOKKO-MÄKI. Sur cette dernière station, la mesure a été faite le 11 septembre. Dans la tente, les angles ont été observés, comme l'occasion s'y prêtait, à différents jours dès que l'atmosphère était favorable. Je suis persuadé, que la dite jonction de la tente et de l'église de district est assez exacte, pour le but d'en déduire, avec une entière sûreté, la réduction des angles mesurés dans la tente aux angles correspondants à l'église. Je me crois donc finalement autorisé d'énoncer, comme résultat des opérations en question, que les angles du triangle KIWALO — KAAKAMA-VAARA — TORNEA, qui produit la jonction directe entre les travaux suédois et finlandais, ont été déterminés avec une exactitude suffisante. Après ces anticipations, je reprends le fil de ma narration.

M. Wagner et moi, nous quittâmes TORNEA, pour nous rendre sur le terrain où la base suédoise

devait être mesurée. Selon notre opinion, nous avions à compter sur une absence de trois semaines. Néanmoins, les instruments, à l'exception de l'instrument universel, restaient placés sur les piliers de la tente. Or nous ne trouvâmes point d'emplacement sûr dans le voisinage, et il fallait en tout cas surveiller la tente, pour la mettre à l'abri de toute intention malveillante. En effet, il ne nous paraissait point propre, d'ôter la tente, vu que le remplacement aurait fait perdre trop de temps. Le sous-officier fut instruit de prendre sa demeure dans la tente, durant notre absence, et de ne la quitter jamais, qu'après avoir trouvé un remplaçant fidèle. L'instrument universel nous accompagna. Ayant suivi la route qui longe le bord oriental de la rivière, nous déposâmes nos instruments à KARUNGI. Nous traversâmes ici la rivière et le soir nous arrivâmes à la poste suédoise FRANKILA, où nous attendait M. Selander qui avait pris la route occidentale. A partir de FRANKILA, nous fîmes le voyage ensemble, et l'autre jour après midi nous arrivâmes à la station MATARENGI, située près de ÖFVER-TORNEA. C'est ici que nous rejoignîmes M. Skogman qui avait conduit l'appareil de la base jusqu'à cette place.

Le terrain choisi par les géomètres suédois et qui avait été préparé avant notre arrivée, par les soins de M. Skogman, se trouve sur le sol finlandais, vis-à-vis de l'église suédoise d'ÖFVER-TORNEA. Il est éloigné d'une verste, en ligne droite, de la montagne AVASAKSA connue depuis le temps de MAUPERTUIS, et suit le bord oriental de la rivière, en se dirigeant de NNO. à SSE. entre les deux cours-de-paysan nommées IVARI et KESKIRAHITA. Les points extrêmes de la base étaient déjà marqués sur le terrain, par des moyens analogues à ceux qui avaient été employés en Norvège et dont j'ai parlé dans mon rapport de l'année passée. Il n'y avait que cette différence, que les deux blocs de pierre et les boulons scellés ne sortaient pas au-dessus du sol. Nous commençâmes nos travaux immédiatement après notre arrivée. Le 3 et le 4 août nous comparâmes nos perches à l'étalon normal, et nous examinâmes, pour les différentes perches, le parallélisme des tables, à l'aide desquelles le nivellement se fait, avec l'axe principal de la perche. Ces travaux préparatoires s'exécutaient dans une grande pièce de la station suédoise à MATARENGI. Les travaux faits, les perches furent transportées de l'autre côté de la rivière et vers l'extrémité septentrionale de la base, d'où devait commencer la mesure effective. Sans compter les hommes destinés au transport des trépieds et des perches, nous étions d'abord 4 personnes occupées de la mesure, savoir MM. Selander, Skogman, Wagner et moi. Nos occupations se partageaient de la manière suivante. M. Wagner avait à pointer les perches par le théodolite, afin qu'elles fussent placées dans la direction de la base. MM. Selander et Skogman rectifiaient l'emplacement des perches; moi j'avais à placer le niveau et à en faire jouer la bulle. M. Selander et moi nous avions à faire toutes les lectures des divisions et à les écrire dans nos deux journaux, en comparant les lectures pour chaque perche. M. Skogman, appelé par le gouvernement suédois pour participer à un voyage autour du monde, se vit forcé de nous quitter

à une époque où la première mesure n'avait pas encore atteint la moitié du chemin. Après son départ, M. Selander et moi nous nous chargeâmes de sa besogne, en sus de la nôtre. La nature du terrain présentait par-ci par-là quelques difficultés. Le sol était en général très-solide, mais il y avait des endroits marécageux. Il n'était guère possible de passer ces endroits qu'en faisant des pilotis, pour supporter les trépieds. Ce moyen, quelque dispendieux qu'il fût quant au temps, nous procura cependant une position suffisamment stable de nos perches, pour éloigner tout doute sur la sûreté de la mesure. En partant de l'extrémité septentrionale, nous plaçâmes la première perche le 5 août à 6 heures du soir, et le 12 août nous arrivâmes par la 760^{me} perche tout près de l'autre extrémité; car il ne nous restait qu'à mesurer un petit intervalle de 6 pouces. Le même soir, notre appareil fut reconduit à l'extrémité septentrionale. L'autre jour, nous commençâmes la seconde mesure, et après 7 journées de travail nous touchâmes l'autre extrémité une seconde fois, le soir du 19 août. Le même soir nous rentrâmes à MATABENGI avec tous nos bagages. Les deux jours suivants, les perches furent comparées de nouveau, la position des tables de nivellement fut réexaminée. La température moyenne dans les comparaisons, avant l'opération, avait été $+ 18^{\circ}45$ C., après l'opération $+ 14^{\circ}09$ C. La moyenne des deux valeurs $+ 16^{\circ}27$ C. est à $0^{\circ}02$ près égale à la température normale $+ 13^{\circ}0$ R. = $16^{\circ}25$ C. de l'étalon normal de Poulkova. La température moyenne des perches, pendant la première mesure de la base, avait été $+ 14^{\circ}65$ C., pendant la seconde $+ 14^{\circ}30$ C. La moyenne des deux $+ 14^{\circ}47$ C. est plus petite de $1^{\circ}78$ C. que la température normale de l'étalon. Chaque perche étant de 2 toises, nous avons approximativement la longueur de la base égale à 1520 toises. J'ai fait le calcul de mes deux journaux et j'ai trouvé que les deux mesures s'accordent à 2,34 lignes près ou à $\frac{1}{561000}$ de la longueur. Ce résultat n'est cependant pas encore définitif, car il peut être sujet à une petite modification, soit en le combinant avec le résultat que donneront les journaux de M. Selander, soit par une détermination plus exacte du coefficient de dilatation qui a été supposé, dans mes calculs, 0,0000126 pour 1° C., d'après Baily. Après avoir terminé tous les travaux qui se rapportaient à la mesure de la base, nous quittâmes, M. Wagner et moi, ÖFVER-TORNEA. M. Selander resta encore quelque temps dans ces endroits, pour terminer la jonction de la base avec les triangles principaux suédois, travail qu'avait commencé M. Skogman. L'appareil de la base resta aux soins de M. Selander, et ne me fut remis qu'après mon retour à Stockholm.

M. Wagner et moi nous partîmes de MATABENGI l'après-midi du 21 août, en traversant la rivière pour venir à la station finnoise JURVA. D'ici nous prîmes le grand chemin du côté oriental et nous arrivâmes le 22 à KARUNGI, d'où nous entreprîmes l'expédition de KAAKAMA-VAARA déjà mentionnée. Après 3 jours nous fîmes de retour à TORNEA.

Pendant notre séjour prolongé à TORNEA, nous continuâmes les observations astronomiques et, soit de

notre tente, soit à KOKKO-MÄKI, la mesure des angles qui effectuent la jonction entre les triangles suédois et finlandais. La saison n'étant pas assez favorable pour les observations astronomiques, la clôture en fut arrêtée plus longtemps que nous n'avions attendu. Cependant nous pouvions, à cette époque, en profitant de l'obscurité des nuits observer dans le premier vertical même de faibles étoiles, et nous parvîmes à terminer nos observations, au complet désiré, jusqu'au dernier départ du bateau à vapeur.

Je me sens engagé à mentionner en peu de mots les travaux suédois de cet été et qui se rapportent à la clôture des opérations de la mesure de degrés. Après l'achèvement de la mesure de la base, M. Selander continua la mesure des angles, commencée par M. Skogman, et qui avaient pour but de réunir la base au côté principal PULLINKI-ÄVASAKSA. Il fallait employer 5 points auxiliaires et le nombre des stations s'élevait à 9, en y comprenant les deux stations de la base et les deux stations principales. Après avoir exécuté ces travaux, M. Selander se rendit à HAPARANDA où il arriva assez tôt pour compléter, jusqu'au dernier départ du bateau à vapeur, la série de ses observations relatives à la latitude. En comparant finalement les travaux effectivement exécutés avec le but indiqué des deux entreprises, je trouve, que toutes les opérations qu'avait réclamées la prolongation de la mesure de degrés jusqu'à l'extrémité septentrionale de l'Europe, ont été entièrement terminées en 1851.

Après avoir soigneusement placé les instruments dans les boîtes et après avoir transporté ces boîtes à bord du bateau à vapeur TUULE, arrivé le 19 septembre, nous commençâmes notre voyage de retour le soir du 23 septembre et nous arrivâmes, après un trajet non interrompu de 8 jours, le soir du 10 octobre à Stockholm. Quant à la continuation ultérieure de notre voyage, nous n'attendions point de difficultés en comptant, d'après le programme publié, de pouvoir partir le 18 octobre avec le dernier bateau à vapeur. Nous étions dans cette illusion jusqu'à l'arrivée du bateau. Mais le capitaine du bateau apporta la nouvelle que, quoique la communication avec Abo continuât encore pour quelque temps, cependant la communication entre Abo et Pétersbourg avait cessé avec le dernier voyage. Le plan de notre retour ayant échoué, il nous fallait faire un nouveau. S'il ne s'agissait que du voyage des personnes, nous aurions accompagné le bateau à vapeur jusqu'à Abo, et de là nous aurions pu continuer le voyage de Pétersbourg par le chemin de terre. Mais nous nous sentions obligés de reconduire les instruments à Poulkova, avant l'arrivée de l'hiver. Quelques-uns de nos instruments devaient être soumis à une examination ultérieure, avant de commencer le calcul définitif des matériaux d'observation et de mesure. J'ai déjà indiqué les objets de cette examination, dans mon rapport de l'année passée. Nous hésitâmes d'envoyer les instruments par un vaisseau à voiles, et de faire nous-mêmes le voyage par terre, en traversant la Finlande. Car de la sorte le traitement soigné de nos boîtes, à l'occasion de l'emplacement dans le vaisseau et en les en faisant sortir, ne nous paraissait guère garanti. Même dans le cas d'un accident, il n'y avait point de perspective, qu'on prendrait un soin particulier de

nos boîtes non seulement de grande valeur, mais, dans notre idée, même inappréciables. Après une consultation réitérée avec les autorités russes, présentes à Stockholm, nous résolûmes de nous embarquer avec nos instruments à bord d'un vaisseau à voiles. Mais il était difficile de trouver, à cette saison, une telle occasion et à des prix modérés. Enfin nous la trouvâmes, et je fis assurer tous nos instruments et l'appareil de la base. Après avoir transporté tous nos effets à bord du vaisseau, nous partîmes le 16 octobre. Le vent étant favorable, quoique violent, nous jetâmes l'ancre à la rade de Kronstadt déjà le 19. Le temps orageux empêchait la douane d'expédier le vaisseau. Nous perdîmes deux jours et ce ne fut que le 21 que nous touchâmes la terre à Kronstadt. L'autre jour, après une absence de 5 mois, nous arrivâmes à l'Observatoire, avec tous nos instruments bien conservés.

Poulkova le $3\frac{1}{10}$ décembre 1851.

.

L i n d h a g e n.



A D D I T I O N C.
R A P P O R T D E M. P R A Z M O V S K I
S U R
L'EXPÉDITION EN BESSARABIE DE 1852.

(Voir: p. xxxvi de l'Introduction.)

Rapport fait à M. le Directeur de l'Observatoire central sur les travaux de l'Expédition de Bessarabie, entreprise en 1852, pour terminer les opérations de la mesure de l'arc du méridien. Par A. Prazmovski, astronome de l'Observatoire de Varsovie.

Les travaux de la mesure de l'arc colossal du méridien qui traverse les régions septentrionales de la Norvège et de la Suède et toutes les provinces occidentales de la Russie, touchaient à leur fin. Pour donner le cachet de la dernière exactitude aux travaux russes, il fallait répéter les observations astronomiques sur quelques points méridionaux de cet arc, afin de les mettre au niveau de l'exactitude avec laquelle les travaux de la partie boréale avaient été exécutés. Une expédition devait se rendre, en été 1852, au midi de la Russie, pour faire les observations astronomiques requises. En même temps, l'expédition devait remesurer la base extrême méridionale, vu que la mesure antérieure présentait quelques petites incertitudes.

Appelé par Votre confiance à la place de chef de l'expédition, je me rendis de Varsovie à Poulkova, déjà en juin, pour assister aux préparatifs de l'expédition.

MM. Wagner, astronome à Poulkova, Gamov, officier du corps des topographes, et Butz, mécanicien, m'avaient été désignés pour collaborateurs. L'appareil qui devait servir pour remesurer la base de TASCUNAR, près d'ISMAIL, se trouvait à Jékaterinoslav, entre les mains du major-général Vrontchenko. Cet appareil, ainsi que l'étalon qui l'accompagnait, ayant pu subir des dérangements, par suite de longs voyages et d'un usage de plusieurs années, il fallait l'examiner et corriger sur place. Notre mécanicien, muni d'un atelier ambulancier, était à même de remettre l'appareil en bon état et de faire de petites réparations aux instruments.

Une nouvelle règle normale, étalon à bouts fixes, soigneusement comparée à l'étalon primitif de Poulkova, avait été expédiée pour Moscou, sous la surveillance d'un sous-officier topographe, par le chemin de fer, au milieu du mois de juin, et de là elle devait être transportée par un voiturier, toujours sous la même

surveillance personnelle, à Jékaterinoslav, et servir à la vérification de l'ancien étalon, envoyé de Poulkova déjà en 1848.

Voici l'itinéraire projeté et le plan des travaux de l'expédition.

Nous devons nous rendre par Moscou à Jékaterinoslav, exécuter les comparaisons de l'ancienne règle normale avec l'autre, nouvellement envoyée; nous acheminer à ISMAÏL, avec tout l'appareil de la base; faire la détermination de la latitude et de l'azimut à STARO-NEKRASSOWKA, extrémité australe du grand arc; puis mesurer la base de TASCHEUNAR. Enfin, sur notre retour, nous avons à passer par SSUPRUNKOWZI, pour déterminer la latitude de ce point.

La latitude de STARO-NEKRASSOWKA devait être fixée, avec un soin tout particulier, par les deux méthodes des distances zénithales méridiennes et des passages observés au premier vertical.

Pour l'exécution des travaux astronomiques nous étions munis des appareils suivants:

1. Un *cerce vertical de Repsold* de 14 pouces de diamètre avec 4 microscopes micrométriques. La lunette non brisée de 27 pouces de foyer était à l'extrémité de l'axe; objectif de 2 pouces, grossissements de 45 et 90 fois. Cet instrument avait servi en 1851 et 1852 à la détermination des latitudes de TORNEA et de FUGLENAES.

2. Un *instrument universel de Repsold* à deux microscopes micrométriques pour chaque cerce. Le cerce vertical avait 10 pouces de diamètre, le cerce horizontal 12 pouces; lunette brisée, de 22½ pouces de foyer et 22 lignes d'ouverture, grossissement de 54 fois. Le renversement très-facile rendait cet instrument tout-à-fait propre aux observations du premier vertical.

3. Un *théodolite* de 8 pouces d'Ertel.

4. Quatre *chronomètres* dont deux réglés sur le temps sidéral, deux autres sur le temps moyen.

5. Deux *baromètres* de voyage.

6. *Thermomètres*.

7. Différents *appareils auxiliaires* tant pour les observations astronomiques, que pour la mesure de la base.

8. Deux *statifs transportables*, mais d'une extrême solidité, pour les deux instruments principaux.

Les boîtes des instruments furent emballées et placées avec les plus grandes précautions, pour qu'elles pussent supporter un long voyage en tarantass (voiture à longs brancards en bois), à travers un pays dépourvu en partie de bonnes routes. Les mêmes deux voitures, devaient servir pour les observateurs. L'appareil de la base avait son char à ressorts à lui.

Le 20 juillet (1 août) 1852 nous nous mîmes en route par la chaussée de Moscou, où nous arrivâmes le 24 juillet (5 août).

En arrivant à Moscou, notre premier soin fut de nous assurer, si les instruments avaient bien supporté le voyage. Pas une vis n'était dérangée, pas une ficelle cassée. L'emplacement et l'emballage des instruments avaient été parfaits sous tous les rapports.

A Moscou nous fûmes obligés de nous arrêter deux jours, pour remplacer par de nouvelles roues celles d'un de nos tarantass, qui avaient été fortement endommagées dans ce voyage de 700 verstes. Le 2 (14) août à midi nous parvinmes à Jékaterinoslav.

A notre arrivée, la règle normale n'était pas encore parvenue au lieu de sa destination. D'après le rapport du topographe qui accompagnait l'étalon, nous l'avions précédé au moins d'une semaine. Le temps nous étant précieux, une semaine de la meilleure saison pour les observations perdue en inactivité, dans l'attente de l'arrivée de la mesure normale, aurait pu en effet entraver la marche de nos opérations. Cette considération nous décida à quitter Jékaterinoslav avant l'arrivée de la nouvelle règle normale, et de remettre les comparaisons des deux étalons à l'époque où ils se trouveraient sur le lieu de la base à mesurer, avec tout l'appareil. Aussi le général Vrontchenko s'était-il chargé d'expédier le nouvel étalon à ISMAÏL simultanément avec les règles de l'appareil de la base.

Par suite de pluies abondantes, les routes dans les steppes étaient devenues à peine praticables, surtout pour nos lourds équipages. Le voyage de Jékaterinoslav à Odessa ne se fit que lentement, par la nécessité de s'arrêter dans les nuits les plus obscures, là où pendant le jour on trouvait à peine le moyen de passer.

Ce n'est que le 12 (24) août que nous arrivâmes à ISMAÏL. Je ne puis passer sous silence le zèle des autorités tant civiles que militaires à Ismaïl, à nous aider dans les arrangements pour accélérer la marche de nos travaux. Sans cette coopération active, nous aurions risqué d'éprouver des lenteurs qui auraient pu être funestes à la réussite de notre entreprise.

Le jour même de notre arrivée nous nous rendîmes à STARO-NEKRASSOWKA. Le lendemain dans la matinée, les matériaux pour la construction de l'observatoire temporaire et d'un pilier maçonné, pour l'instrument universel, furent transportés à STARO-NEKRASSOWKA; les six hommes de la milice intérieure, destinés à nous aider et à surveiller les instruments, étaient présents.

L'instrument universel devait servir à déterminer la latitude, tant par les distances zénithales méridiennes, que par les observations au premier vertical. L'emplacement de deux instruments pour les observations des distances zénithales sous la même tente était impossible. C'est pourquoi je me décidai à observer en dehors de l'observatoire, en réservant le centre de la station et de la tente au cercle vertical de Repsold. Le pilier de mon instrument universel était placé à l'ouest du centre de la station, près de la tente, dans une distance de $7\frac{1}{2}$ pieds du centre.

La solidité du pilier était une des conditions les plus importantes pour l'exactitude des observations au premier vertical. J'ai pris toutes les précautions possibles pour ce but. Une excavation de trois pieds environ de profondeur a été creusée dans le sol qui était d'une fermeté remarquable (terre glaise). Au fond, on a enfoncé trois pilotis en bois dur, d'un pied et demi de long. Tout ce fond a été couvert d'une couche d'un excellent mortier en chaux et sable. Un bloc d'une pierre calcaire très-poreuse, à deux surfaces horizontales, a été placé dessus. Sur le bloc j'ai fait sceller en mortier un cube de la même pierre, et sur cette pierre une dalle, d'un calcaire plus dur, qui devait servir de base à l'instrument.

Les observations devaient commencer avant que le mortier eût le temps de sécher complètement, surtout celui qui se trouvait sous terre. J'espérai que les trois pilotis produiraient une position tout-à-fait stable du pilier. Si le changement hygrométrique du bois pouvait donner quelques petits mouvements au pilier, ils devaient être d'une marche régulière, et par cela même peu à craindre. L'expérience a justifié l'attente. Le pilier était d'une solidité qui ne laisse rien à désirer.

Ma première observation préalable date du 16 (28) août. Nous avons commencé les observations régulières le 19 (31) août.

Le temps assigné à notre expédition était trop court, pour que nous pussions consacrer un temps considérable aux observations dans un même endroit. A ISMAÏL, j'avais à déterminer la latitude géographique avec l'instrument universel, par les distances zénithales et par les passages, ainsi que l'azimut et le temps. J'ai donc été obligé de me restreindre à un nombre modique d'observations. Pour les distances au zénith, je me suis posé, comme minimum, quatre journées d'observations, et de faire le plus grand nombre d'observations des différentes étoiles principales, guidé toutefois dans le choix des étoiles par leur position symétrique des deux côtés du zénith. Chaque jour j'ai changé le lieu du zénith sur le limbe de 45 degrés.

Voici la liste des étoiles choisies pour les deux instruments du méridien:

<i>au Nord.</i>	<i>z =</i>	<i>au Sud.</i>	<i>z =</i>
α Cephei	16° 38'	α Coronae	18° 7'
α Ursae majoris	17 12	α Bootis	25 23
β Ursae minoris	29 25	α Ophiuchi	32 40
δ Ursae minoris sub polo . .	41 16	α Aquilae	36 51
Polaire	44 40	α Orionis	37 58
β Ursae minoris sub polo . .	59 55	β Aquilae	39 18
α Ursae majoris sub polo . .	72 8	α Canis minoris	39 44

au Sud.

	$z =$
δ Aquilae	42° 31'
δ Orionis	45 44
α Aquarii	46 22
β Orionis	53 43
α Canis majoris.	61 51
α Scorpii	71 26.

A l'exception de la polaire, toutes les autres étoiles ont été observées près de la culmination. Dans les quatre journées du 31 août au 3 septembre, j'ai réuni 34 mises d'onze étoiles situées au sud du zénith, et 27 mises de six étoiles situées au nord du zénith. La mise était composée de quatre pointages, savoir de deux pour chaque position du cercle.

La correction du chronomètre a été déterminée chaque jour, à l'aide des distances zénithales à l'est et à l'ouest du méridien, par les deux astronomes, chacun observant le temps avec son instrument. La comparaison des deux chronomètres donnait le contrôle des deux séries.

M. Wagner, consacrant tout son temps aux uniques observations des distances zénithales, avec le cercle vertical de Repsold, a pu disposer ses observations méridiennes d'une manière plus symétrique et plus élégante, relativement au zénith. Ses observations se partageaient, en outre, en deux groupes distincts, donnés par le changement de la position de l'objectif et de l'oculaire aux deux extrémités du tube. Depuis le 31 août n. st. jusqu'au 18 septembre, M. Wagner a pu réunir au delà de 130 mises, à peu près également disposées par rapport au zénith et dans les deux groupes indiqués. Cette belle série d'observations présente toutes les conditions de l'élimination des erreurs dans l'instrument et dans la réfraction.

Ma série, quoique moins grande et moins élégante, présente néanmoins les conditions requises pour cette élimination. Les erreurs de division sont éliminées, pour la plupart des étoiles, par la distribution régulière sur le cercle, et leur influence sur la latitude est sensiblement évanouissante, à cause de l'égalité presque parfaite des distances zénithales moyennes au sud et au nord du zénith.

Je me suis fixé le minimum des observations à faire au premier vertical à six journées. Voici les étoiles choisies, leurs distances au zénith et le nombre d'observations que j'ai faites.

	$z =$	
22 Andromedae	0° 5'	observée 5 fois
ρ Cygni	0 24	» 6 »
β Aurigae	0 25	» 6 »
δ Cygni	0 34	» 6 »
α Cygni	0 35	» 8 »
3 Lyræ	1 35	» 1 »

L'étoile 3 Lyrae n'a été observée qu'une fois. D'abord son passage au vertical est tombait avant le coucher du soleil. L'étoile, quoique visible (5^{me} gr.), était excessivement faible et son passage au vertical ouest tombait entre les autres passages. Ce n'était qu'avec peine qu'on pouvait parvenir à l'observer. J'ai préféré de négliger cette étoile.

J'avais établi une mire dans la direction occidentale du premier vertical, dont l'azimut a été déterminé par la mesure de l'angle entre la mire méridienne et celle-ci. Cette mire servait de point de repère, pour contrôler ou produire l'azimut invariable de l'axe optique de l'instrument. Le 5 septembre j'ai fait les premières observations des passages, le 18 les dernières.

Pour déterminer l'azimut d'un des sommets de triangle du premier ordre, dans ce climat où les images des objets terrestres distants sont rarement tranquilles, j'ai préféré d'observer l'azimut d'une mire pas trop éloignée, donc mieux visible, et de le transporter au point trigonométrique par l'angle intermédiaire mesuré avec soin. Dans ce but, j'ai fait enfoncer au nord de l'observatoire, à une distance d'au delà d'une verste, un pieu sur lequel se trouvait un carré noir, d'un pied de côté, et au milieu duquel j'ai fait placer un autre carré blanc de deux pouces de côté. La déviation de cette mire du méridien était de quelques minutes. Le pieu était solidement fixé dans le sol très-dur. S'il y avait un déplacement du pieu dans le sol (ce qui n'aurait pas été étonnant dans un pays, où les pluies très-rares permettent au sol de sécher si fortement qu'il fait des crévasses de plusieurs lignes de large et d'une étendue considérable), un tel déplacement s'éliminait par les mesures de l'angle entre la mire et le clocher de NOWO-NEKRASSOWKA, point du premier ordre; mesures entreposées entre les déterminations de l'azimut.

L'azimut a été déterminé par 12 mises, dans lesquelles la polaire a été observée deux fois et la mire autant de fois, pour chaque position du cercle. Le premier pointage sur la mire précédait, le second suivait les deux observations de la polaire. L'angle entre la mire et le clocher a été déterminé par le même nombre de mises.

En 20 jours nous parvinmes à réunir un nombre assez imposant d'observations des différents genres, grâce au beau temps qui nous favorisait. Effectivement, il n'y a eu qu'une seule journée qui ne soit pas remplie dans nos journaux. Dans quelques journées, où le ciel était partiellement couvert, il s'éclaircissait le plus souvent, ou laissait du moins d'assez grandes parties découvertes, pour en pouvoir profiter. Aussi n'avons-nous laissé échapper aucune occasion qui pouvait servir à faire avancer notre travail. Les avantages d'un climat méridional étaient cependant contrebalancés par de graves inconvénients et qui provenaient des changements brusques de la température de l'air, et du rayonnement du sol aride et fortement échauffé par le soleil. Effectivement, à l'exception de quelques observations des étoiles voisines du zénith, dans lesquelles l'image était tranquille, pas une seule fois, dans les observations des distances zénithales, nous

n'avons vu ces images calmes et bien définies, si fréquentes, dans cette saison et à ces heures de la journée, dans les climats plus septentrionaux. Pour la mesure des angles entre les objets terrestres, les difficultés sont encore plus grandes. D'ordinaire, dans les jours sercins, le mirage borne l'horizon de tous côtés. On est entouré, en apparence, d'eaux ondulantes qui ne sont interrompues que par les irrégularités du terrain. Les petites élévations, kourgans, y forment autant d'îles. Tous les objets vus dans la lunette ne conservent rien de leurs formes naturelles, ils ont l'apparence d'images réfléchies par la surface de l'eau agitée par le vent. Il y a cependant, chaque jour, vers le soir, une brève époque d'un calme des images terrestres, mais qui est plus voisine du coucher du soleil et de plus courte durée, que dans les climats plus septentrionaux. Elle commence, en août, à peu près à une heure et demie avant le coucher du soleil. Pendant environ une heure les objets terrestres, surtout ceux qui s'élèvent un peu au dessus de la plaine, sont observables; mais les images presque totalement calmes ne durent que tout au plus une demi-heure.

Aussitôt que le soleil s'abaisse vers l'horizon, l'air se refroidit très-rapidement. Après le coucher du soleil la marche descendante du thermomètre est extrêmement rapide. Le sol rayonne vers un ciel très-transparent et resplendissant, qu'on peut comparer au ciel des nuits d'hiver de nos climats septentrionaux. Ordinairement, bien avant minuit l'humidité sature l'atmosphère, et la rosée couvre l'instrument en telle abondance, que bientôt l'objectif cesse d'être transparent et qu'il faut l'essuyer chaque moment. Parfois, une ou deux minutes suffisaient pour que l'étoile disparût de nouveau. Enfin, malgré le plus beau ciel en apparence, il fallait souvent suspendre les observations.

Pendant que nous étions, M. Wagner et moi, occupés des observations astronomiques, le mécanicien de l'expédition travaillait à mettre l'appareil de la base en bon état. L'appareil, corrigé dans toutes ses parties, fut transporté à ISMAÏL et le comparateur disposé dans un grand salon du club, localité très-avantageuse pour notre but et qui avait été mise, avec une grande complaisance, à notre disposition. Le salon avait 8 sajenes (56 pieds) de long sur 7 sajenes (49 pieds) de large; les fenêtres donnaient au midi; elles étaient petites et très-basses, de manière que le soleil ne donnait que sur une petite partie du plancher. Les règles étaient placées au milieu à une égale distance des murs opposés, et le comparateur disposé à côté.

Le 19 septembre n. s. dans la matinée, j'ai mesuré encore une fois l'angle entre la mire et le clocher de NOWO-NEKRASSOWKA. A 1 heure après midi nous quittâmes STARO-NEKRASSOWKA, pour retourner à ISMAÏL.

Le 20 et 21, les règles ont été comparées, à ISMAÏL, avec les deux mesures normales; la position des tablettes pour le niveau a été examinée et la valeur des divisions du levier de touche a été déterminée.

Le 22, les quatre règles placées avec toutes les précautions possibles dans leurs caisses, sans couvercles, ont été mises dans le fourgon attelé de six boeufs, et transportées au pas à TASCOUNAR.

Lors de notre premier passage par TASCOUNAR, en allant à ISMAÏL, nous avons fait une reconnaissance, pour visiter le terrain de la base et pour retrouver les extrémités qui avaient été soigneusement marquées dans le terrain. Un moment, nous eûmes de sérieuses craintes sur la conservation des points fixes. L'esprit de destruction de la population environnante (Boulgares) est tel, que des deux pyramides en pierres calcaires qui marquaient les deux bouts de la base, il n'est resté d'autres vestiges que des pierres éparses par-ci par-là. Les deux pyramides avaient été démolies jusqu'à la surface du terrain, destruction qui n'a point été dictée par le besoin des matériaux qui les composaient, parce que l'endroit abonde de la même pierre calcaire, mais par une simple malveillance. Les points fixes, se trouvant à 3 pieds au dessous du niveau du terrain, grâce à cette profondeur, sont restés intacts.

La journée du 25 septembre a été employée aux préparatifs de la mesure de la base. L'extrémité TASCOUNAR a été mise à découvert, la base alignée, le terrain nettoyé des plantes, dans la longueur présumée d'une journée de travail. Les hommes qui devaient nous aider, ont reçu des instructions, et ont été exercés chacun dans le travail qui lui était destiné pendant toute la mesure de la base. Nous avons adopté cette division du travail jusqu'aux moindres détails.

La division des occupations était la suivante. M. Wagner et moi nous placions les règles et faisons toutes les lectures. M. Gamow, placé à la lunette du théodolite, dirigeait l'alignement des règles, M. Butz plaçait les trépieds. Le topographe Blum transportait le grand niveau et le calait. Quatre hommes étaient employés pour transporter les règles, deux autres pour les trépieds, deux pour ôter le gazon.

Le 26 sept. n. s. à 6^h 40^m du matin la première règle a été posée, à 5^h 55^m du soir la 88^e. Le 8 octobre à 5^h 30^m du soir nous arrivâmes à l'extrémité Vaisa. La dernière règle étant posée, nous déterminâmes l'excédant, et la mesure de la base était achevée.

A l'exception du dernier jour où le ciel était couvert et la température constante pendant toute la journée, tout le reste de la base a été mesuré par un ciel clair et des changements rapides de température. Souvent, dans la matinée, notre travail a été interrompu par des bouffées d'un brouillard épais qui nous enveloppait. Cette couche de brouillard avait une épaisseur très-petite: on voyait le soleil et un arc-ciel blanc, quelquefois double, de l'autre côté.

Le 9 octobre les règles furent transportées à TASCOUNAR à l'école de la colonie. C'était au moment des vacances. Après avoir fait ôter les bancs, nous avons trouvé une localité assez commode et convenable pour les comparaisons, la température de cette chambre étant très-constante, grâce aux fenêtres basses, d'après la coutume dans toutes les habitations de cette contrée.

Les comparaisons ont été faites le 10 et le 11 octobre. La position des tablettes pour le niveau a été vérifiée. Les différences que nous avons trouvées, dans les règles, relativement à la comparaison antérieure à la mesure de la base, étaient sans conséquence sur la longueur de la base, car elles rentraient, par leur extrême petitesse, dans l'ordre des incertitudes inévitables. La température moyenne de la base s'est trouvée $+ 20,9^{\circ}\text{C}$., par conséquent de $4,65$ plus élevée que la température normale. La température des règles, dans les comparaisons, a été de $20,4$, seulement d'un demi-degré différente de la température des règles pendant la mesure. Toute réduction à faire tombe donc sur la dilatation de la règle normale, dilatation qui est déterminée à Poulkowa avec une grande précision.

Les deux extrémités de la base ont été recouvertes soigneusement de briques réunies par un mortier à chaux et à sable. Au dessus du niveau du sol, nous avons fait ériger deux élévations d'un saène et demi ($10,5$ pieds) de base sur un saène (7 pieds) de haut, entourées d'un fossé assez profond. Par ce moyen, il paraît que ces extrémités sont mieux assurées et plus faciles à retrouver que par les pyramides en pierres ou briques, plus faciles à détruire et plus séduisantes. Les autorités locales ont été engagées à garder nos deux kourgans contre la malveillance des habitants.

Vors ce temps les officiers du génie de la forteresse d'ISMAÏL avaient reçu l'ordre de donner des renseignements sur les matériaux propres à la construction du monument à élever, par ordre de Sa Majesté, à l'extrémité australe de l'arc du méridien.

Après une conférence avec M. le colonel Ассѣнов, M. Faszuvsky fut désigné pour se rendre sur place. M. Wagner et moi, accompagnés de M. Faszuvsky, nous allâmes à STARO-NEKRASSOWKA, pour indiquer l'endroit exact et les précautions à prendre dans l'érection du monument

Le centre de la station trigonométrique STARO-NEKRASSOWKA avait été désigné, d'après les arrangements faits par M. le lieutenant-général de Tenner, en 1848, par un cube de pierre calcaire d'un pied de côté, au milieu duquel se trouve un cylindre en plomb. Sur la surface de ce cylindre deux lignes se coupaient sous un angle droit. Ce cube est enfoncé, dans un massif, assez profondément au dessous de la surface du sol, à l'analogie des extrémités de la base.

Au moment de notre départ de STARO-NEKRASSOWKA la tente astronomique fut démontée, et le fondement de la station soigneusement recouvert de terre. L'ancien (starost) du village de STARO-NEKRASSOWKA fut instruit de surveiller l'endroit, et d'empêcher les fouilles et la destruction du pilier destiné à marquer plus visiblement le centre du monument à ériger. Néanmoins, trois semaines plus tard, le pilier n'existait plus, et les pierres en étaient dispersées à côté, le fondement étant resté intact.

Cette circonstance nous décida, afin de prévenir toute destruction ultérieure, d'engager les autorités de la forteresse à se charger de la surveillance du point fixe de STARO-NEKRASSOWKA.

Après avoir expédié l'appareil de la base à Jékaterinoslav, toujours sous l'inspection du sous-officier topographe Blum, notre tâche aux environs d'ISMAÏL était accomplie, et nous eûmes à nous acheminer le plus tôt possible vers notre second point astronomique, SUPRUNKOWZI, près de Kamenetz-Podolsk.

Nous quittâmes TASCHEOUNAR le 14 octobre n. s.; le 21 nous arrivâmes à SSUPRUNKOWZI, latitude $48^{\circ} 45'$. La saison assez avancée, le ciel uniformément couvert et l'air humide et brumeux donnaient peu d'espoir, pour finir en peu de temps les observations à faire dans cette station. Néanmoins, notre tente et nos instruments étaient disposés le plus tôt possible, et nous attendions le moment favorable pour commencer nos travaux.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma reconnaissance à M. Schidlovsky, propriétaire de SSUPRUNKOWZI, pour l'hospitalité avec laquelle il nous a accueillis. Les matériaux pour la construction de notre observatoire, les ouvriers à ses gages, tout fut mis à notre disposition avec le plus grand désintéressement.

Le 24 à midi le ciel s'étant éclairci, nous commençâmes nos déterminations de la latitude, par l'emploi des deux instruments pour la mesure des distances au zénith, en abandonnant les observations des passages au premier vertical, pour lesquelles la saison avancée ne promettait plus de résultat. Jusqu'au 26 les heures fréquentes d'un ciel clair nous permirent de faire une bonne récolte d'observations.

Le 27 octobre n. s., le ciel était couvert de nuages d'une teinte uniformément plombée pendant toute la journée. L'air était calme, tout présageait un temps pluvieux d'automne. Effectivement, vers le soir il a commencé à pleuvoir, le vent soufflant du nord-ouest. Vers 7 heures du soir une rafale venue du nord-est et accompagnée de coups de vent, d'une intensité tout-à-fait extraordinaire, arracha la toile de la tente astronomique, l'abattit sur l'instrument universel, et le renversa avec son statif.

Ces rafales se suivaient dans une direction qui faisait à peu près un angle droit avec celle du vent qui avait soufflé auparavant. L'autre instrument, le cercle vertical, était menacé d'un moment à l'autre. La présence d'esprit du soldat qui gardait la tente, le sauva. Ayant abattu les autres parties de la tente, il confia la garde des instruments à l'homme qui se trouvait avec lui, et accourut nous annoncer l'accident. Notre habitation était à 400 pieds au dessous du point trigonométrique dans un ravin, à une distance d'une verste et demie. La nouvelle de l'accident nous surprit ignorants de tout ce qui se passait sur les sommets des élévations qui nous entouraient.

Nous nous acheminâmes à l'instant, pour porter secours à nos appareils contre les effets ultérieurs de cet ouragan qui, comme nous l'avons su depuis, a ravagé l'île de Malte, Constantinople, Athènes, Odessa, renversant les monuments de l'antiquité et déracinant les forêts. Certes, ayant parcouru une étendue considérable du continent, l'ouragan a perdu de sa force. Ce n'était plus ce tourbillon qui renversait les

maisons et enlevait les arbres; mais toujours les coups de vent étaient plus que suffisants pour abattre la toile d'une tente supportée par une charpente assez solide, mais élevée sur le sommet d'une montagne.

L'accident arrivé à l'instrument universel était grave. L'effet de la chute avait été arrêté par le porte-microscope vertical et le cercle vertical divisé. Ces deux parties étaient courbées et il était devenu impossible de continuer l'observation des distances au zénith. Les autres parties de l'instrument paraissaient bien conservées.

Heureusement l'autre instrument qui était resté debout, n'avait souffert que de la pluie battante. Nous le transportâmes aussitôt dans notre logement, où toutes les parties furent soigneusement démontées, nettoyées, huilées et puis remises à leurs places. L'instrument n'avait rien souffert, même la collimation de la lunette était restée exactement zéro, comme avant l'événement. Rien n'empêchait par conséquent de continuer les observations avec cet instrument. Aussi M. Wagner a-t-il continué d'observer le 28 et 29 octobre, profitant de chaque moment, où le ciel découvert permettait de saisir des observations. Les jours couverts qui suivaient nous engagèrent à regarder nos observations comme terminées. En effet le froid, la neige, en un mot un hiver, commencé bien plus tôt cette année que d'ordinaire, ne nous promettait plus de ciel favorable. Les étoiles observées à Ssuprukowzi sont les suivantes:

<i>au Nord.</i>	=	<i>au Sud.</i>	=
β Cephei	21° 10'	α Andromedae	20° 29'
β Ursae minoris	26 0	α Arietis	25 59
γ Cephei	28 4	α Bootis.	28 48
δ Ursae minoris	37 51	α Tauri	32 32
Polaris	41 15	γ Pegasi	34 23
β Ursae minoris sub polo . .	56 30	ζ Aquilae	35 6
α Ursae majoris sub polo . .	68 42	α Ophiuchi	36 5
β Ursae majoris sub polo . .	74 5	α Aquilae	40 16
		α Orionis	41 23
		α Ceti	45 14
		γ Ceti.	46 8
		α Aquarii	49 47
		α^2 Capricorni.	61 45
		β Ceti	77 33.

De ces étoiles, j'ai observé en tout 16 mises de quatre pointages; M. Wagner a fait à peu près 40 mises. Ces nombres sont bien inférieurs aux nombres d'observations de STARO-NEKRASSOWKA. Néanmoins nous eûmes la conviction qu'elles suffiraient pour fixer la latitude à une fraction très-petite de seconde près, conviction que nous avait fournie le calcul des observations faites avec les mêmes instruments, soit à Poulkowa soit à STARO-NEKRASSOWKA.

Nous quittâmes donc SUPRUNKOWZI le 31 octobre n. s. Les routes ordinaires des steppes étant devenues presque impraticables, je tâchai de gagner la chaussée qui conduisait de Kobryn à Varsovie, et puis nous avons fait le détour par Varsovie pour revenir à Pétersbourg. Le 16 (28) novembre nous arrivâmes à Poulkowa.

Poulkowa, en février 1853.

A. Prazmovski.



A D D I T I O N E

relative à p. XXXIX de l'Introduction.

Résultats de l'expédition chronométrique exécutée en été 1854 entre les observatoires de Poulkova et de Dorpat.

L'expédition chronométrique entre POULKOVA et DORPAT, exécutée en été 1854 sous la direction de M. O. Struve, avait pour but de fixer exactement la longitude de DORPAT, point fondamental de l'arc du méridien, en partant de la longitude de POULKOVA déterminée par les expéditions chronométriques de 1843 et 1844 entre Poulkova, Altona et Greenwich. Quant à l'histoire de cette expédition les notices suivantes suffiront.

Les déterminations du temps absolu furent faites, soit à POULKOVA soit à DORPAT, par les deux astronomes de l'Observatoire central, M. O. Struve et M. Sabler, à l'exception d'un petit nombre d'observations exécutées par M. Döllen pendant l'intervalle dans lequel les deux observateurs échangeaient leurs stations. Car quoique l'équation personnelle relative des deux astronomes eût été déterminée directement avec le plus grand soin, il fut jugé cependant préférable d'en éliminer entièrement l'effet par le changement des observateurs sur les deux stations. Pour effectuer le transport du temps, 31 chronomètres ont fait 10 fois le voyage entre les deux observatoires, dans l'intervalle depuis le 26 juin jusqu'au 19 juillet, sous la surveillance de MM. Hübner et Parrot. La durée moyenne du transport du temps a été de 45 heures, entre les limites de 41,4 et de 47,3 heures.

Un des chronomètres, *Arnold et Dent 951*, ne servait pas proprement au transport du temps. C'est que, dans ce chronomètre, la balance à compensation avait été remplacée par une balance simple, de sorte que la marche subissait l'effet des plus petits changements de la température. Par ce moyen, ce chronomètre était entièrement propre à indiquer, par sa marche, les températures moyennes qui avaient eu lieu pendant les différents voyages, et à conduire à l'évaluation de l'influence de ces changements sur les chronomètres compensés. Or pour la plupart de ces chronomètres les coefficients de compensation, relatifs au chronomètre non-compensé *Arnold et Dent 951*, ont été déterminés exprès par des expériences directes, exécutées en hiver 1854 — 1855 par une période assez prolongée et dans des températures de $+ 5^{\circ}$ à $+ 25^{\circ}$ R., limites extrêmes que nous admettons dans nos expéditions chronométriques. Il est bien à re-

gretter, que quelques-uns de nos chronomètres, ayant reçu une autre destination immédiatement après la fin de notre expédition, n'ont pu participer aux dites recherches sur les coefficients thermométriques. Heureusement, pendant toute cette expédition, la température moyenne des différents voyages n'a été sujette qu'à des variations comparativement faibles. En effet, si nous déduisons la longitude uniquement des données que fournit le chronomètre non-compensé, nous trouvons, dans la moyenne de tous les voyages, une longitude qui est juste à 12^s près, et le plus grand écart que fournit un voyage isolé, en allant et revenant, ne s'élève pas encore à 40^s , tandis qu'un changement de température de 1° R. produit un changement d'environ 14^s dans la marche journalière de ce chronomètre non-compensé. Or dans les chronomètres compensés l'influence thermométrique n'est qu'une fraction minime, de peu de centièmes, de celle qui a lieu dans le chronomètre non compensé. C'est ainsi que nous nous croyons autorisés d'admettre que les longitudes obtenues par les horloges pour lesquelles le coefficient thermométrique n'a pas été déterminé, n'en sont point essentiellement affectées. En considérant encore que le défaut des corrections thermométriques a dû se prononcer dans l'accord moins satisfaisant des longitudes fournies par ces chronomètres, accord qui a servi à l'évaluation des poids relatifs des chronomètres, il est évident que le résultat définitif sera exact en dedans des limites indiquées par son erreur probable. En outre le grand nombre de voyages nous met en état de déduire indépendamment les coefficients de compensation, en les introduisant comme inconnues dans les équations de condition qui seront formées pour la déduction de la longitude. Effectivement aussi ce moyen a été employé dans nos calculs comme l'on verra dans l'exposé qui suit.

Presque tous les astronomes qui avaient participé dans l'expédition, ont aussi pris part dans les calculs: mais la majeure partie de ces calculs, et nommément le calcul des longitudes, a été exécutée par M. le Dr. Lindelöf actuellement professeur de mathématiques à l'Université de Helsingfors. Il a, en outre, le mérite d'avoir proposé une méthode particulière pour la déduction des longitudes. La notice suivante, que M. Lindelöf nous a communiquée contient l'analyse de cette méthode.

«Le problème de déduire d'une série de corrections d'un chronomètre, données alternativement pour deux lieux, la différence des longitudes, est proprement un problème indéterminé. Même dans la supposition que les corrections des horloges sont exactement déterminées, ce qui peut être atteint de très-près par des observations soignées, les marches de ces horloges pendant le transport de l'un des lieux à l'autre restent toujours indéterminables, parce que l'on ne connaît chaque fois que les sommes de deux marches successives, de sorte qu'on ne parvient qu'à un nombre n d'équations pour les $n + 1$ inconnues. Par conséquent il nous manque une équation et nous sommes forcés de suppléer à ce manque en introduisant une supposition arbitraire relative aux marches inconnues. Il s'agit de trouver une supposition plausible.

Posons qu'entre les deux lieux A et B , dont la différence en longitude est l , un nombre pair n

de voyages ait été fait, dans lesquels les corrections des horloges $c_1, k_1, k_2, c_2, c_3, \dots$ ont été déterminées alternativement en A et B . Désignons les intervalles des époques de ces corrections par $\tau_1, \rho_1, \tau_2, \rho_2, \dots$ et les marches moyennes dans l'unité du temps et qui appartiennent aux intervalles $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ conformément au tableau suivant :

Voyage	Lieu	Corr. de l'horl.	Intervalle du temps	Marche moyenne pour l'unité du temps.
I	A	c_1	τ_1	γ_1
	B	k_1	ρ_1	
II	B	k_2	τ_2	γ_2
	A	c_2	ρ_2	
III	A	c_3	τ_3	γ_3
	B	k_3	ρ_3	
IV	B	k_4	τ_4	γ_4
	A	c_4	ρ_4	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	A	c_{n-1}	τ_{n-1}	γ_{n-1}
$n-1$	B	k_{n-1}	ρ_{n-1}	
	B	k_n	τ_n	γ_n
n	A	c_n		

Avec ces notations nous avons, pour les $n+1$ inconnues, les suivantes n équations de condition auxquelles il faut satisfaire exactement :

$$\begin{aligned}
 l &= c_1 - k_1 + \tau_1 \gamma_1 \\
 &= c_2 - k_2 - \tau_2 \gamma_2 \\
 &= c_3 - k_3 + \tau_3 \gamma_3 \\
 &= c_4 - k_4 - \tau_4 \gamma_4 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &= c_{n-1} - k_{n-1} + \tau_{n-1} \gamma_{n-1} \\
 &= c_n - k_n - \tau_n \gamma_n.
 \end{aligned}$$

Évidemment pour trouver l , nous avons besoin d'une équation de plus, c. à d. il faut recourir à une hypothèse relativement à la dépendance réciproque des quantités $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$. Les considérations suivantes peuvent nous conduire à ce but.

Si l'on déduit la longitude des données fournies par les voyages I et II, en y adoptant une marche constante de l'horloge, on parvient à une valeur A_1 qui est liée, avec la valeur réelle de la longitude l , par l'équation :

$$A_1 = l + \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (\gamma_2 - \gamma_1)$$

La valeur de la longitude qui se trouve par une pareille combinaison des voyages II et III fournit l'équation:

$$B_1 = l - \frac{\tau_2 \cdot \tau_3}{\tau_2 + \tau_3} (\gamma_3 - \gamma_2).$$

Les voyages III et IV donneront: $A_2 = l + \frac{\tau_3 \cdot \tau_4}{\tau_3 + \tau_4} (\gamma_4 - \gamma_3)$

et les voyages IV et V: $B_2 = l - \frac{\tau_4 \cdot \tau_5}{\tau_4 + \tau_5} (\gamma_5 - \gamma_4)$

.....

La moyenne des valeurs $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ en leur attribuant les poids respectifs p_1, p_2, \dots sera

$$(l) = l + \frac{1}{\sum p} \left(p_1 \cdot \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (\gamma_2 - \gamma_1) - p_2 \cdot \frac{\tau_2 \cdot \tau_3}{\tau_2 + \tau_3} (\gamma_3 - \gamma_2) \dots \dots \dots \right. \\ \left. + p_{n-1} \cdot \frac{\tau_{n-1} \cdot \tau_n}{\tau_{n-1} + \tau_n} (\gamma_n - \gamma_{n-1}) \right).$$

Donc, en mettant $(l) = l$, nous supposons:

$$(1) \quad p_1 \cdot \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (\gamma_2 - \gamma_1) - p_2 \cdot \frac{\tau_2 \cdot \tau_3}{\tau_2 + \tau_3} (\gamma_3 - \gamma_2) \dots \dots \dots + p_{n-1} \cdot \frac{\tau_{n-1} \cdot \tau_n}{\tau_{n-1} + \tau_n} (\gamma_n - \gamma_{n-1}) = 0$$

et il faut déterminer les poids p_1, p_2, \dots de sorte que cette supposition devienne la plus acceptable.

Désignons les intervalles $\tau_1 + \rho_1 + \tau_2, \tau_2 + \rho_2 + \tau_3, \tau_3 + \rho_3 + \tau_4, \dots$

par T_1, T_2, T_3, \dots

et mettons $a_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{T_1 + \rho_1}, a_2 = \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{T_2 + \rho_2}, \dots, a_{n-1} = \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{T_{n-1} + \rho_{n-1}};$

c'est ainsi que notre équation (1) se transforme en

$$(2) \quad a_1 p_1 \cdot \frac{\tau_1 \cdot \tau_2 (T_1 + \rho_1)}{T_1 - \rho_1} - a_2 p_2 \cdot \frac{\tau_2 \cdot \tau_3 (T_2 + \rho_2)}{T_2 - \rho_2} + \dots \dots \dots + a_{n-1} p_{n-1} \cdot \frac{\tau_{n-2} \cdot \tau_n (T_{n-1} + \rho_{n-1})}{T_{n-1} - \rho_{n-1}} = 0.$$

Pour une marche uniformément accélérée ou retardée nous avons

$$a_1 = a_2 = a_3 \dots \dots \dots = a_{n-1}.$$

Mais si l'accélération ou la retardation de la marche augmente ou diminue uniformément, nous aurons dans un arrangement symétrique des voyages, c. à d. pour $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 \dots$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \dots$, les différences constantes

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 \dots \dots \dots$$

Voilà pourquoi l'hypothèse

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5 \dots \dots \dots + a_{n-1}}{\frac{n}{2}} = \frac{a_2 + a_4 + a_6 \dots \dots \dots + a_{n-2}}{\frac{n}{2} - 1}$$

me paraît très-acceptable, vu qu'elle est parfaitement exacte pour une accélération constante et encore

juste de très-près pour une accélération proportionnelle au temps. Dès qu'on admet cette hypothèse et en considérant l'équation (2) il faut déterminer les poids p_1, p_2, \dots de la manière suivante:

$$p_1 = \frac{T_1 - \rho_1}{(T_1 + \rho_1) \tau_1 \cdot \tau_2} \cdot \frac{K}{2}$$

$$p_2 = \frac{T_2 - \rho_2}{(T_2 + \rho_2) \tau_2 \cdot \tau_3} \cdot \frac{K}{2} - 1$$

$$p_3 = \frac{T_3 - \rho_3}{(T_3 + \rho_3) \cdot \tau_3 \cdot \tau_4} \cdot \frac{K}{2}$$

$$p_4 = \frac{T_4 - \rho_4}{(T_4 + \rho_4) \cdot \tau_4 \cdot \tau_5} \cdot \frac{K}{2} - 1$$

.....

K étant une constante arbitraire.

C'est ainsi que l'on parvient à la règle suivante pour combiner les longitudes obtenues dans les différents voyages. On calcule le poids de chaque longitude A, B, A_2, \dots par la formule $p = \frac{K \cdot (T - \rho)}{\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot (T + \rho)}$; puis l'on cherche, eu égard à ces poids, les moyennes $[A]$ et $[B]$ de tous les A et B ; la moyenne arithmétique de ces deux valeurs $l = \frac{[A] + [B]}{2}$ sera enfin la longitude définitive.

C'est d'après cette méthode que le calcul définitif a été fait, en tenant compte, pour tous les chronomètres dont les coefficients thermométriques avaient été déterminés, des corrections thermométriques, d'après les indications du chronomètre non-compensé. Après avoir obtenu les l que donnaient les différents chronomètres, il s'agissait encore de les réunir à une valeur finale L . Les erreurs probables ω des différents l furent trouvées par

$$\omega = 0,6745 \sqrt{\frac{\sum(\alpha v) + \sum(\beta w)}{\frac{n}{2} - 1} \sum \alpha + \frac{\frac{n}{2} - 2}{2} \sum \beta}$$

Dans cette expression v et w sont les écarts des A et B isolés de leurs moyennes $[A]$ et $[B]$, et α et β sont les poids correspondants, trouvés par la formule indiquée plus haut. Il ne s'agit pas ici de décider si les erreurs probables trouvées ainsi sont réellement celles des différentes valeurs des longitudes. Elles ne doivent servir qu'à fournir une mesure de l'exactitude relative des différents l , libre de toute estimation arbitraire. En tout cas l'erreur probable de la valeur finale L doit être déduite des écarts que présentent les différents l comparés à L , et non pas par la combinaison des erreurs probables des l , de quelle manière que ces erreurs eussent été trouvées.

Le résultat de ces calculs se trouve plus bas comparé avec le produit correspondant d'une seconde solution de ce problème indéterminé, basée sur les principes essentiellement différents que voici.

En considérant la courte durée de l'expédition entière, il paraissait permis de supposer pour les chronomètres dont la qualité distinguée était reconnue par des expériences répétées, une marche uniforme

uniquement troublée par les changements de température. En tout cas il valait la peine d'examiner, par les données présentes, jusqu'à quel point telle supposition était justifiée. Dans ce but le coefficient thermométrique pouvait être déduit des données que nous fournissent les voyages eux-mêmes, ce qu'on a fait pour tous les chronomètres, même pour ceux dont le coefficient thermométrique avait déjà été déterminé par la voie directe. La formation des équations de condition qui répondent à cette supposition se fait par le moyen suivant. Désignons la centième partie de la marche journalière du chronomètre non-compensé par γ . Ce γ indique la température moyenne d'une période avec une précision bien plus grande, qu'il n'était possible d'atteindre à l'aide d'observations directes du thermomètre. Avec cela γz exprime le changement dans la marche d'un chronomètre compensé, en désignant par z son coefficient thermométrique multiplié par cent. Soit maintenant $l = l_0 + x$ la différence en longitude des deux stations, et $m + y$ la marche du chronomètre compensé pour $\gamma = 0$, en désignant par l_0 et m des valeurs approximatives et par x et y les corrections de l_0 et m , corrections qui doivent être déduites de la totalité des observations. Dans ce cas, chaque transport du temps d'un lieu à l'autre, dont la durée est τ , conduit à une équation de la forme:

$$n = \pm (l_0 + x) + (m + y + \gamma z) \cdot \tau$$

où n exprime la différence des corrections de l'horloge obtenues sur les deux lieux. Le nombre de ces équations est égal au nombre des transports du temps, dans notre cas à 10. En supposant que l'erreur probable d'un transport est proportionnel à la durée du transport, nous avons le poids relatif de chaque équation et par conséquent toutes les données requises pour trouver les inconnues x , y , z d'après la méthode des moindres carrés.

Le tableau suivant contient sous I les résultats obtenus par la dernière méthode et sous II ceux qui ont été déduits d'après la méthode de M. Lindelöf exposée précédemment. Notre savant calculateur remarque encore, qu'il s'était vu engagé à exclure de sa recherche le chronomètre *Dent 1978* qui, après avoir manifesté dès le commencement une marche très-mauvaise, s'était arrêté au troisième retour à Poulkova. Il rejeta en outre les trois premiers transports de *Pihl 14*, dans lesquels ce chronomètre a eu une marche très-irrégulière, par suite de perturbations de cause inconnue, tandis qu'il manifestait, dans les voyages postérieurs, une régularité distinguée.

	I				II			
	x	ω	g	z	x	g	z	
1 Dent 1953	-0,23	0,077	1,685	-2,04	0,192	0,273		
2 Hauth 18	-0,32	0,086	1,337	-4,46	0,115	0,755	-3,81	
3 Frodsham 2506	-0,14	0,090	1,238	+0,87	0,061	2,646		
4 Dent 1761	-0,32	0,100	1,001	-1,61	0,138	0,523	-0,57	
5 Dent 2001	+0,34	0,102	0,963	+0,39	0,067	2,196		
6 Pihl 12	-0,07	0,108	0,911	-0,94	0,109	0,843		
7 Dent 1637	+0,19	0,115	0,754	-2,51	0,147	0,461	-1,13	
8 Frodsham 2492	-0,32	0,119	0,709	-0,14	0,118	0,712		
9 Dent 1998	+0,08	0,119	0,709	-0,56	0,165	0,367	-2,17	
10 Dent 1965	-0,44	0,120	0,699	-0,56	0,148	0,459	-0,86	
11 Dent 1624	-0,31	0,121	0,687	-0,98	0,130	0,594	-1,11	
12 Dent 1901	+0,10	0,126	0,629	+3,05	0,145	0,477	+0,97	
13 Dent 1975	-0,03	0,134	0,554	+1,24	0,071	1,970	+1,22	
14 Frodsham 2569	-0,35	0,141	0,504	-0,03	0,156	0,411		
15 Dent 1910	+0,10	0,144	0,485	-0,46	0,112	0,794	-0,58	
16 Dent 1957	-0,51	0,147	0,463	-1,05	0,125	0,640	-0,86	
17 Dent 1968	-0,24	0,158	0,400	-4,71	0,074	1,830	-3,66	
18 Hauth 51	+0,43	0,169	0,351	+0,37	0,144	0,480	-0,78	
19 Dent 1965	-0,59	0,185	0,292	-1,63	0,220	0,206	-1,21	
20 Dent 1913	+0,05	0,193	0,268	-1,15	0,190	0,278	+1,00	
21 Dent 19968*	-0,49	0,193	0,268	-1,33	0,121	0,682		
22 Kessels 1297	+0,09	0,212	0,223	+0,58	0,079	1,622	-0,69	
23 Dent 1941	-0,52	0,231	0,188	-1,34	0,168	0,354	-1,48	
24 Pihl 14*	-0,02	0,254	0,155	-1,30	0,128	0,606		
25 Dent 1942	-0,58	0,236	0,152	-0,49	0,177	0,320		
26 Dent 1985	+0,01	0,295	0,126	-0,59	0,155	0,417	+1,08	
27 Dent 19622*	-0,19	0,333	0,090	-4,25	0,368	0,074		
28 Brockbanks	+0,88	0,377	0,070	-0,08	0,268	0,167		
29 Kessels 1290	+1,18	0,619	0,026	+1,18	0,415	0,058		

Valeurs finales:

$$\begin{array}{l}
 15,937 \\
 -0,140 \\
 1,113 \\
 \mp 0,134 \\
 \mp 0,034
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 [g] \\
 X = \frac{[xg]}{[g]} \\
 [g^{\omega}] \\
 \omega = 0,6745 \sqrt[4]{\frac{[g^{\omega\omega}]}{28}} \\
 \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{[g]}}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 21,215 \\
 -0,099 \\
 1,382 \\
 \mp 0,150 \\
 \mp 0,033
 \end{array}$$

Dans notre tableau, x signifie la correction de la longitude supposée $l_0 = 14^m 25:00$ que fournit, pour chaque chronomètre, la combinaison de tous les voyages; ω indique l'erreur probable de cette correction déduite de l'accord des voyages isolés, et g le poids correspondant à cette erreur en mettant $g = 1$ pour $\omega = 0:1$; z est le coefficient de compensation, déduit pour I des données qu'offrent les voyages eux-mêmes, mais pour II par la recherche de ces coefficients faite exprès en 1855. Dans les deux tableaux les chronomètres sont rangés, de 1 à 29, d'après les poids donnés en I; les chiffres de la première colonne du tableau II indiquent la suite des chronomètres d'après la seconde recherche. Les trois chronomètres désignés par un astérisque sont des chronomètres de poche.

Une inspection attentive des deux tableaux précédents nous engage aux considérations suivantes. En premier lieu, concernant le résultat final, l'accord des deux valeurs $X = -0:140$ et $X = -0:099$ est non seulement satisfaisant, mais même surprenant, surtout dès qu'on se rappelle que ces deux résultats sont déduits par deux suppositions sur la marche des chronomètres, qui sont essentiellement différentes et même de quelque sorte opposées l'une à l'autre. Dans le tableau I, l'influence des changements de température a bien été dûment considérée, en y supposant, abstraction faite des températures, une marche constante de chaque chronomètre. Mais il est connu que souvent les chronomètres changent leurs marches peu à peu et d'une manière tellement régulière que les corrections des horloges, dès que la loi des changements est reconnue et que son effet est appliqué, jouissent d'un degré éminent d'exactitude. D'où suit qu'avec la connaissance de cette loi, ces chronomètres sont des horloges distinguées, mais que, sans elle, ils restent des pièces médiocres. L'expérience nous apprend encore qu'un changement de la marche est surtout à craindre pour le cas où un changement de l'état général de la pièce a eu lieu, ce qui se manifeste par exemple, même dans les meilleurs chronomètres, s'il n'ont été mis en mouvement que depuis peu de temps. En considérant maintenant, qu'un tel changement de l'état a eu lieu indubitablement dans notre cas où, après un repos absolu de plusieurs mois, les chronomètres ont été exposés à ces petits tressaillements continuels qui sont inévitables dans le transport par roulage, on se trouve engagé à admettre que l'hypothèse d'une marche uniforme, abstraction faite de l'action de la chaleur, ne peut que très-imparfaitement répondre à la réalité. Néanmoins cette hypothèse a été admise parce qu'il est clair que, par suite du grand nombre des transports du temps et par le changement des directions des voyages successifs, les irrégularités se prononcent bien par le manque d'accord dans les résultats isolés, tandis que ces mêmes irrégularités n'agissent que peu sensiblement sur la moyenne déduite de tous les voyages. Mais il faut convenir qu'en général, par rapport à cette source d'erreurs, l'emploi d'un plus grand nombre de chronomètres ne produit pas un effet correspondant à ce nombre, vu que, d'après l'expérience, la plupart des horloges sont sujettes à une accélération, et que la retardation ne se trouve que par exception. C'est

pourquoi, sous ce rapport et en général par rapport aux changements successifs dans les marches des chronomètres, la déduction II de M. Lindelöf est certainement préférable en répondant plus intimement à la nature de ces instruments. Cet avantage est cependant contrebalancé par la compensation thermométrique moins complète dans ce calcul. En effet pour 12 de nos 29 chronomètres, la compensation n'a pu être considérée, par suite du manque de données sur les coefficients thermométriques. Aussi pour les 17 autres horloges, il faut encore remarquer que la détermination des coefficients thermométriques a été basée sur des recherches postérieures aux voyages, de plus de six mois.

En résumant ce qui a été dit, on reconnaît que les deux déductions I et II se suppléent assez heureusement, vu que la partie faible de l'une constitue la partie forte de l'autre. Jusqu'à quel point les deux déductions répondent aux qualités individuelles des différents chronomètres, cela se comprend le mieux en comparant les erreurs probables assignées aux chronomètres dans les deux tableaux. Cette comparaison nous fournit en outre une base sûre pour apprécier les vertus et les imperfections des différentes pièces. Nous voyons p. e. que *Dent 1953* occupe dans I la première place, mais dans II la 25^{me}. Cela prouve que ce chronomètre conserve sa marche moyenne pendant longtemps, mais qu'il est fortement influencé par la température, comme le $\alpha = 2,04$ le prouonce. Le cas opposé se présente dans *Kessels 1297*, le 22^{me} dans I et le 5^{me} dans II; c'est que sa marche a été sujette à une altération successive notable. Les deux longitudes qu'ont données ces deux horloges, s'accordent aussi bien qu'il fallait l'attendre d'après les erreurs probables. Il serait cependant difficile d'indiquer précisément la longitude qui répond au témoignage combiné de ces deux chronomètres. Cette considération nous fait apprécier le mérite de l'accord surprenant que présentent les deux moyennes finales des deux séries. Elle nous dispense de l'obligation, sans cela inévitable, de chercher une autre déduction des résultats finaux, qui aurait à réunir les avantages et à éviter les défauts des deux. Dans les conditions actuelles, nous sommes autorisés à nous arrêter à la simple moyenne des deux chiffres. En attribuant à cette moyenne l'erreur probable $\mp 0;0335$, moyenne des deux $\Omega = \mp 0;034$ et $\Omega = \mp 0;033$ du tableau, nous sommes convaincus de ne pas estimer trop haut l'exactitude de notre résultat. Quant à ces erreurs probables, faisons encore une remarque qui nous paraît digne d'attention. Ces erreurs sont déduites, comme il a été dit, de l'accord des résultats gagnés par les différents chronomètres, tandis que les erreurs probables attribuées aux chronomètres dans chaque série de notre tableau, ont été basées sur l'accord que présentent les différents chronomètres pour chaque voyage à part. Ces dernières étaient requises pour fournir les poids relatifs à appliquer afin de réunir les valeurs isolées à une valeur générale, en adoptant pour l'unité du poids l'erreur probable $\mp 0;1$. Mais la comparaison des chronomètres donne pour le poids = 1 les erreurs probables $\mp 0;134$ et $\mp 0;150$, quantités sensiblement plus fortes, quoiqu'il ait été prononcé, que le défaut qui sans doute

existe dans la supposition d'une marche constante pendant toute l'opération, se manifestera par préférence dans le manque d'accord entre les résultats offerts par les différents voyages, et qu'il n'exercera qu'un effet beaucoup moins sensible sur la moyenne tirée de l'ensemble des voyages. Ce raisonnement est incontestable et ne peut être atténué par les chiffres cités. Ces chiffres prouvent donc, que des causes d'erreur de nature tout à fait différente doivent coexister, et qui exercent une influence constante sur toutes les longitudes obtenues par le même chronomètre, quoiqu'il soit extrêmement difficile de préciser une pareille cause. Quant à l'usage pratique à faire de ce raisonnement, il nous invite à changer les poids des chronomètres, en diminuant en général les poids les plus forts. Nous manquons cependant de toute base, pour faire un autre choix non arbitraire des poids. Heureusement le résultat final est presque entièrement indépendant de ce choix; ce qui se démontre par la circonstance, qu'en supposant même des poids égaux pour tous les chronomètres, en rejetant seulement les trois pièces qui sont évidemment inférieures de beaucoup aux autres, nous parvenons aux deux moyennes — 0;158 et — 0;142.

Nous terminons notre exposé en donnant la valeur définitive

$$\text{Dorpat à l'ouest de Poulkova} = 14^m 25:00 - 0;120 \mp 0;034.$$

Cette longitude se rapporte aux deux lieux d'observation de l'expédition en 1854. Pour la réduire au centre de la tour principale de chaque observatoire, il faut appliquer les corrections:

$$\begin{aligned} &+ 0;162 \text{ pour Poulkova} \\ &+ 0,096 \text{ » Dorpat.} \end{aligned}$$

Nous avons donc finalement:

$$\text{Dorpat, centre, à l'ouest de Poulkova centre } 14^m 25:138 \mp 0;034.$$

Or, l'expédition de 1844 ayant donné

$$\text{Poulkova, centre, à l'est de Greenwich } 2^h 1 18,674 \mp 0,052,$$

nous avons:

$$\text{Dorpat, centre, à l'est de Greenwich } 1 46 53,536 \mp 0066.$$

ADDITION F

relative à p. XLII de l'Introduction.

**Détermination du mouvement propre en déclinaison, des 10 étoiles zénithales
qui ont été observées, dans le plan du premier vertical, à Jacobstadt, Dorpat
et Hogland.**

Nom de l'étoile	Grandeur	Asc. droite moy. 1829,0	Dorpat et Abo		Poulkova Décl. moy. 1857,0	Différence	Mouvement propre annuel
			1829,0	Décl. moy. red. à 1857,0			
Anon. I	7.8	255° 37',5	56° 21' 44",48	56° 19' 25",7	56° 19' 27",6	+ 1",9	+ 0,070 = m ₁
P. XVII. 22	8	256 8,0	55 59 16,91	55 57 2,9	55 57 3,8	+ 0,9	+ 0,033 = m ₂
Anon. III.	8.9	267 40,5	56 25 7,53	56 24 45,4	56 24 48,8	+ 3,4	+ 0,128 = m ₃
Anon. IV.	7	282 51,5	59 48 5,07	59 50 10,5	59 50 10,3	- 0,2	- 0,007 = m ₄
Anon. VII.	7	283 40,5	57 59 32,39	58 1 45,6	58 1 47,2	+ 1,6	+ 0,059 = m ₇
Anon. V.	7.8	284 56,2	59 52 38,38	59 55 3,6	59 55 4,0	+ 0,4	+ 0,015 = m ₅
Anon. IX.	7.8	286 43,5	58 11 22,93	58 14 5,1	58 14 4,5	- 0,6	- 0,022 = m ₉
Anon. VIII.	8.9	287 7,5	58 2 11,35	58 4 57,3	58 4 56,5	- 0,8	- 0,029 = m ₈
Anon. VI.	8	290 25,2	60 0 40,37	60 3 56,8	60 3 57,6	+ 0,8	+ 0,029 = m ₆
Anon. X.	7	292 5,2	58 14 28,31	58 18 0,0	58 17 49,5	- 10,5	- 0,393 = m ₁₀

Voir: *Gradmessung I*, p. 241 et p. 249.

L'époque des observations de Poulkova est 1856,61, celle des déterminations de Dorpat et Abo 1829,48, pour les 9 premières étoiles, et 1829,86 pour l'étoile X. On obtient donc le mouvement propre annuel respectivement par $\frac{\text{Diff.}}{27,13}$ et $\frac{\text{Diff.}}{26,73}$. Le mouvement propre de la dixième étoile est remarquable par son montant qui, pour une étoile de 7^me grandeur, est bien considérable. L'existence et la quantité de ce mouvement propre sont contrôlées par des déterminations antérieures; aussi a-t-il déjà été indiqué par M. Oeltzen dans la comparaison du catalogue de M. Fedorenko avec d'autres sources, publiée en 1857. Le tableau suivant présente dans les colonnes α et δ les positions moyennes, pour 1842,0, déduites de cinq catalogues:

	Époque	α	δ	α'	$\alpha' - \delta$
Fedorenko	1789,7	19 ^h 28 ^m 33,95	58° 16' 27",0	22",2	- 4",8
Groombridge	(1810)	31,81	16 12,6	14,2	+ 1,6
Rümker	1840	30,49	16 4,8	2,4	- 2,4
Argelander	1841,6	30,73	16 4,1	1,8	- 2,3
Johnson	1852,8	29,78	15 56,9	57,4	+ 0,5

Les δ' donnés dans l'avant-dernière colonne sont les déclinaisons moyennes, pour 1842,0, déduites des observations de 1829 et 1857, et réduites aux époques des différents catalogues à l'aide de la valeur précédemment trouvée du mouvement propre. En considérant que l'on a négligé, dans cette comparaison, les erreurs constantes des catalogues, l'accord des δ et δ' est très-satisfaisant, ce qui prouve que la valeur déduite, pour le mouvement propre en déclinaison, des observations de 1829 et 1857, est très-approximativement exacte. Nous avons ici en même temps une preuve de l'exactitude remarquable soit des observations faites dans le plan du premier vertical, soit des déterminations des déclinaisons relatives des étoiles zénithales, car les observations de deux ans ont suffi non seulement à éveiller le soupçon d'un mouvement propre considérable de l'étoile X, mais aussi à en déterminer la valeur de très près. En effet (voir *Gradmessung I* p. 264) nous avons la différence entre l'amplitude donnée par cette étoile et celle que nous fournissent en moyenne les trois autres étoiles employées, égale à 0,931. L'époque des déterminations méridiennes étant éloignée de 2,26 ans de celle des observations dans le premier vertical, il s'en suit un mouvement propre de 0,41, identique à 0,02 près avec la valeur trouvée ci-dessus.

Les expressions données *Gradmessung I* p. 264 obtiennent maintenant les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3) &= \mu' = +0,077 \\ \frac{1}{3}(m_4 + m_5 + m_6) &= \mu'' = +0,012 \\ \frac{1}{4}(m_7 + m_8 + m_9 + 1,20 m_{10}) &= \mu''' = -0,116. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans les expressions *Gradmessung I* p. 310 nous avons:

1,02 μ' = + 0,079	0,63 μ''' = - 0,073
0,63 μ''' = - 0,073	0,96 μ'' = + 0,012
<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
Corr. = + 0,152	Corr. = + 0,085
1° 52' 42,435	1° 42' 22,368

Amplitudes définitives $D - J = 1^\circ 52' 42,59$

$H - D = 1^\circ 42' 22,28$.



A D D I T I O N G .

Catalogue chronologique des publications qui se rapportent à la mesure de l'Arc du méridien de 25° 20'.

Aux titres russes la traduction française a été ajoutée en parenthèses. La colonne des Renvois indique l'ouvrage dans lequel la pièce a été primitivement publiée.

	T i t r e s .	R e n v o i s .
1.	W. Struve. Nachricht von der Russischen Gradmessung. 1822.	<i>Astron. Nachrichten</i> 5.
2.	» (Nachricht von der Russischen Gradmessung). 1823.	<i>Astron. Nachrichten</i> 32, 33.
3.	» Sur la mesure des degrés du méridien de Dorpat. 1824.	<i>Zach Corresp. astr. tome II p. 23</i>
4.	« Ueber das Universalinstrument von Reichenbach und Ertel. 1824.	<i>Astron. Nachrichten</i> 47, 48.
5.	» Vorläufiger Bericht von der Russischen Gradmessung in den Ostseeprovinzen des Reichs. Denkschrift der philosophischen Facultät zur Feier des fünf- und-zwanzig-jährigen Jubelfestes der Universität Dorpat. Dorpat. 1827. Fol.	
6.	» Resultate der Gradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands. 1829.	<i>Astron. Nachrichten</i> 164.
7.	» Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostsee- provinzen Russlands. Dorpat 1831. 2 Theile nebst einem Heft Kupfertafeln. 4°.	
8.	» Allgemeine astronomische Nachrichten aus Russland. 1832.	<i>Astron. Nachrichten</i> 234, 235.
9.	» Vereinigung der beiden in den Ostseeprovinzen und in Lithauen bearbeiteten Bogen der Russischen Gradmessung. 1832.	<i>Mémoires de l'Acad. de St. P.</i> 1833.

10. W. Struve. Vereinigung der beiden Bogen der Russischen Gradmessung. 1833. *Astron. Nachrichten* 236.
11. » Bericht über die Fortsetzung der Russischen Gradmessung nach Norden. 1837. *Recueil des Actes de la séance publique de l'Acad. tenue en 1836.*
12. » Über ein mit einem Verticalkreis versehenes tragbares Durchgangsinstrument von Repsold. 1837. *Bulletin de l'Académie de St. P. Astr. Nachr.* 344, 345.
13. » Sur la mesure des degrés de méridien en Russie. 1840. *Bulletin de l'Académie de St. P.*
14. » Resultate der astronomisch-trigonometrischen Vermessung Livlands. St. Petersburg 1844. *Mémoires de l'Académie de St. P.*
15. Теннеръ. Описание тригонометрическихъ съемокъ в градуснаго взмѣренія, произведенныхъ въ Виленской, Курляндской, Гродненской и Мнѣской Губерніяхъ съ 1816 г. по 1834 г., подъ начальствомъ Генеральнаго Штаба Генералъ-Лейтенанта Теннера. (Description des levées trigonométriques et de la mesure de degrés, exécutées dans les Gouvernements Vilna, Courlande, Grodno et Minsk, dans les années depuis 1816 jusqu'en 1834, sous la direction du Lieutenant-Général de l'État-major Tenner.) *Записки военно-топографическаго Деп. Части VIII, IX. СПб. 1843, 44.*
16. W. Struve. Rapport à l'Académie sur une mission scientifique dont il fut chargé en 1847. *Recueil des Actes . . . pour 1847.*
17. Теннеръ. Продолженіе сочиненія Теннера изданнаго въ томахъ VIII и IX. (Continuation de l'ouvrage de Tenner (14) publié dans les volumes VIII et IX.) *Записки военно-топографическаго Деп. Части X, XI. СПб. 1847, 48.*
18. Теннеръ. Описание тригонометрической съемки, произведенной въ Волынской и Подольской Губерніяхъ съ 1836 года по 1840 годъ, подъ начальствомъ Генеральнаго Штаба Генералъ-Лейтенанта Теннера. (Description de la levée trigonométrique exécutée *Записки военно-топографическаго Деп. Части XII, отдѣленія второе и третье. СПб. 1849.*

dans les Gouvernements de Volynie et Podolie, sous la direction du Lieutenant-Général de l'État-major Tenner).

19. Fr. Woldstedt. Die Höhen der Dreieckspunkte der Finländischen Gradmessung über der Meeresfläche. 1849. *Acta Societatis Fennicae T. III. 1849.*
20. G. Lindhagen. Bericht an den Herrn Director der Hauptsternwarte über die im Sommer 1850 ausgeführte Expedition nach dem Norwegischen Finnmarken. 1851. *Bulletin de l'Académie.*
21. " Bericht an den Herrn Director der Hauptsternwarte, über die Ergebnisse der im Sommer 1851 in Angelegenheiten der Gradmessung unternommenen Reise nach Lappland. 1852. *Bulletin de l'Académie.*
22. W. Struve. Exposé historique des travaux exécutés jusqu'à la fin de l'année 1851, pour la mesure de l'arc de méridien entre $70^{\circ} 40'$ et $45^{\circ} 20'$. Suivi de deux rapports de M. G. Lindhagen sur l'expédition de Finnmarken en 1850 et sur les opérations de Lapponie en 1851. St. Pétersbourg 1852. 4^o
23. W. Struve. Stellarum fixarum positiones mediae pro epocha 1830, deductae ex obs. meridianis annis 1822 ad 1843 in specula Dorpatensi institutis. Petr. 1852. Fol.

Dans cet ouvrage la latitude de Dorpat a été discutée.

24. Prazmovski. Rapport fait à M. le Directeur de l'Observatoire central sur les travaux de l'expédition de Bessarabie, entreprise en 1852, par M. Prazmovski, astronome de l'Observatoire de Varsovie. 1853. *Bulletin de l'Académie.*

Les trois pièces 20, 21, 24 sont réimprimées dans notre ouvrage parmi les Additions et les Documents historiques.

25. (O. Struve). Nachricht von der Vollendung der Gradmessung zwischen der Donau und dem Schwarzen Meere. Veröffentlicht im Auftrag der Akademie der Wissenschaften. St. Petersburg 1853. 8^o.

26. J. P. Wolfers. Nachricht von der Vollendung der Gradmessung zwischen der Donau und dem Eismeer. 1854. *Grunerts Archiv. Band 23.*
27. Теннеръ. Описаніе тригонометрическаго мѣрѣнія Бессарабской области и продолженія руссiйскаго градуснаго мѣрѣнія на югъ, чрезъ эту область, до рѣки Дуная, произведеннаго съ 1846 по 1851 г., подъ начальствомъ Генераль-Лейтенанта Теннера. 1855. (Description de la mesure trigonométrique de la province de Bessarabie, et de la prolongation de la mesure de degrés en Russie à travers cette province jusqu'au Danube, exécutées, de 1846 à 1851, sous la direction du Lieut.-gén. Tenner.) *Записки военно-топографическаго Депо. Части XVII. отдѣленіе второе. СПб. 1855.*
28. W. Struve. Sur la jonction des opérations géodésiques russes et autrichiennes, exécutée par ordre des deux gouvernements. St. Pétersbourg 1853. 8°. *Astr. Nachrichten. 996*
29. W. Struve. Ueber die in den Jahren 1852—1854 ausgeführte Verbindung der geodätischen Arbeiten in Russland und Preussen. (In dem Werke: *Die Verbindungen der Preussischen und Russischen Dreiecksketten bei Thorn und Tarnowitz, herausg. von J. J. Baeyer, Generalmajor. Berlin 1857 4°. p. 406—442.*)
30. Baeyer. Ueber die Anfertigung einiger Copien der Bessel'schen Toise. 1854. *Astr. Nachrichten. 996*
- Quoique ces trois pièces 28, 29, 30 n'aient point les opérations de notre arc de méridien pour objet direct, elles renferment cependant plusieurs notices qui s'y rapportent.
31. W. Struve. Note sur l'ouvrage relatif à l'arc du méridien de 25° 20' entre la mer Glaciale et le Danube, publié par l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg 1857. *Comptes rendus de l'Académie de Paris, séance du 12 Oct. 1857.*
32. O. Struve. Resultate der im Sommer 1854 zwischen den Sternwarten Pulkowa und Dorpat ausgeführten Chronometerexpedition. 1857. *Bulletin de l'Académie.*

CHAPITRE I.

FORME ET DIMENSIONS DES TRIANGLES, EN DÉPENDANCE DU TERRAIN ET D'AUTRES CIRCONSTANCES EXTÉRIEURES.

§ I. Forme, dimensions et progrès des triangles, en général; poids de continuation d'un triangle.

Si deux points à la surface de la Terre sont liés par une suite de triangles, nous n'avons qu'à mesurer un seul côté de triangle et à déterminer les angles des différents triangles, pour effectuer la jonction géodésique des deux points. Il suffirait même de mesurer, dans chaque triangle, deux des angles, le troisième se déduisant à l'aide de la somme connue des trois angles = 180° + l'excès. C'est pour se préserver contre des méprises, mais aussi pour augmenter l'exactitude des résultats, que le troisième angle est également observé. Deux catégories d'angles doivent être distinguées ici. Dans chaque triangle, deux des angles peuvent être nommés *angles de continuation*, savoir *C* opposé au côté *c* déjà connu, et l'autre *B* opposé au côté *b* qui servira de côté connu dans le triangle suivant; tandis que le troisième angle *A* est dit *angle intermédiaire*. Les côtés successifs *c* et *b* seront bien désignés par l'expression *côtés transversaux* de la chaîne de triangles, en choisissant l'expression de *côté latéral* pour les différents *a* opposés aux angles *A*. Dans chaque triangle à part, le rapport cherché *c* à *b* sera d'autant plus exact, que *C* et *B* seront plus proches chacun de 90° . Mais dans ce cas, l'angle intermédiaire *A* approche de zéro, et le progrès produit par le triangle tend à disparaître. L'égalité des trois angles

réunit les avantages importants d'une détermination précise du nouveau point, et d'un avancement rapide de l'opération, dans une direction intentionnée. Le côté c étant donné, le calcul des deux nouveaux côtés a et b , se fait, en mettant $(C + A + B) - 180^\circ = q$, à l'aide des angles correspondants plans, $C - \frac{1}{3}q$, $A - \frac{1}{3}q$, $B - \frac{1}{3}q$. Désignons maintenant par γ , α , β les changements dans la septième décimale des $\lg \sin C$, $\lg \sin A$, $\lg \sin B$, correspondants à un changement d'une seconde dans l'angle, et mettons

$$\frac{1}{3}(\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2) = \mathfrak{S};$$

enfin soit Ω le carré de l'erreur moyenne ω d'un angle primitif, c. à d. observé, exprimée en secondes; avec ces dénominations nous aurons :

$$\begin{aligned} \text{le carré de l'erreur moyenne du } \lg \frac{b}{c} &= \frac{1}{3}\Omega(\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2) = \Omega\mathfrak{S} \\ \text{» » » » » » } \lg \frac{a}{c} &= \frac{1}{3}\Omega(\alpha^2 + \gamma^2 + (\alpha + \gamma)^2). \end{aligned}$$

Pour une suite de n triangles qui jouissent de la même exactitude ou qui ont le même Ω , nous aurons, en employant les crochets pour indiquer la somme des quantités synonymes :

$$\text{le carré moyen de l'erreur moyenne du } \lg \frac{b}{c}, \text{ dans cette suite de triangles, par } \Omega \frac{[\mathfrak{S}]}{n}.$$

Cette valeur se prête à être comparée avec le carré $\Omega\mathfrak{S}'$, qui convient au triangle équilatéral, de la même exactitude. Pour ce triangle il y a $\beta = \gamma = 12,156$, $\mathfrak{S}' = 295,54$, et nous obtenons, pour le poids de continuation ρ des triangles de la série en question, $\rho = \frac{295,54n}{[\mathfrak{S}]}$.

Dans les différents tableaux de triangles que contient notre ouvrage, on trouvera le $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}(\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2)$ de chaque triangle. Pour les 153 triangles principaux qui font la jonction directe entre l'île de Hogland et le Danube, il y a $[\mathfrak{S}] = 73125$, le \mathfrak{S} moyen sera $73125 : 153 = 478,0$; donc le poids de continuation de cette série totale :

$$\rho = \frac{295,5}{478,0} = 0,618.$$

Quant aux dimensions des triangles, les grands triangles produisent un progrès plus rapide des opérations; mais la difficulté de reconnaître les signaux très-lointains en rend l'usage précaire. Quoique cette difficulté puisse être vaincue, surtout par l'application des héliotropes inventés par Gauss, il paraît cependant qu'en général des triangles de 10000 à 20000 toises, ou en moyenne de 15000 toises = 27,4 verstes de côté, se recommandent dans un climat où l'usage de l'héliotrope, sans cela incommode par l'emploi de plusieurs co-opérateurs, devient incertain. Nous regardons par conséquent le triangle équilatéral de 15000 toises de côtés comme le *triangle normal*, en forme et en dimension, pour nos opérations.

§ 2. Influence du terrain sur le choix des stations.

La nature du terrain exerce nécessairement une grande influence sur le choix des stations trigonométriques, donc sur la forme et les dimensions des triangles, et c'est surtout l'élevation des stations au-dessus du terrain environnant qui décide de la grandeur des triangles. Sous le point de vue du terrain, la Russie présente la plus grande variété. Dans les provinces caucasiennes, les cimes des montagnes offrent des vues d'une étendue immense. Aussi M. le général Chodzko, chef des opérations géodésiques de ces provinces, a-t-il su tirer tous les profits possibles de cette circonstance. Il a eu, entre autres, le courage de s'établir avec ses instruments sur la cime de l'Ararat, hauteur absolue 2678 toises, d'y rester, avec ses aides, pendant 5 jours d'une clarté peu interrompue, habitant une tente établie sur un creux dans la neige perpétuelle, et d'y faire une suite complète d'observations géodésiques et astronomiques *). Les steppes, dans la partie orientale de la Russie européenne méridionale, présentent un terrain de nature opposée. Il est plat, presque comme la surface de la mer, et entièrement dépourvu d'arbres et même de buissons, mais parsemé de tertres, dits kourghans, de 2 à 5 toises de haut, d'origine énigmatique, et qui sont d'une grande importance pour les opérations géodésiques, en offrant des stations, où les rayons visuels s'élèvent un peu au-dessus du terrain environnant. Mais même en faisant usage de ces tertres, les triangles, dans les steppes, sont toujours de dimensions restreintes, surtout par ce que le bois y manque pour l'érection de signaux d'une hauteur considérable.

*) Il paraît que le mont Ararat est la station la plus élevée sur laquelle des opérations géodésiques et astronomiques aient été faites jusqu'à présent. En effet, la plus haute station de l'arc du Pérou, le Sinaguan, ayant $h = 2337$ toises, est moins élevée de 341 toises que l'Ararat. Cette différence devient bien plus significative en considérant, que les Andes sont sous l'équateur, l'Ararat sous $39^{\circ} 42'$ de latitude, qu'en outre les sommets des Andes sont situés sur un plateau déjà très-élevé dans toute son étendue, tandis que l'Ararat sort brusquement de la plaine de l'Araxe et s'élève de plus de 2200 toises au-dessus des eaux de ce fleuve, sur la courte distance de 26 verstes. Un des objets d'observation, sur l'Ararat, a été le signal du mont Godarebi, éloigné de 191 verstes ou de 103840 toises, distance qui paraît présenter la plus grande ligne géodésique, directement observée, jusqu'à présent. Nous avons, pour faire une comparaison,

en Caucasic,	ARARAT à GODAREBI	= 103840 toises;
dans l'arc de France,	CAMPVRY » DESJERTO	= 82555 »
dans la mesure de Hanovre,	BROCKEN » INSELSBERG	= 54374 »
dans nos opérations,	HALLJALL » MÄKI-PÄÄLYS	= 41934 »

De la cime du Godarebi M. Chodzko a pu voir à la fois l'Ararat au sud, l'Elbrus et le Kasbek au nord, la distance entre l'Ararat et l'Elbrus étant en ligne droite de 335 verstes ou de $3^{\circ} 12'$.

Le terrain de notre arc méridional, sur une étendue de 1500 verstes entre le Golfe de Finlande et le Danube, est de nature très-différente et présente en général de grandes difficultés pour l'établissement de stations de triangle. Sur toute la ligne, il n'y a ni chaînes de montagnes, ni montagnes isolées qui offrent des points dominants. A partir des bords du Golfe de Finlande, le terrain, montant peu à peu, avec des ondulations plus ou moins fortes, atteint à 1000 verstes de distance du Golfe, près de KREMENETZ en Volynie, latitude $50^{\circ} 6'$, sa plus grande élévation d'environ 200 toises. D'ici jusqu'en Bessarabie, près de KISCHENEW, latitude $47^{\circ} 1'$, les stations sont à peu près de même hauteur. Puis le sol s'incline et descend vers le Danube, toujours en ondulant. La hauteur moyenne du sol de toutes les 175 stations de notre arc méridional, au-dessus du niveau de l'océan, est de 107,3 toises, la plus grande étant de 208 toises, près de KREMENETZ, la plus petite de 8 toises, ville d'ISMAIL. Mais ce n'est point seulement la hauteur, soit absolue, soit relative du terrain, c'est encore la végétation très-différente que produit le sol, qui ait exercé une influence prononcée sur l'établissement des triangles de notre mesure. Depuis la Duna jusqu'au Dniester, sur 8° de latitude, 800 verstes, prédomine un terrain plat et marécageux, mais couvert de forêts immenses et en partie impraticables. Dans cette vaste étendue, M. de Tenner n'a rendu possible la continuation des triangles, que par l'érection d'un grand nombre d'échafauds qui élevaient les observateurs avec leurs instruments au-dessus des sommets des forêts. Ne reconnaissant aucun obstacle de la part des forêts, pour l'établissement des triangles, M. de Tenner, en élevant des échafauds jusqu'à 23 toises de haut, réussit à donner, même dans cette partie, à ses triangles une forme très-satisfaisante.

§ 3. Le terrain entre le Golfe de Finlande et le Danube, divisé en quatre régions distinctes.

En examinant de plus près le terrain de nos opérations, sous les deux points de vue indiqués, relatifs à la forme et aux dimensions des triangles, nous pourrions le diviser en quatre régions de constitution essentiellement différente, savoir :

- celle des Provinces Baltiques,
 - » de la Lithuanie,
 - » » la Volynie avec la Podolie,
 - » » la Bessarabie.

Cette division du terrain correspond aux quatre arcs principaux dont est composé l'Arc entier, depuis le Golfe de Finlande jusqu'au Danube, quant à l'exécution et aux époques des opérations, savoir :

entre les latitudes :

Parc Baltique, mesuré par W. Struve, dans les années 1821 à 1827,	60° 4' 29"	et	56° 30' 5"
» de Lithuanie » » M. de Tenner, » » »	1816 à 1832,	56 30 5	» 52 2 42
» » Volynie » » » » »	1836 à 1840,	52 2 42	» 48 45 3
» » Bessarabie » » » » »	1844 à 1849,	48 45 3	» 45 20 3.

Remarquons ici que les intervalles entre les années 1832 et 1836, et entre 1840 et 1844, ainsi que les dernières années depuis 1849 ont encore été destinées aux opérations géodésiques dans les provinces voisines à l'arc du méridien et en Pologne, et que la carrière de M. de Tenner nous présente l'exemple, peut-être unique, de 40 années consécutives de grands travaux géodésiques, exécutés et dirigés par lui.

1. Région de l'arc Baltique, entre l'île de Hogland et la Duna, depuis 60° 4' jusqu'à 56° 30' ; 384 verstes.

Abstraction faite de l'île de Hogland, placée au milieu du Golfe, nous avons sur la ligne des triangles qui traversent l'Ehstonie et la Livonie, un terrain mixte qui, quoique riche en forêts, surtout sur les bas-fonds, abonde cependant en élévations naturelles, très-souvent non boisées et propres à fournir des stations trigonométriques. Il y a, pour les 28 triangles principaux par lesquels l'opération fait ses progrès depuis Hogland jusqu'à JACOBSTADT, en tout 30 stations dont 24 ont été pourvues de signaux érigés exprès, et 6 se trouvent sur des édifices, savoir sur 4 clochers d'églises et sur 2 tours de châteaux. Sur les stations pourvues de signaux la mesure des angles a pu se faire, en plaçant le statif de l'instrument immédiatement sur le sol. Ce n'est qu'à RAËKÜLL où, pour gagner la vue libre, j'ai placé l'instrument sur un trépied colossal de 20 pieds de haut, en charpente très-solide, entouré d'une galerie convenable mais qui était entièrement isolée de l'autre charpente. Cinq des édifices employés offraient un emplacement commode de l'instrument. A OPPEKALN la flèche du clocher n'a servi que de point de mire, l'instrument ayant été établi sur le sol voisin.

Les bords du Golfe de Finlande sont formés, en Ehstonie, par un roc calcaire qui s'élève immédiatement de la mer à la hauteur de 30 à 35 toises. Puis le terrain monte lentement dans la direction méridionale, et forme une terrasse dans laquelle quelques collines s'élèvent jusqu'à une vingtaine de toises au-dessus du sol environnant. La plus grande élévation en Ehstonie, avec $h = 86$ toises au-dessus du niveau de la mer, est celle de SALL, à mi-chemin entre le Golfe et DORPAT. Cette ville est située dans les bas-fonds qui entourent les deux lacs Peipus et Wertz-jerw, joints par la rivière Embach qui est à DORPAT à une hauteur $h = 17$ toises *). Au sud de DORPAT le terrain monte de nouveau à une seconde

*) Pour l'Observatoire de Dorpat, situé sur une colline, $h = 35,0$ toises.

terrasse dont le sommet, LENARD, a $h = 110$ toises. De cette terrasse le terrain descend vers les bas-fonds que parcourt la rivière Aa, ici avec $h = 32$ toises environ. RAMKAU, $h = 121$ toises, est sur la hauteur de la pente opposée. D'ici commence un plateau qui continue jusqu'à la pente méridionale dirigée vers la Duna. Sur ce plateau GAISSA-KALNS, $h = 161$ toises, est le point dominant. La Duna près de JACOBSTADT a $h = 40$ toises, cette ville a $h = 43$ toises.

Les trois différents plateaux qui bordent les deux bas-fonds de l'Embach et de l'Aa, ayant rendu possible la continuation des triangles par-dessus ces bas-fonds, il s'en suit que nos stations se trouvent partout sur les points les plus élevés du pays. Voilà pourquoi la hauteur moyenne du sol de nos stations est de 80,1 toises, la plus petite hauteur étant $h = 31$ toises pour OBERPAULEN, la plus grande $h = 161$ toises pour GAISSA-KALNS *).

Quant aux dimensions des triangles Baltiques, le plus petit côté est EBBAFER—RÄEKÜLL = 5398 toises, le plus grand est HALLJALL—MÄKI-PÄÄLYS = 41934 toises. Les petits triangles en Ehstonie étaient inévitables, parce qu'au nord de SALL il y avait une terrasse de petite largeur, bordée des deux côtés, oriental et occidental, par des bas-fonds couverts de forêts, et que cette terrasse était le seul endroit, où la prolongation septentrionale fût praticable. Les triangles plus méridionaux, à partir de SALL, sont en général assez considérables. En additionnant les 57 côtés des 28 triangles Baltiques, la longueur moyenne d'un côté de triangle se trouve = 15318 toises ou 28,0 verstes. Les 28 triangles ayant effectué un progrès de l'opération dans le sens de la méridienne de $3^{\circ} 35'$, le progrès moyen produit par un triangle se trouve de 7315 toises = 13,4 verstes.

Pour la forme des 28 triangles nous avons $[\Sigma] = 20665$, donc le Σ moyen = 738,0, et le poids de continuation moyen $\rho = \frac{295,5}{738,0} = 0,400$.

2. Région de l'arc de Lithuanie, entre les rivières Duna et Pripet, depuis $56^{\circ} 30'$ jusqu'à $51^{\circ} 53'$; 482 verstes.

Le terrain de cette région de forêts s'élève de la Duna, $h = 40$ toises, promptement à une hauteur de 60 à 90 toises, pour les stations entre la Duna et la base de PONEDELI. Puis l'élevation des stations, au-dessus de la mer, devient plus considérable, et atteint à la station de PUTZEWITSCHI son maximum, $h = 166$ toises. Plus tard les stations s'abaissent, et nous avons, pour les 10 dernières stations, une hauteur à peu près invariable de 80 toises. C'est qu'ici le terrain forme les vastes marais du district de Pinsk, au milieu desquels se trouve BELIN, $h = 76$ toises, sur une plaine tellement horizontale que l'on

*) Le point le plus élevé des trois provinces Baltiques est le Munna-mäggi, 15 verstes au sud de la ville de Werro en Livonie, $h = 166$ toises.

ne trouve pas une seule colline dans un cercle de 70 verstes de rayon. Il y a en tout 49 stations de Lithuanie, et rien ne caractérise mieux la nature de ce terrain que le grand nombre d'échafauds qu'a fait ériger M. de Tenner, pour effectuer la continuation des triangles. En effet, du nombre des 49 signaux, il y a eu 40 échafauds, et seulement sur 9 stations il a été possible de faire la mesure des angles en plaçant l'instrument sur le sol. Parmi les différents échafauds, il y a eu

10	échafauds de	5 à 10	toises de haut
19	»	» 10 à 15	» » »
11	»	» 15 à 20	» » »

Les derniers échafauds, d'au-delà de 15 toises, se trouvent tous dans la partie méridionale de la région vers BELIN. La hauteur moyenne des 40 échafauds est = 12,8 toises, la plus petite = 5,9 toises, la plus grande = 19,0 toises.

L'élévation moyenne du sol des 49 stations, au-dessus du niveau de la mer, est de 99,0 toises, plus grande de 18,9 toises que celle de l'arc Baltique. JAKSCUTI à l'extrémité méridionale de la base de PONEDELI avait le minimum d'élévation $h = 48$ toises.

Les 98 côtés des 49 triangles principaux, depuis BRISTEN — ARRIDANI jusqu'à BELIN — SCHLÄPAN donnent la longueur moyenne d'un côté de triangle = 13583 toises ou de 24,8 verstes. Le progrès produit par ces mêmes 49 triangles est de $4^{\circ} 37'$ en latitude. Il y a donc, en moyenne, pour chaque triangle 5380 toises = 9,8 verstes de progrès, dans le sens de la méridienne.

Ce qui regarde la forme des 49 triangles de Lithuanie, nous trouvons $[\mathfrak{S}] = 20772$, donc le \mathfrak{S} moyen = 423,9 et le poids de continuation moyen $\rho = \frac{295,5}{423,9} = 0,697$.

3. Région de l'arc de Volynie entre le Pripiat et le Dniester. Depuis $51^{\circ} 53'$ jusqu'à $48^{\circ} 28'$: 356 verstes.

Les marais du district de Pinsk continuent encore au sud de BELIN, dans la partie septentrionale de la Volynie; mais bientôt le terrain change. Les immenses marais sont remplacés par un terrain plus solide, quoique coupé encore par des marais, et le sol monte successivement jusqu'à ce qu'il atteigne, près de KREMENETZ, sa plus grande hauteur d'au-delà de 200 toises. Depuis, le niveau moyen des 20 stations méridionales de cette région reste à peu près le même jusqu'au Dniester. Tous les points dominants du pays étant couverts de forêts, la mesure des angles immédiatement sur le sol devenait presque tout à fait impossible. C'est sans doute cet espace de plus de 350 verstes qui a opposé les plus grands obstacles aux opérations de M. de Tenner. Nous y avons 34 stations trigonométriques principales. De ce nombre, il n'y a eu qu'une seule, TUROWKA, propre pour l'établissement de l'instrument sur le sol, les autres 33 stations ont exigé l'érection d'échafauds encore plus élevés qu'en Lithuanie. Il y a

6	échafauds	de 10 à 15	toises de haut
22	»	» 15 à 20	» » »
5	»	» 20 à 23	» » » .

La hauteur moyenne des 33 échafauds est = 16,1 toises, donc de 3,3 toises plus grande qu'en Lithuanie.

L'élévation moyenne du sol des stations de Volynie et de Podolie est de 145,6 toises, de 46,6 plus grande qu'en Lithuanie, et près du double de celle des provinces Baltiques. Le point le plus bas est BOLSCHAJA-GLUSCHA, $h = 80$ toises, le plus élevé est la station de KREMENETZ, $h = 208$ toises.

Les 33 triangles principaux de Volynie et de Podolie, entre les côtés BELIN—SCHLÄPAN et SSUPUNKOWZI—SAGORJANE, donnent la longueur moyenne d'un côté de triangle = 13975 toises = 25,5 verstes. Le progrès produit par ces triangles est de $3^{\circ} 13'$ en latitude, donc en moyenne pour un triangle = 5423 toises = 10,0 verstes.

La forme des triangles se juge par $[\mathfrak{S}] = 12728$, donc le \mathfrak{S} moyen = 385,7 et le poids de continuation moyen $\rho = \frac{295,5}{385,7} = 0,766$.

4. Région de l'arc de Bessarabie entre les fleuves Dniester et Danube. Depuis $48^{\circ} 28'$ jusqu'à $45^{\circ} 20'$; 335 verstes.

Le Dniester sépare la Bessarabie de la Podolie. Le terrain est considérablement plus élevé que la rivière, des deux côtés, soit en Podolie soit en Bessarabie. Entre KREMENETZ et le Dniester il y a $h = 175$ toises, pour la hauteur moyenne des stations méridionales de Volynie et de Podolie. Une élévation moyenne seulement de 24 toises plus faible se trouve de l'autre côté du Dniester, savoir $h = 151$ toises, pour les 18 stations septentrionales de Bessarabie, jusqu'aux environs de la capitale de cette province, KISCHENEW. Il y a cependant une différence importante entre la Podolie et cette partie de la Bessarabie. Dans celle-ci, les forêts disparaissent presque entièrement, dès qu'on s'éloigne du Dniester dans la direction méridionale; et à partir de KISCHENEW, jusqu'au Danube, le terrain descendant par ondulations est totalement dépourvu de forêts, sans cependant offrir la nature uniforme et unie des steppes.

Ce changement du terrain et de la végétation a rendu l'établissement des triangles, en Bessarabie, bien plus facile qu'en Podolie. Quoiqu'il y ait eu, en Bessarabie, 13 échafauds, cependant 9 de ce nombre n'ont servi que de signaux simples; car l'instrument n'a été élevé au-dessus du terrain que quatre fois à 5 toises et une fois, à ZIGANESCETI, à 10 toises. Sur 37 des autres stations, l'instrument était placé sur le sol, une fois, à ISMAIL, sur la galerie du clocher de l'église.

L'élévation moyenne du sol des 43 stations, au-dessus de la Mer-Noire, était de 107,0 toises. Les points les plus élevés étaient BOKSANO et WODENI, $h = 165$ et $h = 166$ toises. Le sol de l'église d'ISMAÏL n'était que de 8 toises au dessus de la mer.

Les 43 triangles principaux de Bessarabie donnent la longueur moyenne d'un côté de triangle 11967 toises = 21,9 verstes. La petitesse des 6 triangles vers la fin de l'opération, entre la base de TASCUDUNAN et le Danube a été une suite de la proximité de la base et du petit espace qui restait à parcourir par les triangles. Le progrès produit par les 43 triangles de Bessarabie, dans le sens de la méridienne, est de $3^{\circ} 24'$, donc pour un triangle en moyenne = 4505 toises ou 8,2 verstes.

La forme des triangles de Bessarabie se juge par $[\odot] = 18960$, donc le \odot moyen 441,0 et le poids de continuation moyen $\rho = \frac{295,5}{441,0} = 0,670$.

La comparaison des articles 1 à 4 nous fournit les considérations suivantes.

- a) Notre opération, entre l'île de Hogland et le Danube, comprend, dans le sens de la méridienne, une étendue de $14^{\circ} 44' 26'' = 841657$ toises = 1537 verstes. Sur cette distance, il y a 153 triangles de continuation, en ne comptant ni les 19 triangles à l'aide desquels les 6 bases ont été rattachées aux triangles principaux, ni les deux triangles auxiliaires, employés pour réunir les deux points astronomiques, DORPAT et JACOBSTADT, avec les triangles de continuation. Du nombre des 153 triangles, 125 ont été mesurés sous la direction de M. de Tenner, 28 par Struve. La longueur moyenne d'un côté de triangle, pour toute la série, est de 13531 toises = 24,7 verstes, seulement de 1469 toises = 2,7 verstes plus petite que le côté de 15000 toises, adopté pour le triangle normal. Le progrès moyen effectué par un triangle, dans le sens de la méridienne, est de 5501 toises = 10,0 verstes.
- b) Les dimensions moyennes des triangles ne diffèrent pas considérablement dans les quatre régions. Les triangles Baltiques sont les plus grands, la valeur moyenne d'un côté étant de 15318 toises, de 318 toises plus forte que celle du côté dans le triangle normal. L'arc Baltique contient aussi le plus grand côté, non seulement de l'arc méridional, mais aussi de l'arc total, savoir HALIJALL—MÄKI-PÄÄLYS = 41934 toises = 76,6 verstes. Suivent les triangles de Volynie, ceux de Lithuanie, enfin ceux de Bessarabie. Pour ces derniers, la valeur moyenne d'un côté est de 11967 toises = 21,9 verstes, et nous trouvons dans son dernier triangle le plus petit côté de tous, ISMAÏL—STARO-NEKRASSOWKA de 3371 toises = 6,2 verstes.

- c) Les triangles de Volynie sont les plus élevés au-dessus du niveau de l'océan, avec $h = 208$ toises pour le signal de KREMENETZ, point le plus élevé entre la Mer Baltique et la Mer Noire, sur la ligne de nos opérations.
- d) Quant au progrès moyen dans le sens de la méridienne, effectué par un seul triangle, il est le plus grand pour la région Baltique, savoir de 7315 toises = 13,4 verstes, et le plus petit encore en Bessarabie, de 4505 toises = 8,2 verstes.
- e) En considérant les angles de continuation, nous voyons que les triangles de Volynie et de Podolie ont eu la forme la plus avantageuse, le poids ρ étant = 0,766. Les deux régions 2) et 4) présentent de très-près le même ρ , savoir 0,697 et 0,670. Le ρ des triangles Baltiques est le plus faible = 0,400. Si nous omettons, pour l'arc Baltique, le triangle le plus septentrional et dont le troisième sommet est sur l'île de Hogland, nous trouvons $\rho = 0,459$. Ce triangle de forme désavantageuse, par l'angle de $16^{\circ} 20'$ opposé au côté connu, était cependant inévitable, parce qu'il donnait le seul moyen d'effectuer la jonction de la dite île et de franchir le Golfe de Finlande.

La supériorité de la forme des triangles de Volynie et de Podolie est un fait remarquable, vu qu'il se trouve dans la région qui présentait les plus grands obstacles à l'établissement des triangles. Cependant ce paradoxe s'explique facilement par la raison que voici. Dans les autres trois régions, la forme des triangles dépendait en grande partie de l'élévation relative du terrain. Il en était autrement en Volynie et en Podolie. Le terrain, quoique en majeure partie assez élevé au-dessus de la mer, n'influait guères la forme des triangles, parce qu'il n'offrait aucune chance pour vaincre les obstacles produits par les immenses forêts. M. de Tenner était forcé d'avoir partout recours aux échafauds qui dépassaient les cimes des bois. Une fois décidé à ce moyen héroïque, il choisissait les stations non pas d'après le terrain, mais à ce qu'elles produisissent une forme avantageuse des triangles. Aussi les triangles de Volynie et de Podolie nous présentent-ils, depuis BELIN jusqu'à SSUPRUNKOWZI, une chaîne de triangles d'une régularité frappante, et cette forme avantageuse continue encore dans la partie septentrionale de la Bessarabie.

§ 4. Poids géométrique, poids trigonométrique, poids général des triangles, dans les 4 régions.

Le mérite d'un triangle peut être apprécié en considérant la forme et les dimensions, ou plutôt, pour une opération destinée à la mesure d'un arc de méridien, en regardant et la forme et le progrès produit par un triangle dans la direction de la méridienne. Si nos 153 triangles avaient été tous nor-

maux, c. à d. équilatéraux, de 15000 toises de longueur des côtés, et s'ils avaient été placés de sorte que les côtés latéraux formassent, sur les deux flancs de la chaîne, deux lignes droites situées dans la méridienne, nous aurions obtenu un progrès dans ce sens bien plus grand, qu'il n'a eu lieu. Le progrès moyen, produit par un triangle, aurait été de 7500 toises, au lieu du progrès moyen effectif de 5501 toises = F . Pour les triangles équilatéraux ρ étant = 1, nous pouvons par conséquent désigner le *poids géométrique* moyen d'un triangle d'une de nos séries par $\sigma = \frac{F}{7500} \rho$. Donc nous avons :

	Arc total.	Arc Baltique.	Lithuanie.	Volynie.	Bessarabie.
poids moyen de continuation..... ρ	0,618	0,400	0,697	0,766	0,670
progrès moyen d'un triangle..... F	5501 toises	7315 toises	5380 toises	5423 toises	4505 toises
poids géométrique moyen d'un triangle..... σ	0,453	0,390	0,500	0,554	0,402.

L'inspection de ce tableau nous indique que la mesure de Volynie est la plus parfaite des quatre, sous le point de vue purement géométrique; suit la mesure de Lithuanie, puis celle de Bessarabie, et enfin celle de l'Arc Baltique.

Mais la comparaison donnée ne suffit pas encore pour apprécier suffisamment le mérite relatif des quatre différentes séries. Nous n'avons pas encore considéré l'exactitude de la mesure des angles, exactitude qui n'est point la même pour les 4 séries. Une recherche complète de cette exactitude est l'objet du Chapitre X, p. 144 à 156. Nous emploierons ici les résultats suivants qu'elle a fournis pour les poids relatifs de la mesure des angles, p. 154. Ces poids sont le mieux désignés par le nom de *poids trigonométriques*.

Poids moyen trigonométrique, ou poids de la mesure des angles :

arc Baltique,	Lithuanie,	Volynie,	Bessarabie,
$\tau = 3,040$	0,749	0,632	0,938.

L'unité du poids convient ici à un angle dont l'erreur moyenne est = 1''0.


En combinant maintenant les poids géométriques σ avec les poids trigonométriques τ , nous parviendrons aux *poids généraux*, $p = \sigma\tau$, des triangles de nos quatre régions, dans lesquels ont été considérés, soit la forme des triangles, soit le progrès qu'ils produisent, soit l'exactitude de la mesure des angles. Nous aurons :

les poids généraux des triangles :

arc Baltique,	Lithuanie,	Volynie,	Bessarabie,
$p' = 1,186$	$p'' = 0,374$	$p''' = 0,350$	$p'''' = 0,378.$

L'unité du poids appartient à présent à un triangle équilatéral de 15000 toises = 27,4 verstes de côtés, dans lequel la mesure des angles est sujette à une erreur moyenne de 1",0.

Il se manifeste ici une grande supériorité des triangles Baltiques; car en prenant $\frac{1}{3}(p'' + p''' + p'')$ = 0,367 nous aurons 1,186 : 0,367 = 3,23, chiffre qui assigne aux triangles Baltiques un poids général plus que triple de celui des autres triangles, ou une précision 1,80 fois plus élevée pour le but final de la détermination des distances entre les parallèles. Cette supériorité est une suite nécessaire de la préférence de l'instrument et de la méthode d'observation que j'ai pu employer, et de l'avantage inappréciable que présentait le terrain des provinces Baltiques, d'admettre partout l'établissement le plus solide de l'instrument; et il faut même s'étonner de ce que M. de Tenner, surtout par la forme supérieure de ses triangles, a su approcher de si près de l'exactitude de l'autre mesure, malgré ses instruments plus anciens et de répétition, et malgré les difficultés presque insurmontables du terrain.



CHAPITRE II.

LES SIGNAUX.

§ 5. Considérations générales.

Les signaux sont destinés à fixer sur le terrain le point exact de la station, et à le rendre visible à d'autres stations. Dans les opérations de M. de Tenner, un troisième but est survenu, celui d'élever l'instrument à une hauteur considérable au-dessus du sol. Ces conditions à remplir ont déterminé les différentes constructions des signaux qui se subdivisent en *signaux simples* et *échafauds*.

La forme des signaux est d'importance pour l'exactitude de la mesure des angles. Pour la distance moyenne dans nos triangles, de 13401 toises = 24,5 verstes, un objet d'un pied de large se présente sous un angle de 2",5, et chaque pouce fait 0",2. D'où suit que, même pour ces distances, il faut éviter, dans les points de visée des signaux, des irrégularités de forme d'un pouce, dès qu'il s'agit de l'exactitude des angles à une fraction de seconde près. Les distances plus petites réclament des signaux encore plus réguliers, ou l'usage de mires de forme convenable et dont la relation au point fixe, centre, de la station doit être déterminée avec le plus grand soin. En effet, pour le plus petit côté dans nos triangles principaux, de 3400 toises, chaque pouce fait 0",84, et il s'agit ici des fractions du pouce.

§ 6. Les signaux des stations de l'arc Baltique.

Les figures 1 à 4, planche XX, représentent les signaux de deux espèces, dont j'ai fait usage dans la mesure de l'arc Baltique. Ils étaient tous d'une charpente aussi solide que soignée, pour donner dans tous les sens des formes symétriques. La description détaillée se trouve *Gradm.* I. p. 70 à 72. La poutre ronde qui sortait de la pyramide, fig. 1., ou la partie supérieure de la poutre carrée, fig. 3, qui dépassait

les contre-fiches inclinées, donnaient le point de mire dans la mesure des angles horizontaux. Le diamètre de la poutre ronde était de 8 à 12 pouces, le côté de la poutre carrée était de 4 à 8 pouces, selon les distances d'où les signaux devaient être observés. La poutre de 9 pieds de haut, sur 12 pouces de large, du signal de LENARD se présentait à la station OPPERALN, éloignée de 30000 toises = 55 verstes, comme une ligne de 10" de haut sur 1,1 de large, et offrait un objet très-distinct et propre à un pointage précis.

La visibilité d'un tel objet dépend de la condition qu'il se projette sur le ciel, condition qui, dans nos régions, ne manque qu'exceptionnellement. Elle est le mieux favorisée, le signal étant teint d'un vernis à l'huile noir foncé. Cette teinte foncée produit le contraste le plus fort, et sert à anéantir toute phase de l'objet. Aussi n'ai-je jamais pointé la pyramide tronquée d'où sortait la poutre, mais sans exception la poutre elle-même, ayant reconnu par l'aspect, que par un ciel clair, quand le soleil illumine une face inclinée de la pyramide, il se peut que cette face disparaisse et produise une phase erronée pour l'observation. La poutre verticale elle-même n'est point sujette à une telle phase, ne pouvant produire un reflet de lumière vers l'observateur, qu'à l'époque du coucher du soleil. Mais à cette époque la mesure des angles a déjà cessé, parce que près du coucher du soleil les objets sont toujours très ondulants, le calme des images ayant lieu en été, dans nos climats, entre 0,5 à 0,8 de l'intervalle de temps entre midi et le coucher du soleil. La position exactement verticale de la poutre a été examinée dans tous nos signaux. Une seule fois, à LENARD, j'ai rencontré une déviation de la verticale de 2,1 pouces sur 8 pieds de haut. Il a été tenu compte de cette déviation, voyez *Gradm.* II, p. 133.

Dans les triangles de jonction entre la base de SIMONIS et le côté principal EDDAFER-TAMMIK, j'ai employé, comme points de visée, de petites mires formées par un parallélogramme blanc sur un fond noir. Un second usage de mires de plus grande dimension a eu lieu pour de plus grandes distances, dans les cas qu'un signal se projetait sur le terrain. Voyez p. e. *Gradm.* II, p. 124 et 133.

Quant aux clochers qui se terminent en flèches, la barre de fer qui sort de la charpente et porte à l'ordinaire une girouette, fait un objet propre pour l'observation, à cause de son petit diamètre. En d'autres cas j'ai attaché une mire convenable à la galerie libre du clocher, ou de la tour d'un château.

L'usage de l'héliotrope a été exceptionnel, soit pour les plus grandes distances, soit dans certains cas de projection sur le terrain. Les 34 triangles, depuis HOGLAND jusqu'à JACOBSTADT présentent 69 côtés et 138 rayons visuels. Pour 27 de ces rayons l'héliotrope a été employé. Un usage exclusif de l'héliotrope aurait trop arrêté la marche de l'opération, les jours couverts étant soit plus nombreux que les jours sereins, dans notre climat, soit les plus avantageux pour l'observation, par la plus longue durée du calme des images.

J'ai voué partout une attention particulière à l'évaluation des relations (distance horizontale et direction) entre les différents points de mire et le centre de la station. Un petit instrument des passages, de huit pouces de foyer, très-transportable avec son trépied léger, a été employé pour la projection des points de mire. Dans cette partie j'ai même dépassé l'exactitude requise. Sur cet instrument des passages voyez *Gradm.* I. p. 48.

Les précautions et les soins indiqués ont conduit, dans tous les cas, à une observation parfaitement exacte dans le sens optique, et ont essentiellement contribué aux résultats satisfaisants des opérations.

§ 7. Les signaux érigés entre la Duna et le Danube.

M. de Tenner a donné la description de ses signaux dans les *Mém. du Dép. top.* (*Зануку Боенно-монографическаго Дена*) vol. VIII p. 170 à 175. Nos figures 5 à 8, planche XXI, sont des copies des dessins qui se trouvent dans les manuscrits et dans l'ouvrage publié.

Fig. 5 représente un des signaux simples, pyramides en charpente, employés sur toutes les stations où l'observation pouvait se faire du statif directement placé sur le sol. La hauteur verticale des pyramides variait de 3 à 6 toises, selon les circonstances. Chaque pyramide se terminait en un petit toit, de 3,5 pieds de large, peint en noir, et réuni autour d'un parallépipède *P*, de 4 pouces d'épaisseur sur 18 pouces de long. La base de ce toit formait un carré de 3 pieds de côté. Pour plus de solidité, les quatre arêtes de la pyramide étaient réunies par des traverses qui ne sont pas indiquées dans la figure. *P'* est la projection de *P* sur le terrain, conservée dans une pierre entourée d'une maçonnerie.

Fig. 6 donne le plan }
 Fig. 7 » le profil } d'un échafaud de 10 sajènes = 11 toises de haut.

Les quatre poutres verticales de cette charpente renfermaient un carré de 10 pieds de côté, et recevaient la stabilité indispensable, chacune par deux grandes contre-fiches inclinées, et par les deux galeries et les planchers qui les réunissaient, en servant également d'appui pour les escaliers. La charpente se terminait en haut en une pyramide dont la pointe, analogue à celle du signal simple, formait l'objet du pointé. Au-dessous de la pyramide il y avait deux planchers séparés, dont l'un *J* servait pour l'emplacement de l'instrument, l'autre *F* pour les deux observateurs. La lunette de l'instrument, placé avec son statif sur *J*, était d'une toise au-dessous de la pointe *P* du signal.

Fig. 8 représente un second étage ajouté sur le haut de la charpente Fig. 7, pour produire un échafaud de 15 sajènes = 16,3 toises de haut.

Dans plusieurs occasions, il y avait encore un troisième étage, au-dessus du second, pour élever la construction à 20 toises de haut, et même au-delà. Ces étages ajoutés, n'ayant plus l'appui de contre-fiches qui partaient du sol, ne pouvaient prendre la rigidité indispensable qu'à l'aide de traverses, appliquées soit dans les plans extérieurs soit à travers l'intérieur de la charpente. Pour les constructions d'au-delà de 15 toises, le carré des poutres verticales n'était déjà de 1,5 sajenes = 10 pieds de côté, mais de 2,5 sajenes = 17 pieds.

M. de Tenner remarque lui-même, à la fin de sa description des échafauds, que pour réussir dans la mesure des angles, à la hauteur de 15 à 20 toises au-dessus du sol, un air calme était indispensable, un grand vent produisant des oscillations continuelles qui empêchaient toute observation exacte. Nécessairement la difficulté de l'observation des angles a dû augmenter avec la hauteur de l'échafaud, d'où elle se faisait, à ce que juge M. de Tenner lui-même, *Zanucku* XII. p. 15. Aussi l'expérience avait-elle indiqué, qu'il valait le mieux de se servir, sur les échafauds, d'instruments moins pesants. L'instrument universel d'Ertel p. c., d'après l'opinion du colonel Melan, un des coopérateurs les plus intelligents dans les travaux de M. de Tenner, n'était guères propre pour les échafauds, à cause de sa trop grande sensibilité. Cette expression prouve directement que, pour tous les instruments, l'observation des angles, faite au haut des échafauds, a été moins certaine, que par l'instrument placé sur le sol. Avec tout cela, il n'y a aucun doute que M. de Tenner n'ait parfaitement réussi dans la mesure des angles, même dans les plus grandes élévations de l'instrument. Il faut remarquer encore, que la forme pyramidale des sommets des signaux sur lesquels on pointait, a pu déroger tant soit peu à la précision optique des angles, mesurés sous la direction de M. de Tenner. L'héliotrope n'a point été employé dans ses opérations.

Le centre de chaque station ayant été indiqué invariablement sur le terrain, *P'* fig. 5 et 6. pl. XXI, la position de la pointe de la pyramide a été constamment examinée, à l'aide des mêmes instruments qui servaient à la mesure des angles. Le même procédé eut lieu pour la relation entre l'instrument et le centre.



CHAPITRE III.

INSTRUMENTS EMPLOYÉS A LA MESURE DES ANGLES TERRESTRES.

Huit différents instruments ont été employés dans l'espace des 32 années, depuis 1818 jusqu'en 1849, à mesurer les angles terrestres de la série des triangles compris entre l'île de Hogland et le Danube. Je donne ici l'énumération de ces instruments, en ajoutant des notices qui en caractérisent les qualités particulières.

§ 8. Instrument employé par Struve dans les opérations de l'arc Baltique.

1. *A. L'instrument universel, A*, employé aux dites opérations est un des derniers instruments exécutés à Munich sous la direction de Reichenbach, des mains duquel j'en fis l'acquisition en 1820. J'ai donné une première description de cet instrument en 1823, dans les *Astron. Nachr.* vol. II. No. 47 et 48, en indiquant les changements que je m'étais proposé de faire pour l'application plus commode de l'observation sans répétition enchaînée. L'instrument changé a été décrit en détail, avec l'indication des rectifications et des méthodes d'observation, *Gradmessung* I. p. 32 à 41, planches IV et V. Ce même instrument se trouve encore actuellement en état parfait de conservation à l'Observatoire central, ayant été employé à notre mesure des degrés, en dernier lieu en 1852, pour la détermination de l'azimut à KILPI-MÄKI, point central de Finlande.

La division du cercle horizontal a 13 pouces de diamètre, celle du cercle vertical 11 pouces. Les traits sont tracés de 5' à 5'; les quatre verniers donnent 4". A l'aide de l'estime on peut lire la seconde sur chaque vernier. La lunette supérieure, brisée et pourvue d'un prisme au milieu de

l'axe horizontal, a 21 lignes d'ouverture sur 18 pouces de foyer, avec deux oculaires de 36 et de 60 fois. Le grossissement de 60 fois qui donnait des images d'une rare précision, est le seul dont j'aie fait usage. Deux fils verticaux, placés à 30" de distance, et coupés par un seul fil horizontal servaient à l'observation dans le sens horizontal, l'objet étant placé exactement au milieu des deux fils. La lunette inférieure, ou de vérification, avait 16½ lignes d'ouverture. Elle portait une simple croix de deux fils, vertical et horizontal, pour être dirigée sur une mire. Notre instrument a été employé soit à la mesure des angles terrestres, horizontaux et verticaux, soit à l'observation de l'azimut, du temps et de la latitude. Il a donc mérité le nom d'instrument universel, donné par Reichenbach. Mais cet instrument est, par son but multiple, d'une construction compliquée, quoique mathématiquement admirable dans sa totalité et dans ses parties, et il requiert un observateur rationnel qui l'ait étudié scrupuleusement. Entre les mains d'un tel il remplit ses fonctions d'une manière parfaite.

§ 9. Instruments employés dans les opérations de M. de Tenner.

2. *B. Cercle répéteur construit par Baumann* à Stuttgart, d'après les principes de Borda. Ce fut le premier instrument dont M. de Tenner ait fait usage dans ses opérations, depuis 1816. Le cercle avait un diamètre de 13 pouces, la division était de 10' à 10', les 4 verniers donnaient 10". Le grossissement de la lunette supérieure était de 25 fois. La lunette inférieure ne grossissait que de 14 fois et donnait des images moins précises que l'autre.
3. *T. Cercle de répétition de Troughton*, construction de Borda. Limbe de 14,3 pouces de diamètre divisé en 10'. Quatre verniers à 10". Les deux lunettes qui grossissaient 27 fois, étaient d'une clarté distinguée. M. de Tenner a fait un très-grand usage de cet excellent instrument, depuis 1818 jusqu'en 1837.

Dans les deux instruments *B* et *T* le réticule était composé de deux fils qui se coupaient sous un angle droit, inclinés de 45° pour donner une observation également exacte dans les deux sens, vertical et horizontal.

4. *R. Théodolite terrestre à répétition de Reichenbach*, de 12 pouces de diamètre. La construction de cet instrument est connue. Le limbe était divisé de 5' à 5', les 4 verniers donnaient 4". Les deux lunettes grossissaient environ 36 et 30 fois. Cet instrument appartenait à l'Observatoire de Vilna, mais il avait été cédé à l'usage de M. de Tenner, pendant les années 1828 à 1832.
5. *M. Théodolite à répétition*, No. 17, construit à l'atelier de l'État-major, de 10 pouces de diamètre.

employé depuis 1833. La division était de 5' à 5', et par 4 verniers de 5" à 5", mais moins exacte que celle des autres instruments. Les deux lunettes grossissaient 24 fois.

6. *e. Théodolite astronomique à répétition d'Ertel*, de 8 pouces de diamètre, employé depuis 1836. La division est de 10' à 10', les 4 verniers donnant 10". Les grossissements employés à la mesure des angles terrestres étaient de 30 fois pour la lunette supérieure, de 24 fois pour la lunette inférieure. Voyez la description d'un instrument analogue *Gradmessung I*. p. 41 à 47, planche IX.
7. *U. Instrument universel d'Ertel*, semblable à *A*, en usage depuis 1836.
8. *E. Théodolite terrestre d'Ertel* de 12 pouces, semblable à *R*. Cet instrument a été employé depuis 1844.

Les instruments indiqués se subdivisent en deux catégories. Les instruments *A*, *R*, *M*, *e*, *U* et *E* mesuraient directement les angles terrestres horizontaux, projetés à l'aide de la lunette supérieure, par le mouvement sur un axe horizontal. Les deux autres instruments *B* et *T* donnaient les angles inclinés dans les différents plans des couples d'objets. Pour la réduction aux angles horizontaux, il fallait connaître les distances au zénith. A ce but, les mêmes instruments ont été employés dans une position verticale. Pour un terrain aussi uniforme que celui de Lithuanie et de Volynie, la réduction de l'angle incliné à l'angle horizontal était tellement petite qu'elle ne réclamait qu'une connaissance approximative des distances au zénith. Cependant ces dernières ont été observées partout avec le plus grand soin, pour l'usage du nivellement trigonométrique. Dans les triangles de Lithuanie, les distances au zénith, employées pour la réduction, se trouvent entre les limites $89^{\circ} 42'$ et $90^{\circ} 28'$. Elles diffèrent de $90^{\circ} 0'$, 166 fois au-dessous de $10'$, 38 fois de $10'$ à $20'$, et 6 fois de $20'$ à $28'$. La réduction elle-même a été pour la plupart des angles une fraction de seconde, pour 17 angles entre $1''$ et $2''$, pour 10 angles depuis $2''$ à $3''$, pour 3 angles de $3''$ à $5''$. En Volynie et Podolie, il y a eu, pour la réduction des angles inclinés, 76 distances au zénith observées, avec les valeurs extrêmes $89^{\circ} 54'$ et $90^{\circ} 19'$. De ce nombre, 68 distances différaient de $90^{\circ} 0'$ entre $0'$ à $10'$, et 8 entre $10'$ à $14'$. La réduction n'a été d'ordinaire qu'une fraction de seconde, pour 4 angles seulement elle est entre $1''$ et $3''$. On voit qu'en Volynie, malgré l'élévation plus grande des stations, les ondulations du terrain ont été plus faibles qu'en Lithuanie.

Les instruments *T*, *B* et *R* ont été employés dans les opérations de Lithuanie,

» » *T*, *e*, *U* et *M* » » » » » » » Volynie,
 » » *U* et *E* » » » » » » » Bessarabie.

Pour l'Arc de Lithuanie, avec ses 58 triangles, le cercle répétiteur de Troughton a été l'instru-

ment principal, ayant été employé sur toutes les stations, à l'exception d'un seul point, URMEN, où la mesure des angles a été faite avec *R*. En tout :

T a été employé sur 56 stations pour la mesure de 153 angles inclinés;
B » » » » 12 » » » » » 15 » inclinés;
R » » » » 10 » » » » » 28 » horizontaux.

Somme 196.

Le nombre des angles étant 174, il y a eu 22 angles observés par deux instruments, savoir 6 angles par *T* et *B*, 16 angles par *T* et *R*; d'où suit que

131 angles ont été observés uniquement par *T*
 9 » » » » » » » *B*
 12 » » » » » » » *R*
 22 » » » » » par deux instruments.

Pour l'arc de Volynie *T* a été encore l'instrument principal. Les 42 stations de cet arc forment 40 triangles avec 120 angles.

T a été employé sur 22 stations pour la mesure de 53 angles inclinés;
e » » » » 17 » » » » » 35 » horizontaux;
U » » » » 6 » » » » » 8 » »
M » » » » 14 » » » » » 34 » »

Somme 130.

Donc il y a 10 angles mesurés par deux instruments, savoir 6 angles par *T* et *e*, 3 angles par *T* et *M*, un angle par *T* et *U*; d'où suit que

43 angles ont été observés uniquement par *T*
 29 » » » » » » » *e*
 7 » » » » » » » *U*
 31 » » » » » » » *M*
 10 » » » » » par deux instruments.

En Bessarabie il n'y a eu que deux instruments employés, *U* et *E*, donnant les angles horizontaux. Le théodolite d'Ertel a été ici l'instrument principal, ayant été employé sur 46 stations. L'autre instrument *U* a fait la mesure sur 5 stations. Aucun angle n'a été mesuré par deux instruments.



CHAPITRE IV.

MÉTHODES EMPLOYÉES POUR L'OBSERVATION DES ANGLES TERRESTRES.

§ 10. Notices historiques relatives aux méthodes d'observation.

Les géomètres français avaient introduit, vers la fin du siècle passé, le principe de la mesure des angles par répétition, principe indiqué déjà par T. Mayer. Le cercle répéteur inventé par Borda devint bientôt, sur le continent de l'Europe, l'instrument généralement employé aux opérations géodésiques qui aspiraient à une précision distinguée. Certes, pour l'époque d'alors, les instruments transportables étant pourvus de divisions très-médiocres, l'application de la répétition a dû être regardée comme un progrès éminent dans la mesure des angles géodésiques. Mais il est évident que ce principe, quelque admirable qu'il soit en théorie, ne peut jamais conduire à des mesures de la plus haute exactitude, parce qu'il suppose des conditions qui, à la rigueur, n'existent pas, savoir une rigidité absolue des métaux, un repos relatif parfait des différentes parties de l'instrument, pendant qu'on le tourne sur son axe, enfin l'absence du jeu de l'axe dans son moyeu. L'avantage que porte la répétition, est celui de réduire, à un minimum proposé, l'effet des imperfections dans les divisions et dans la lecture de ces divisions. Mais la répétition a dû être abandonnée dès que l'imperfection des divisions avait diminué au point que l'erreur qu'elle produisait, était devenue plus petite que le défaut inhérent à l'opération de la répétition.

Le commencement des opérations de M. de Tennor, en 1816, tombe dans une période où la répétition était généralement adoptée. Ses deux premiers instruments *B* et *T* étaient des cercles répéteurs, confectionnés par Baumann et Troughton, à l'imitation des cercles de Borda. Naturellement M. de Tennor, dans ses opérations, se servait partout de la répétition, comme de l'unique moyen pour

parvenir à des résultats satisfaisants. Reichenbach enfin, depuis 1804*), remit entre les mains des géomètres et des astronomes des instruments construits d'après des principes géométriquement exacts, pourvus de lunettes d'une perfection antérieurement inconnue, mais surtout de divisions presque mathématiquement justes. Néanmoins, tous ses instruments étaient destinés à la répétition, et même ses grands cercles verticaux de trois pieds de diamètre, faits à l'usage purement astronomique, étaient des instruments de répétition. Depuis, il n'abandonna la répétition que dans un seul instrument, le cercle méridien, en la retenant nommément pour tous les instruments transportables et destinés aux opérations géodésiques. L'instrument universel *A*, arrivé à DONPAT en printemps 1821, était du nombre. Avec cet instrument je commençai, l'année suivante 1822, mes travaux de campagne sur 7 des stations situées au sud de DONPAT, en employant également la répétition. Je tâchai cependant de remédier, autant que possible, au défaut inhérent de la répétition, par un arrangement propre de l'opération, en variant les directions du mouvement des différentes parties de l'instrument d'une manière symétrique, surtout en établissant la règle de mesurer chaque angle par deux fois 16 répétitions, une fois en tournant la lunette supérieure dans la direction de la division, mouvement positif, et l'autre fois en la tournant dans le sens opposé, mouvement négatif. Ce procédé conduisit à la connaissance d'un fait inattendu, savoir que tous les angles *P*, mesurés par le mouvement positif, étaient plus grands que les angles *N*, mesurés par le mouvement négatif. Voici p. e. les 5 angles observés, en Juin 1822, à LENARD, et qui remplissent le tour de l'horizon :

	<i>P</i>	<i>N</i>	$\frac{P+N}{2}$	<i>P</i> - <i>N</i>
	30° 48' 35,5	34,7	35,1	+ 0,8
	64 27 25,2	23,0	24,1	+ 2,2
	31 51 26,7	24,5	25,6	+ 2,2
	73 22 38,1	34,2	36,15	+ 3,9
	159 29 58,8	57,7	58,25	+ 1,1
Somme	360° 0' 4,3	359°59'54,1	359°59'59,2	moy. + 2,04

Les angles *P* donnent pour le tour de l'horizon une somme de 4,3 trop forte, les angles *N* de 5,9 trop faible, tandis que les $\frac{P+N}{2}$ produisent à 0,8 près la juste somme. Le même effet s'est manifesté sur les autres 6 stations, sans exception. Sans explication distincte de ces différences, j'éprouvai naturellement un sentiment pénible, de n'avoir acquis, dans les $\frac{P+N}{2}$, qu'une mesure empirique-

*) Voyez *Zach, Monatl. Correspondenz* Band IX, p. 377.

ment exacte, ne sachant point si chaque angle obtenu ainsi était réellement à l'abri de toute erreur constante.*) Voilà pourquoi je me décidai à abandonner la répétition, et à lui substituer la *méthode de l'observation réitérée des angles simples*.

§ 11. Examen de l'exactitude dans les éléments d'une observation, faite à l'aide de l'instrument universel.

L'exactitude d'une mesure simple d'un angle dépend de trois conditions, savoir de la précision du pointé, de l'exactitude de la division de l'instrument employé, et de la sûreté dans la lecture des divisions.

Quant au pointé, il n'existe aucune différence essentielle entre la mesure par répétition et la mesure simple. On n'a qu'à réitérer la mesure simple au même nombre de fois, que dans la répétition, pour parvenir au même degré de certitude optique. Il y a même un avantage du côté de l'observation simple; c'est que dans celle-ci on est aux gardes de ne jamais rien négliger dans le pointé, tandis que, dans la répétition, le grand nombre d'observations réunies à un seul résultat engage involontairement à être moins scrupuleux pour chaque pointé isolé. L'exactitude du pointé, dans la lunette supérieure de notre instrument, d'un grossissement de 60 fois, m'était déjà connue. J'avais observé à plusieurs reprises le passage de l'étoile polaire sur les deux fils verticaux du réticule et par le milieu, sans entendre le battement de l'horloge, mais en indiquant les moments, par des tapes, à un aide qui notait les moments correspondants de l'horloge. Un calcul d'interpolation prouvait que l'erreur probable du pointé au milieu de deux fils verticaux se réduisait à une fraction de seconde, bien en dedans de 0,5, pour un objet aussi distinct et net, que la polaire observée le jour dans les heures des images calmes. Dans la mesure effective des angles, l'observation optique est de nature composée, car il s'agit de l'erreur du pointé au signal dans la lunette supérieure, combinée avec l'erreur du pointé dans la lunette inférieure qui sert à maintenir la position constante du cercle divisé. Pour réduire cette dernière erreur à un minimum, j'ai employé toujours une mire fixée à une distance de 200 à 800 toises, selon les localités, et qui consistait en un

*) M. de Tenner ayant employé après 1826, dans ses répétitions, la mesure par des mouvements opposés, je puis citer ici les résultats des $N-P$ que j'ai tirés de ses observations.

En LITHUANIE, 1827 et 28, l'instrument T a donné en moyenne $N-P = -0,61 \mp 0,12$

En VOLYNIE et PODOLIE, 1836, " " " " " " = $-4,40 \mp 0,33$

1837, " " " " " " = $+2,51 \mp 0,34$

Remarquons ici qu'en 1836 et 1837, il y avait d'autres observateurs et que l'instrument était déjà très-usé, par un emploi continu de 20 ans. Si je ne me trompe point, M. Gauss a indiqué également des corrections empiriques pour les angles trouvés par répétition, dans sa mesure de l'arc de Hanovre.

petit parallélogramme, oblongue dans le sens vertical, de papier blanc collé sur une tablette noire. La largeur de la mire étant telle que, dans la bissection par le fil vertical, on ne voyait qu'un trait blanc délié, des deux côtés du fil, l'observation de cette bissection était exacte à une petite fraction de seconde. Dans le courant de mes opérations, j'ai évalué l'erreur optique probable, produit par l'effet combiné des deux lunettes, pour un seul pointé, à 0,87. Voyez *Astron. Nachr.* vol. II. p. 460.

Regardons maintenant les divisions des instruments de Munich, qui sont toutes des copies de la division-mère primitivement tracée par Reichenbach sur sa machine à diviser. Les divisions des cercles méridiens copiées de cette machine ont été examinées à Königsberg, à Dorpat, à Helsingfors et à Poulkova. Il résulte de ces recherches que, pour la moyenne des 4 verniers, les plus grandes erreurs régulières ne vont qu'à $\mp 0,3$; et que l'erreur accidentelle d'un trait de division quelconque a une valeur probable de tout au plus 0,3; d'où suit une erreur pr. plus petite que 0,15 pour la moyenne des 4 verniers. Les erreurs accidentelles sont originaires soit des défauts qui se trouvent dans la division-mère, soit des inexactitudes commises en copiant, enfin, peut-être, des déviations du couteau, produites par un défaut d'homogénéité dans le métal sur le quel le couteau trace. Ces dernières déviations produisent bien des erreurs accidentelles plus fortes pour les instruments de moindre dimension; mais sous tous les autres rapports, l'exactitude absolue des divisions est la même pour les petits et pour les grands instruments. D'où suit, qu'abstraction faite du pointé, l'exactitude relative de la mesure des angles simples, à l'aide de l'instrument universel dépendait presque uniquement du degré de sûreté, qu'admettait la lecture des divisions.

En 1823 l'Observatoire de Dorpat était en possession de 4 instruments de Munich, de différentes dimensions, pourvus de verniers; ce qui m'engagea à en examiner les lectures par une comparaison de lectures identiques, faites de la part de plusieurs individus également exercés dans cette besogne. Le tableau suivant contient les résultats déduits des comparaisons entre les secondes lues par Struve et Preuss ou par Struve et Argelander.

Instrument.	Diamètre de la division, pouces fr.	Chaque vernier donnait immédiatement.	Position du limbe.	Erreur probable de la lecture d'un individu		
				pour un seul vernier.	pour la moyenne de 4 verniers	de chaque instrument.
						réduite au diamètre de 12 pouces.
1. Cercle méridien	36	2"	verticale	0,60	0,30	0,90
2. Cercle vertical	18	4	"	0,84	0,42	0,63
3. Théodolite astronomique	8	10	"	2,00	1,00	0,67
4. Instrument universel	13	4	horizontale	0,70	0,35	0,38

73

Ce petit tableau prouve une sûreté presque surprenante des lectures faites à l'aide des verniers. La dernière colonne donne pour un diamètre de 12 pouces, dans la position verticale du limbe, la moyenne 0,73. La lecture de la division horizontale paraît encore plus exacte, ce qui s'explique par la position uniforme que prend l'oeil dans ces lectures.

Voilà les connaissances sur l'instrument universel que j'avais acquises avant de rentrer en campagne, en 1823, et qui me donnaient la conviction qu'une mesure simple d'un angle, faite sur un arc quelconque du limbe, devait donner une valeur exacte en dedans de 0,7, abstraction faite de l'incertitude du pointé; et que par 6 mesures faites sur différents arcs, avec 12 différents pointés à chaque signal, l'erreur probable d'un angle devait être réduite à $\sqrt{\frac{0,87^2 + 0,70^2}{6}} = 0,46$.

§ 12. Méthode de la mesure simple des angles par répétition.

Cependant les premières expériences faites pour l'application de la mesure simple paraissaient indiquer que cette exactitude espérée ne fût qu'une illusion. Un angle mesuré avec le plus grand soin à plusieurs reprises sur le même arc du limbe, présentait bien, dans quelques résultats, l'accord attendu; mais il y avait, à côté de ces valeurs, d'autres également fréquentes dans lesquelles on rencontrait des différences jusqu'à environ $\mp 16''$, vis-à-vis des mesures concordantes. Pour des mesures exactes en dedans d'une seconde dans les différents éléments, il ne restait qu'à supposer une source encore inconnue de perturbation. En effet, toutes les différences étaient ou près de zéro, ou près de $\mp 16''$, les différences intermédiaires n'existant pas. Ce fait étant constaté, j'en découvris bientôt l'origine dans une flexion à laquelle les rayons des cercles horizontaux étaient sujets. Les deux cercles, l'alidade et le limbe, étaient arrêtés l'un contre l'autre, comme dans tout instrument répéteur, à l'aide d'une vis de rappel, appliquée aux deux périphéries. Telle vis ne peut produire un mouvement de l'axe dans le moyeu, qu'après avoir vaincu la friction centrale, par la flexion opposée des rayons des deux cercles. Cette friction était dans notre instrument plus grande que dans d'autres instruments analogues, parce que l'axe vertical en acier était d'une longueur considérable et avait un diamètre comparativement fort, pour pouvoir porter le poids de la partie supérieure de l'instrument. Il fallait en effet un mouvement relatif des deux périphéries, donné par la vis de rappel, qui s'élevait à $16''$ de la division, avant que l'axe commençât à se mouvoir dans son moyeu. Cependant le mouvement de la lunette supérieure correspondait toujours au mouvement des verniers, vu que les supports de l'axe horizontal étaient placés à la périphérie de l'alidade. Mais il en était autrement avec la lunette inférieure, jointe non pas à la périphérie du limbe, mais à son moyeu. Mettons que l'axe optique de cette lunette était parallèle à un diamètre quel-

conque, de la division, dans l'état du cercle exempt de flexion, ce parallélisme souffrait des changements de $f = \mp 8''$, dès que la vis de rappel agissait dans un sens ou dans l'autre. En supposant maintenant qu'un angle X entre les deux objets A et B ait été mesuré de sorte que, dans le pointé de la lunette de vérification à la mire, le dernier mouvement de la vis de rappel ait été dans le même sens pour l'observation de A et de B , alors l'instrument donnait l'angle juste $= X$. Mais deux directions opposées du dernier mouvement de la vis de rappel donnaient $X + 2f$ ou $X - 2f$, c'est-à-dire des erreurs de $\mp 16''$.

Rien de plus facile que de remédier à cet obstacle à la mesure simple, dès qu'il est connu. Il ne fallait que pointer deux fois de suite sur chaque objet, en employant, pour les deux pointés les deux mouvements opposés de la vis de rappel. La moyenne des deux lectures des verniers donnait le lieu de chaque objet sur la division, délivré de l'effet de la flexion. Ce remède était parfait, parce que la flexion doit être une quantité constante pour le même état de l'instrument. Voici les 8 valeurs moyennes de f , trouvées aux 8 stations, où la mesure des angles a été faite en 1823 :

	1823		$f =$
LEWALA	18 Juin	— 21 Juin	8,07
OBERPAHLEN	22 »	— 26 »	7,38
SALL	1 Juillet	— 2 Juillet	9,12
			Moyenne 8,19

Puis, après avoir nettoyé l'instrument et huilé l'axe de nouveau :

MARIEN	20 Juillet	— 22 Juillet	7,10
EDDAFER	29 »	— 30 »	6,40
WARRES-MÄGGI	4 Août	— 11 Août	5,31
LEWALA	13 »	— 14 »	5,94
TAMMIK	17 »	— 18 »	5,93
			Moyenne 6,14

On voit que le nettoyage et la nouvelle huile ont diminué la flexion, en diminuant la friction centrale. Les petites oscillations de f dans les deux périodes indiquent de petits changements dans l'état de friction, produits par le transport de l'instrument, d'une station à l'autre, et par l'action de la température sur l'huile.

Quoique l'élimination indiquée de l'effet de la flexion ne laissât rien à désirer pour l'exactitude de la mesure des angles, j'ai cependant préféré de changer l'arrêt des deux cercles à la périphérie en un arrêt absolu du moyeu du limbe contre le trépied métallique de l'instrument; ce qui produit un mouve-

ment simultané et absolument identique, soit de la lunette supérieure avec les verniers de l'alidade, soit de la lunette inférieure avec le limbe, les rayons des deux cercles n'éprouvant plus la moindre tension dans les opérations successives. Cette construction de l'instrument universel a été adoptée depuis par M. Ertel, et depuis trente ans cet instrument n'admet plus la répétition enchainée.

Ayant condamné et rejeté les angles mesurés en 1822 par répétition, toutes les mesures des angles terrestres de l'arc Baltique sont devenues des mesures simples, mais exécutées sur plusieurs arcs du limbe et en assez grand nombre pour diminuer convenablement l'influence des erreurs accidentelles. Il paraît propre de désigner ce procédé par le nom de la mesure des angles simples par *réitération*, vis-à-vis de l'ancienne méthode de la mesure par *répétition*.

§. 13. Comparaison entre la répétition et la réitération. Détails de l'usage de la méthode de réitération.

Comparons maintenant les deux méthodes. Si a désigne l'erreur probable du pointé, b celle de la lecture pour la moyenne des 4 verniers, et c la correction de la division, pour l'arc compris entre un point quelconque A et un autre point $A + X$ de la division: nous aurons la correction e d'un angle, obtenu en ne pointant qu'une seule fois à chaque objet, par $e = c \mp \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Si la mesure est faite à n reprises, toujours sur le même arc du limbe, la correction de la moyenne se réduit à $f = c \mp \sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)}{n}}$. Donc, en augmentant le nombre des mesures, on approche à l'exactitude qu'admet l'erreur de division c inhérente à cet arc du limbe. La répétition, au contraire, conduit, par un angle mesuré n fois, à une valeur dont la correction f' s'exprime par $f' = \lambda + \frac{c'}{n} \mp \frac{b' \sqrt{2}}{n} \mp \sqrt{\frac{2a'^2}{n}}$, λ étant l'erreur intrinsèque que produit l'opération de la répétition. La limite de cette expression est $f' = \lambda$. Il est presque impossible de déterminer le montant de λ ; car cette quantité dépend autant de la construction de l'instrument, que de la manière dont on le traite. Elle peut être zéro, si les différentes causes perturbatrices agissent à s'anéantir réciproquement; mais l'observateur n'est pas en état de procéder par une voie sûre, pour produire cet effet. L'expérience a bien prouvé, qu'en général, dans la mesure des angles horizontaux, λ est en dedans d'un couple de secondes, même assez souvent une fraction de seconde seulement. Mais dès que la répétition est appliquée à la mesure des angles verticaux, λ prend une valeur considérable à cause du déplacement continu de l'axe horizontal dans son moyeu, déplacement qui a lieu par l'effet de la pesanteur, chaque fois qu'on change la position des deux cercles réunis à la périphérie, pour passer de l'observation paire à l'observation impaire. Ici l'exactitude du résultat est détruite par la répétition, de sorte qu'une distance au zénith déterminée par l'observation simplement conjuguée, dans les deux positions du

cercle, est, pour tout instrument bien divisé, plus vraie que le résultat déduit d'une centaine de répétitions, faites avec le même instrument.

L'exactitude de la mesure d'un angle terrestre sur le même arc du limbe étant limitée par l'erreur de division inhérente à cet arc, il devient nécessaire de faire la mesure sur plusieurs arcs, pour diminuer l'effet des erreurs de division, comme nous l'avons déjà énoncé. Si les erreurs de division ne suivent aucune loi, on parvient par la mesure de l'angle sur m arcs différents, ayant fait pour chaque arc n observations, à l'erreur probable du résultat $\varepsilon = \mp \sqrt{\left\{ \frac{2a^2 + 2b^2}{mn} + \frac{c^2}{m} \right\}}$. Dès que les erreurs de division suivent une loi exprimée par les sinus et cosinus des angles multiples, il est clair, qu'avec 4 verniers, l'effet de ces erreurs régulières est entièrement anéanti, en mesurant sur deux arcs dont les traits initiaux diffèrent de 45° . Cependant l'expression des erreurs de division par une fonction des sinus et des cosinus n'est qu'une approximation. Il faut par conséquent baser la mesure des angles sur un plus grand nombre d'arcs, symétriquement distribués sur 90° du limbe, donc par les 4 verniers sur la circonférence totale. Par cette voie, les erreurs régulières étant toujours parfaitement éliminées, on peut détruire l'effet des erreurs accidentelles d'autant mieux, que le nombre des points initiaux des différents arcs est plus considérable.

Dans l'application de la méthode indiquée on agit de sorte, qu'en partant d'un point initial quelconque de la division, pour la direction d'un des objets, on observe successivement tous les objets, en conservant à l'aide de la lunette inférieure le parallélisme parfait du limbe; ce qui donne comme résultat non seulement les angles entre des couples d'objets, mais en général les directions relatives de tous les objets, comparées à la direction d'un des objets prise pour zéro. Toutes les observations faites par une position invariable du limbe forment ensemble une *mise* (en allemand *Setz*, en russe *прієт*). Dans les opérations de Livonie les directions ont été observées, depuis 1824, par 6 mises, dans lesquelles la position du limbe, ou du point de départ pour l'objet initial, avait changé pour chaque mise de 15° . Avec le changement du point de départ, j'ai combiné toujours un changement du vernier de $50''$ à peu près, ce qui servait à détruire l'influence des petites irrégularités dans les divisions des verniers. Dans chaque mise j'ai pointé deux fois à chaque objet, en employant des mouvements opposés des deux vis de rappel, c. à d. en faisant marcher, en apparence, les objets sur le point de visée du réticule, une fois de gauche à droite, l'autre fois de droite à gauche. C'était pour obvier à toute arrière-action des vis dans l'espace de temps de 2 minutes à peu près, entre le pointé et l'achèvement de la lecture des 4 verniers. Ces deux mouvements opposés des vis ne se succédaient point immédiatement, mais se sont faits séparément dans les deux moitiés de chaque mise. A la fin de chaque mise je revenais encore une fois sur l'objet initial, pour constater que rien n'avait été dérangé dans l'instrument, pendant la durée de

la mise. Les six mises se subdivisaient en outre en deux groupes. Pour trois des mises le cercle vertical se trouvait à droite de la lunette, position *R*, pour les trois autres à gauche, position *L*. Cet arrangement produit un renversement de l'objectif vis-à-vis des objets, et détruit toute action soit de l'erreur de collimation, soit d'une imperfection de l'image qui peut devenir nuisible dans l'observation d'objets d'un éclat très-différent, p. e. d'un héliotrope et d'un signal lointain et faible.

§. 14. Notice historique sur l'application de la réitération. Nécessité de l'emploi de la lunette de vérification.

La mesure des angles terrestres par réitération, introduite en 1823, a été depuis généralement adoptée dans les opérations géodésiques de Russie. Dans les travaux de l'arc du méridien dirigés par M. de Tenner, elle a été employée pour une partie de l'arc de Volynie, et sans exception dans la mesure de Bessarabie. Nous rencontrons la même méthode pratiquée par Bessel en 1832 et 1833, dans ses opérations de la mesure de l'arc du méridien en Prusse, faite avec un théodolite d'Ertel de 15 pouces de diamètre, pourvu de verniers, et plus tard par M. de Baeyer dans la mesure du littoral de Prusse, exécutée 1837 à 1846 avec le même instrument pourvu de microscopes. Quant aux travaux géodésiques des Anglais, les théodolites colossaux, de trois pieds de diamètre, pourvus de microscopes, les avaient dispensés de la répétition, dans leurs vastes mesures exécutées soit en Europe soit aux Indes. Déjà en 1799 Mudge avait indiqué la réitération des angles sur différents arcs du limbe, sans en faire cependant un usage régulier et systématique. Voyez *Account of the operations for the trigonometrical survey of England etc.* vol. I., publié en 1799, p. 137. Mais nous la voyons pratiquée fort systématiquement dans les opérations du colonel Everest, exécutées aux Indes orientales depuis 1823. Voyez son *Account*, publié London 1830, p. 47, et son autre *Account*, publié London 1847, introduction p. CXVI.

Je terminerai cet exposé des méthodes d'observation par une remarque pratique. Il ne suffit nullement, dans la mesure des angles terrestres, projetés à l'aide du théodolite ou de l'instrument universel, que l'observateur de la lunette supérieure regarde de temps à autre si la lunette de vérification est restée sur la mire; il faut au contraire, pour atteindre l'exactitude qu'admet l'instrument, deux personnes qui observent simultanément dans les deux lunettes, et qui produisent, pour chaque direction, une nouvelle observation des deux coïncidences, savoir du fil de la lunette inférieure avec la mire, et du milieu des fils de la lunette supérieure avec le signal. C'est précisément cette simultanéité des deux observations dans les deux lunettes, qui est le grand mérite du cercle répéteur de Borda, justement employé, et qui

doit être retenue dans l'usage de tous les instruments destinés à la mesure des angles projetés à l'horizon *). Par conséquent, tout instrument destiné à la mesure des angles horizontaux qui manque de lunette de vérification, est imparfait. Tel instrument peut bien donner des résultats satisfaisants, dès qu'il est placé sur un pilier très-solide en pierres. Mais l'autre instrument pourvu de la lunette de vérification travaille par l'application de l'observation simultanée, également bien sur un statif moins stable, et donne toujours des résultats qui sont parfaitement à l'abri de toute influence d'un manque de stabilité du limbe vis-à-vis du trépied métallique de l'instrument, de ce trépied vis-à-vis du statif, du statif vis-à-vis du sol, ou qui puisse être produit par un changement de position de la part de l'observateur. L'importance de cette remarque se prononce entre autres, dans les difficultés qu'a rencontrées plusieurs fois M. de Baeyer, pour la mesure des angles à l'aide de son instrument sans lunette de vérification, placé, pour gagner une vue libre, sur le haut d'un arbre enfoncé dans le terrain et convenablement consolidé par des contre-fiches et des traverses, l'observateur se trouvant sur une galerie entièrement isolée de l'arbre. Voyez *Baeyer die Küstenvermessung* etc. Berlin 1849, p. 68 et suiv. Ces arbres étaient sujets à une torsion qui continuait dans une direction opposée au mouvement azimutal du soleil, depuis le matin jusqu'à l'heure du maximum de température, et changeait depuis en un mouvement rétrograde jusqu'à l'autre matin. A Trunz, sur un arbre de 24 pieds de haut, l'effet de la torsion s'élevait, dans son maximum, jusqu'à 60° dans l'espace de 30 minutes. Un mouvement aussi considérable rendait l'observation impossible; l'observateur se voyait donc forcé d'attendre les époques où la torsion devint soit stationnaire, soit au moins lente et assez uniforme. Or il est à présumer que la mesure exécutée même avec ces précautions est essentiellement inférieure à toute autre faite sur un pilier solide. Ce qui se voit aussi dans le registre des différentes directions relatives, donné p. 90 à 254 de l'excellent ouvrage de M. de Baeyer. Certes cette difficulté n'aurait pas existé, si l'instrument avait eu sa lunette de vérification, tout effet d'un changement de position dans la base de l'instrument disparaissant par une observation simultanée dans les deux lunettes. A RAËKÛLL j'avais observé en 1823 sous des conditions tout à fait semblables à celles de Trunz, l'instrument étant placé à l'extrémité d'une poutre, dans une élévation de 26 pieds au-dessus du sol. Sans doute ce statif a été également sujet à la torsion, mais comme elle m'était indifférente, je ne l'ai pas même examinée.

*) La lunette inférieure remplit, pour la mesure des angles horizontaux, une des deux fonctions qu'exerce le niveau dans la mesure des angles verticaux. En effet, le niveau non seulement détermine la direction verticale, mais s'il est en réunion directe et intime avec le cercle vertical, indique encore et mesure tout changement de position dans ce cercle.

L'emploi régulier de la lunette de vérification augmente essentiellement la certitude de chaque observation isolée, même avec des bases solides de l'instrument. Cette méthode est éminemment plus exacte que l'autre, dès que la base n'a plus la stabilité des piliers en pierres etc.; elle est enfin la seule qui soit praticable si l'instrument est établi sur un échafaud, comme ceux de M. de Tenner, où l'observateur et l'instrument ne sont plus réciproquement isolés. Or dès que l'observation isolée gagne en certitude, un plus petit nombre de mesures suffit pour parvenir au même degré d'exactitude dans le résultat, et l'emploi de la lunette inférieure, quoiqu'il réclame un sacrifice de temps pour chaque pointé isolé, conduit finalement à un progrès plus rapide des opérations.

Il m'a paru intéressant de comparer sous ce point de vue les opérations de notre arc Baltique avec celles que Bessel a faites, 10 ans plus tard, pour l'arc de Prusse, en me bornant pour ces dernières aux mesures horizontales faites avec le théodolite de 15 pouces d'Ertel, sans lunette de vérification, employé toujours par la méthode de réitération, comme mon instrument de 13 pouces, mais qui était pourvu de cette lunette. Les journaux publiés des deux opérations fournissent les points de comparaisons que voici :

en Livonie les angles ont été mesurés à 34 stations pour 141 directions, par 84 journées d'observation,
 en Prusse » » » » » » 13 » » 73 » » 97 » » .

Donc en moyenne une station a été achevée :

en Livonie par 2,47 journées d'observation,
 en Prusse » 7,46 » » ;

ce qui indiquerait un progrès de 3,02 fois plus rapide en Livonie. Mais le nombre des directions observées à chaque station a été plus grand en Prusse, à cause des directions diagonales. Car nous avons :

en Livonie, pour 1 station en moyenne 4,15 directions observées,
 en Prusse » 1 » » » 5,54 » » .

Comparons donc le nombre des directions avec celui des journées; et nous trouvons qu'en moyenne, dans les opérations

de Livonie, une journée a effectué l'achèvement de 1,679 directions,
 de Prusse » » » » » » 0,752 » ;

d'où suit que le progrès de l'opération a été de 2,2 fois plus rapide en Livonie; ce qui paraît étrange, vu que l'observation elle-même, si la lunette de vérification n'a pas été employée, est bien plus prompte. L'explication de ce paradoxe se trouve dans la circonstance que les observations des différents objets ont été incomparablement plus nombreuses en Prusse que chez nous; car

Les 141 directions de Livonie ont fourni 833 chiffres différents, consignés dans les journaux comme résultats d'une observation complète de deux pointés ou d'une mise.

Les 73 directions de Prusse présentent 3049 mises.

Donc en moyenne :

chaque direction de Livonie a été déterminée par 5,91 mises,
 " " " Prusse " " " " 41,77 " ;

ou le nombre des pointés sur chaque objet a été en Prusse 7 fois (7,07) plus grand. Nos chiffres nous fournissent encore un résultat, c'est qu'en apparence l'observation isolée d'un objet, pointé et lecture, s'achève, sans lunette de vérification, 7,07 : 3,02 = 2,34 fois plus vite, que dans l'instrument où la lunette inférieure fonctionne. Ce rapport n'est cependant pas exact. En Livonie la règle a été strictement observée, de ne jamais faire des mesures que par des images suffisamment distinctes des objets, c'est-à-dire presque exclusivement pendant la période de 2 heures des images calmes, qui d'ordinaire a lieu chaque après-midi (*Gradmessung* I. p. 88). Bessel a observé (*Gradmessung in Ostpreussen* p. 67) par des conditions bien plus variées des images, et la durée moyenne du travail d'une journée doit avoir été plus grande pour lui que pour nous, peut-être près du double.

Afin que la comparaison des deux procédés ait un sens précis, il reste à déterminer, quel est le rapport des exactitudes gagnées, dans l'une des opérations par 6 mises avec l'emploi de la lunette de vérification, dans l'autre par 42 mises sans cet emploi. Si le nombre 7 fois plus grand des pointés faits par Bessel avait conduit à une exactitude $\sqrt{7}$ fois plus grande, certes le plus long travail voué à la mesure des angles aurait été largement récompensé. Nous pouvons examiner, pour ce but, les erreurs dans la somme des trois angles comparée à 180° + l'excès, dans les différents triangles des deux opérations. L'ouvrage de Bessel, p. 141 à 148, donne les erreurs pour ses 22 triangles. Dans ce nombre il y a 15, pour lesquels tous les angles ont été mesurés à l'aide du théodolite de 15 pouces : pour les 7 autres, un ou deux des angles de chaque triangle ont été mesurés à l'aide d'un théodolite de 12 pouces, en partie par répétition. Les 15 triangles donnent la somme des carrés des erreurs = 17,69, donc le carré moyen de l'erreur dans un triangle = 1,179. Dans l'opération de Livonie (*Gradmessung* I. p. 148) 31 triangles ont donné le carré moyen = 0,987, même plus petit. Enfin le poids relatif de deux mises isolées, une de Livonie, l'autre de Prusse, se trouve par le rapport $41,77 \cdot 1,179 : 5,91 \cdot 0,987 = 8,44 : 1$; ce qui signifie qu'une mise de Livonie a valu autant que 8 mises de Prusse.

Il est hors de doute que la cause principale de cette supériorité de la mesure des angles de Livonie se trouve dans l'emploi de la lunette de vérification. Reichenbach avait pourvu de cette lunette tous ses

instruments, destinés aux opérations géodésiques. Ceux qui ont ôté la lunette de vérification, ont fait faire la géodésie pratique un pas en arrière. Il faut par conséquent rétablir la lunette de vérification dans ses droits que lui avait assignés Reichenbach, dès qu'il s'agit de mesures de haute précision. C'est qu'en géodésie, comme dans l'astronomie pratique, le principe doit régner que la plus grande certitude des résultats ne s'atteint point si bien par un grand nombre d'observations moins exactes, que par un petit nombre d'observations précises dans tous les éléments. Les progrès ultérieurs des sciences d'observation dépendent en grande partie de l'application de ce principe qui, sans considérer l'avantage de précision, produit soit une épargne considérable du travail, soit une diminution des calculs, c. à d. une épargne de l'objet le plus précieux pour l'homme, du temps.

§ 15. Résumé des méthodes d'observation employées à la mesure des angles horizontaux des quatre arcs.

1. *Arc Baltique.*

Tous les angles ont été mesurés par réitération des angles simples. En 1823, les angles de 9 stations ont été déterminés à l'aide de 5 mises, chacune ayant 4 pointés des différents objets. En 1824, j'ai fait à Anagnini 9 mises, chacune d'un seul pointé. Mais ce procédé a été abandonné tout de suite, parce qu'il exigeait trop de temps pour les changements du point de départ, et qu'il n'offrait aucune garantie contre une erreur de lecture, ou contre une perturbation de l'instrument. C'est pourquoi pour les autres 26 stations, le nombre des mises a été fixé à 6, chacune de deux pointés. La plupart des mises ont été faites de sorte, que tous les objets ont été observés ensemble. Cependant le nombre des exceptions est assez considérable, l'un ou l'autre des objets étant invisible. Telle mise a été quelquefois refaite, ce qui produisait, avec la portion achevée, une mise abondante. En d'autres occasions la mise a été complétée par les observations nécessaires. Le cas qu'une des directions manque entièrement dans une mise ne se trouve que 5 fois à côté de 833 mises complètes. En revanche il y a eu, pour 4 angles, 3 ou 4 mises additionnelles qui forment un système à part de réitérations symétriques.

2. *Arc de Lithuanie.*

La méthode de la répétition a été employée pour tous les angles de cette opération exécutée en 1818, 19, 20, 26, 27 et 28. En tout il y a eu 8678 répétitions pour les 174 angles. ou chaque angle a été mesuré par un nombre moyen de 50 répétitions. Mais en égard à ce que 22 angles ont été observés par deux instruments, il y a eu 196 valeurs différentes et 44,2 répétitions pour chaque angle. Sans exception, deux individus observaient conjointement au cercle

répétiteur, pour avoir toujours l'observation simultanée des deux objets. En 1818 à 1826 la répétition a été faite de sorte, que la lunette supérieure avançait toujours dans le sens des chiffres de la division, ou par un mouvement positif. A partir de 1827, chaque angle a été mesuré 20 fois par un mouvement positif, et 20 fois par un mouvement en sens opposé ou négatif, et cette règle a valu tant pour les deux cercles répéteurs de Troughton et de Baumann, *T* et *B*, que pour le théodolite de Reichenbach, *R*. Il n'y a cependant que 42 angles mesurés antérieurement à 1827; donc pour 132 angles l'opération dans les deux sens a été régulièrement appliquée. Voyez *Записки* VIII. p. 399. Je crois que c'est à ce procédé de l'observation simultanée par deux personnes, et du mouvement dans les deux sens, qu'est dû le succès distingué des opérations de M. de Tenner, malgré la difficulté que présentait la position moins stable des instruments, établis sur des échafauds de grande hauteur.

3. *Arc de Volynie.*

La mesure de Volynie, commencée huit ans après la fin des opérations de Lithuanie, a été faite en 1836, 37 et 38. Les instruments *B* et *R* ont disparu dans cette opération, ayant été remplacés par *e*, *U* et *M*. La répétition des angles prédomine encore en Volynie. L'instrument *T* a été employé, en répétant, pour 53 angles, *M* pour 30 angles et *e* pour 6 angles, toujours par l'observation simultanée dans les deux lunettes et par les deux mouvements opposés. Mais 36 angles ont été mesurés à l'aide du théodolite *e*, et 8 angles à l'aide de *U*, sans faire usage de la répétition, mais en pratiquant la réitération, en général par 12 mises, l'instrument universel *U* n'admettant pas même la répétition, par sa construction. L'essai d'employer aussi *M* par réitération, fait pour quatre angles, ayant donné des résultats peu satisfaisants à cause des erreurs de division, cet instrument a été rendu à la répétition pour 30 angles. Dans l'usage de la réitération faite par plusieurs observateurs, on remarque encore une variation notable du procédé. Quelquefois chaque angle a été mesuré à part; en d'autres occasions plusieurs objets ont été réunis dans les mises; enfin le nombre des pointés dans les différentes mises change de 1 à 4.

► 4. *En Bessarabie* la réitération a été pratiquée avec une haute régularité. Il y a en général 12 mises faites, de 4 pointés, savoir de 2 pointés pour chacune des deux positions opposées de l'instrument. Pour quelques-uns des angles, il y a des mises additionnelles. L'observation régulière de tous les objets dans une même mise prédomine, il y a cependant un assez grand nombre d'angles mesurés par des mises isolées.

Il y a encore une autre différence essentielle dans les mesures angulaires de nos quatre arcs, à côté des diversités du terrain, des instruments et des méthodes d'observation. En Livonie les

mêmes deux individus, Struve et M. de Wrangell, ont exécuté la mesure des angles, à l'aide d'un seul instrument, d'une manière une fois adoptée et permanente, et avec la régularité du procédé qu'admettaient les circonstances atmosphériques. J'avais l'observation dans la lunette supérieure et j'ai fait toutes les lectures des divisions, sans exception, tandis que M. de Wrangell observait dans la lunette de vérification, et écrivait les chiffres que je dictais d'après la lecture des divisions. En Lithuanie il y a eu en tout 12 observateurs avec trois instruments, mais une seule méthode d'observation, celle de la répétition. En Volynie 10 observateurs ont mesuré avec 4 instruments, en faisant usage des deux méthodes d'observation. En Bessarabie 4 observateurs ont travaillé avec deux instruments, en faisant des répétitions. Mais un des observateurs a observé avec le même instrument *E* sur 43 stations, les autres 3 observateurs n'ayant fait la mesure horizontale que sur 14 stations. Il y a eu, par conséquent, pour la Livonie une uniformité absolue des opérations, quant à l'instrument, à la méthode et aux observateurs. La Bessarabie approche de cette uniformité, la Lithuanie jouit de l'avantage de l'uniformité dans la méthode, mais elle a une diversité notable dans les instruments et les observateurs. En Volynie la diversité est la plus grande; car nous y avons celle des individus à côté de celle des méthodes d'observation. L'uniformité dans l'exécution des mesures est toujours d'une certaine importance, surtout dès qu'il s'agit de soumettre l'exactitude des résultats d'une vaste opération à une recherche basée sur les principes du calcul de probabilité.

CHAPITRE V.

UNITÉS LINÉAIRES EMPLOYÉES DANS LES OPÉRATIONS DE L'ARC DU MÉRIDIEN.

§ 16. Étalon-module *N*. Copies de cet étalon et échelle-étalon à traits *T*, comparées au module.

L'unité linéaire primitive, sur laquelle reposent les longueurs des 10 bases, mesurées dans le courant de nos opérations entre le Danube et la Mer Glaciale, est un étalon en fer forgé, dont la section présente un carré de $1\frac{1}{4}$ pouces de côté, mais à des bouts en acier trempé. Ces bouts se terminent en de petits cylindres de 2,5 lignes de diamètre, et dont l'extrémité présente une surface circulaire tant soit peu convexe et parfaitement polie. La distance des centres de ces deux surfaces est la longueur de l'étalon, le corps ayant la température de $+ 13^{\circ}0 \text{ R.} = 16^{\circ}25 \text{ C.}$ et étant supporté exactement à $\frac{1}{4}$ et à $\frac{3}{4}$ de sa longueur totale. Je désigne cet *étalon-module* par *N*. La description s'en trouve *Gradmessung* I. p. 51 et suiv.

1) *N* a été étalonné d'après une toise de Fortin, *F*, comparée à celle de Pérou, à Paris en 1821, par feu M. Arago qui en attesta la juste longueur. Voyez *Gradmessung* II. p. 400. Les comparaisons entre *F* et *N* faites à Dorpat en 1828 ont donné en supposant $F = 864,00000$ lignes:

$$N = 1728,01249 \mp 0,00071 \text{ lignes à } 13^{\circ}0 \text{ R.};$$

voyez *Gradmessung* II. p. 407. Cette longueur de $N = 1728,01249$ lignes de la toise de Pérou a été adoptée invariablement comme chiffre de départ dans tous nos calculs de longueurs linéaires. L'erreur probable $\mp 0,00071$ ligne, dans le chiffre donné *N*, indique l'exactitude des opérations de comparaison. Donc en partant de $N = 1728,01249$ lignes comme donné, nous aurions, par les mêmes comparaisons, $F = 864,00000 \mp 0,00035$ lignes. Aussi *N* étant fixé, *F*, la toise de Fortin, disparaît-elle entièrement des comparaisons ultérieures.

2) N a été comparé le plus soigneusement soit avec plusieurs copies, soit avec un nombre considérable d'unités linéaires du pays et de l'étranger. Ces comparaisons ont été l'objet d'un travail de plusieurs années, exécuté à Poulkova, et dont nous rendrons compte plus tard.

3) C'est encore avec N qu'ont été comparées les règles employées à la mesure des différentes bases, soit directement, soit par l'intermédiaire d'une copie de N , entièrement semblable à N en matière et en forme, soit enfin à l'aide d'une autre échelle, mais dont le rapport à N avait été évalué avec la certitude requise. Je donnerai ici les valeurs définitives des deux copies employées de N , et de l'échelle du saïène, T , à traits, sur laquelle M. de Tenner a étalonné ses règles de mesure :

$$\begin{array}{l}
 N = 1728,01249 \\
 \text{Copie } P = N - 0,01809 \text{ ligne} = 1727,99440 \mp 0,00019 \text{ lignes} \\
 \text{» } R = N + 0,00742 \text{ »} = 1728,01991 \mp 0,00077 \text{ »} \\
 \text{Échelle } T = 0,547309580 N = 945,75779 \mp 0,00038 \text{ »}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{à} \\ 13^{\circ}0 \text{ R.} \\ \hline 16;25 \text{ C.} \end{array}$$

§ 17. Emploi des étalons, dans la mesure des différentes bases. Notice sur l'échelle T .

Pour la mesure des bases deux différents appareils ont été employés, que je désignerai par *l'appareil de Struve* et *l'appareil de Tenner*. L'appareil de Struve a été employé à mesurer les 7 bases suivantes :

	latitude moy.	époque.	étalon employé.
1. la base d'ALTEN sur le bord de la Mer Glaciale	69° 55'	1850	P
2. » » d'ÖFYER-TORNEA en Laponie	66 22	1851	P
3. » » d'ULEABORG dans la Finlande septentrionale	65 0	1845	N
4. » » d'ELIMÄ » » » méridionale	60 50	1844	N
5. » » de ST. SIMONIS en Ehstonie	59 2	1827	N
9. » » de ROMANKAUTZI dans la Bessarabie septent.	48 30	1848	R
10. » » de TASCHEUNAR » » » mérid.	45 35	1852	P .

Les trois bases mesurées à l'aide de l'appareil de Tenner sont situées entre les deux bases 5 et 9 du tableau précédent, savoir :

	latitude moy.	époque.	étalon employé
6. la base de PONEDELI, dans la Lithuanie septentrionale	55° 58'	1820	T
7. » » d'OSSOWNITZA » » » méridionale	52 14	1827	»
8. » » de STANO-KONSTANTINOW en Volynie	49 42	1838	»

Dans les trois premières occasions de l'emploi de l'appareil de Struve en 1827, 1844 et 1845, l'étalon-module N avait accompagné l'appareil aux endroits où l'opération devait se faire. Plus tard, j'ai préféré que l'étalon N ne fût point exposé aux risques d'un voyage de longue distance, mais qu'il restât toujours en parfaite sûreté à l'Observatoire central. Pour le remplacer, l'étalon R fut confectionné à l'atelier de l'observatoire en 1847. Il accompagna en Bessarabie les 4 règles, employées déjà en Elhstonie et en Finlande, et qui devaient servir de nouveau à la mesure de la base de ROMANKAUTZI. La comparaison entre R et N eut lieu à Poulkova en 1847. La mesure de cette base ayant été faite en 1848, sous la direction d'un des astronomes de Poulkova, M. Sabler, tout l'appareil resta en Bessarabie, et passa plus tard entre les mains du major-général Wrongschenko pour la mesure des différentes bases, des vastes opérations géodésiques dont il était chargé pour effectuer la jonction entre le Pruth et le Wolga, dans la direction des parallèles. L'étalon R , ayant été endommagé dans l'intervalle entre la mesure de la base de ROMANKAUTZI et l'époque où il fut remis entre les mains de M. Wrongschenko, a dû être remplacé par un autre étalon P dont je parlerai tout de suite.

L'appareil des règles de mesure que j'avais fait construire à Dorpat en 1827, étant resté dans la Russie méridionale, il me fallut construire de nouvelles règles pour la mesure des deux bases les plus septentrionales de notre arc, en Norvège et en Laponie. Ce second appareil, construit en 1850 à l'imitation de l'ancien, y compris un second comparateur, était perfectionné dans quelques points et exécuté avec ce fini qui caractérise tous les travaux de notre artiste distingué M. Brauer. Un nouvel étalon P fut joint à cet appareil et comparé à Poulkova, en 1850, avant le départ de l'appareil pour la Mer Glaciale, et puis en 1852 après le retour de Laponie.

Les comparaisons de 1850	ont donné	$P = N - 0,01699$	ligne	=	1727,99550	lignes,	poids 4
»	»	» 1852	»	=	$N - 0,01831$	»	poids 20
					différence	0,00132	ligne.

La petitesse de la différence qui n'est que de $\frac{1}{1300000}$ de la longueur totale, prouve l'invariabilité de P vis-à-vis de N , pendant le voyage. La moyenne de toutes les 24 comparaisons nous présente $P = 1727,99440 \mp 0,00019$ lignes, valeur que nous avons donnée plus haut. C'est ce même étalon P qui a été envoyé en 1852 en Bessarabie, où il a servi pour l'étalonnage des règles de l'ancien appareil, employé encore à la mesure de la base de TASCHEWAN.

L'échelle T de Tenner porte l'inscription No. 10, qui se rapporte à la collection d'instruments du Dépôt topographique de l'État-major Impérial. Elle est composée de deux règles en fer forgé, réunies tout le long sous un angle droit par une multitude de vis, et par là d'une rigidité extrême. Dans les

comparaisons, elle repose sur $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de sa longueur. La règle horizontale, de 87,1 pouces anglais de long, a 2,1 pouces de large sur 0,5 de haut. Elle porte deux lamelles d'argent enfoncées dans le corps de la règle et sur lesquelles se trouvent les deux traits qui déterminent la longueur de l'échelle, destinée à représenter le sajène russe de 7 pieds anglais. La seconde règle qui est appliquée au dos de l'autre, a 83,2 pouce de long, 0,5 pouces d'épaisseur, et 1,9 pouces de haut au milieu, en diminuant jusqu'à 1,4 pouces de haut aux extrémités. Voyez la description détaillée de cette échelle dans les *Зануки* VIII. p. 110 et suiv.

Le rapport entre le sajène de cette échelle T et l'étalon-module N avait été déterminé à deux reprises, la première fois par Tenner et Struve en 1828, lors de la jonction entre l'arc Baltique et l'arc de Lithuanie. Cette recherche donna

$$T = 945,76611 \text{ lignes pour } 13^{\circ}0 \text{ R. de } T; \log = 2,9757837494,$$

Зануки VIII. p. 110 à 126. Depuis, cette échelle est restée entre mes mains, et elle se trouve encore aujourd'hui à Poulkova pour y être gardée. Elle a donc pu entrer dans la série complète des comparaisons de différentes unités linéaires, comparaisons exécutées avec des moyens supérieurs à ceux dont nous avons disposé en 1828. Ces opérations faites en 1852 et 1853 conduisirent à la valeur définitive:

$$T = 945,75779 \mp 0,00038 \text{ lignes, pour } 13^{\circ}0 \text{ R. de } T; \log T = 2,9757799272,$$

$$\text{donc } \log \frac{T}{864} = 0,0392661847, \text{ pour la conversion des } T \text{ en toises.}$$

La différence entre les deux chiffres T des années 1828 et 1852.53 n'est que de 0,00832 ligne, et prouve qu'en 1828 nous avons déjà atteint une précision distinguée dans une détermination aussi compliquée et difficile, que celle de deux unités linéaires, entre lesquelles il n'existe point de rapport simple et dont une est un étalon à bouts, l'autre une échelle à traits. M. de Tenner a fait usage du chiffre $T = 945,76611$ dans le calcul des triangles qui reposent sur les trois bases de PONEDELI, d'OSSOWNITZA et de STARO-KONSTANTINOW etc. Par conséquent, toutes les longueurs linéaires, déduites de ces bases dans les volumes VIII, IX et XII des *Зануки*, et qui sont exprimées en toises, réclament une diminution de $\frac{1}{113626}$ de la longueur; ou il faut retrancher des logarithmes 0,000038.222, pour que ces longueurs linéaires répondent à la valeur définitive de $T = 945,75779$ lignes, déterminée en 1852 et 53. Si d'après Kater la longueur du pied anglais est égal à 135,114 lignes de la toise de Pérou à $13^{\circ}0 \text{ R.} = 16^{\circ}25 \text{ C.}$, le sajène russe de 7 pieds anglais sera $S = 945,798$ lignes. Nous avons $S - T = 0,04021$ ligne, e. à d. T est trop court d'environ $\frac{1}{25}$ de ligne.

CHAPITRE VI.

LES DEUX APPAREILS EMPLOYÉS POUR LA MESURE DES BASES.

§ 19. L'appareil de Struve.

Cet appareil a déjà été décrit, dans sa forme primitive, *Gradmessung* I. p. 51 à 60. Depuis, un second appareil a été exécuté, voyez p. 38, avec plusieurs améliorations. J'ai jugé convenable de donner ici la description complète de ce second appareil, employé en commun avec les géomètres de Suède et de Norvège pour la mesure des deux bases les plus septentrionales de notre arc, celle de ÖFVER-TORNEA en Laponie et celle d'ALTEN sur les bords de la Mer Glaciale.

Les figures 1 à 23 des planches XXII, XXIII et XXIV représentent tout l'appareil, composé d'un étalon *P*, de quatre règles de mesure *A*, *B*, *C*, *D* et du comparateur. Pour chaque figure le rapport du dessin à la grandeur naturelle est indiqué en parenthèses; c'est ainsi que nous avons les rapports ($\frac{1}{10}$) ($\frac{1}{4}$) ($\frac{1}{2}$) et une seule fois ($\frac{1}{4}$) ou la grandeur naturelle.

Fig. 1 montre trois règles de mesure *A*, *B*, *C*, arrangées l'une à la suite de l'autre, vues de côté.

La règle du milieu *B* est placée sur ses trépieds et ses chevalets, comme dans la mesure effective d'une base.

Fig. 2 présente les mêmes trois règles vues d'en haut.

Fig. 3 est le niveau pour la détermination de l'inclinaison des règles.

Fig. 4 est un autre petit niveau employé pour le premier ajustement de chaque règle dans les deux sens.

Fig. 5 à 10 représentent les détails des règles à l'intérieur des boîtes.

Fig. 11 à 15 montrent les bouts des règles.

Fig. 16 et 17 donnent l'appareil qui sert à fixer, sur le terrain, le point où l'opération d'une journée se termine le soir, ou par une autre interruption quelconque.

Fig. 18 représente l'étalon P placé sur le comparateur, le tout vu de côté.

Fig. 19 donne la charpente du comparateur, vue d'en haut.

Fig. 20 et 21 représentent le bout fixe ou point d'appui du comparateur.

Fig. 22 et 23 montrent l'autre bout du comparateur, pourvu du levier de touche mobile.

Les quatre règles de mesure sont de fer forgé, chacune de 12 pieds de long, avec 15 lignes de haut et de large. Un des bouts est armé d'une pièce d'acier trempé, et travaillé sur le tour à la forme qu'indique la figure 11, en se terminant en une surface tant soit peu convexe et parfaitement polie. L'autre bout porte le levier de touche en acier, directement appliqué au fer de la règle, de sorte qu'il forme un seul corps avec cette règle. On reconnaît les détails de ce levier dans les fig. 12 à 15. Le bras le plus court se termine en un demi-globe poli. L'autre bras porte un index qui passe sur un arc de cuivre argenté, fixé également sur le corps de la règle. Levier et arc sont couverts par une boîte en laiton, attachée également au corps de la règle, mais qui laisse sortir le demi-globe du levier. La division de l'arc se lit à travers une plaque de verre. Un ressort faible qu'on voit le mieux fig. 22 et 23, donne à l'axe du levier une position stable en le pressant dans une direction constante, c. à d. vers le corps de la règle. La distance entre le point central de la surface convexe α et le point extrême du demi-globe β , fig. 11 et 12, constitue la longueur normale de la règle, aussitôt que l'index du levier se trouve placé exactement sur le trait 15 de la division.

Une caisse en bois, peinte en huile, extérieurement et intérieurement, de couleur blanche, contient la règle sans la toucher; car celle-ci repose en a et b , fig. 1 et 2, à $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de sa longueur dans deux coussinets de laiton. L'un de ces coussinets, en a , est rond, fig. 5 et 6, l'autre en b est carré, fig. 7 et 8. Pour entrer dans ces coussinets la règle est travaillée sur le tour à former pour a un cylindre, tandis qu'elle passe par l'autre coussinet, en b , en parallépipède travaillé à la lime. Ces deux endroits travaillés de la règle ayant 3 pouces de long, un changement de position de \mp un pouce dans la direction de l'axe de la règle peut se faire. Le coussinet rond est pourvu d'une pièce supérieure mobile, qui fixe la règle dans ce coussinet à l'aide d'une vis de pression, fig. 5 et 6. Les figures 7 et 8 représentent le coussinet carré, par lequel la règle passe librement avec un petit jeu. Deux thermomètres sont enfoncés dans le corps de la règle à une petite distance des coussinets. Ces thermomètres sont placés debout et sortent de la boîte, mais ils sont garnis d'une maisonnette en bois dont une face est pourvue d'une vitre. Cette maisonnette est hermétiquement fermée et vissée sur le corps de la boîte. Il y a en outre deux tablettes c et d , fig. 1 et 2, fixées sur le corps de la règle, dont une est représentée fig. 9

et 10, sur l'échelle ($\frac{1}{4}$). La partie supérieure de ces tablettes sort également de la boîte. Elles servent à déterminer l'inclinaison de la règle; ce qui se fait à l'aide du niveau, fig. 3. Les surfaces des deux tablettes de chaque règle se trouvent dans un même plan. Aussitôt que ce plan est un plan horizontal, la ligne $\alpha\beta$, fig. 11 et 12, est une ligne horizontale, si l'index du levier est placé sur 15,0 de l'arc divisé. Enfin il y a un pivot en e , fig. 1 et 2, à l'aide duquel une clef f peut effectuer un mouvement dans la direction de la ligne à mesurer.

A l'intérieur de la caisse, la règle elle-même avec les thermomètres est encore couverte d'une enveloppe épaisse de coton brut, dans toute sa longueur, excepté dans les deux endroits de 3 pouces de long où elle passe par les coussinets. Cette enveloppe se continue encore en dehors de la boîte, d'un côté jusqu'au bout fixe α , fig. 11, de l'autre côté jusqu'à la boîte en laiton qui renferme le levier de touche. Les extrémités de la caisse et tous les endroits où une pièce quelconque passe en dehors de la caisse, sont encore bouchés par des couches de coton, et c'est ainsi que la règle est à peu près entièrement préservée des variations brusques dans la température de l'air libre, variations qui ne peuvent pénétrer que très-lentement jusqu'au corps de la règle.

Les figures 1 et 2 nous montrent les chevalets en bois, hauts de 2,5 pieds, de construction extrêmement solide, sur lesquels la mesure de la base se fait. Chaque chevalet porte son trépied en laiton, avec trois vis verticales de fer pour caler la règle, et deux vis horizontales pour l'alignement. La caisse est armée de plaques de fer d'en bas et des côtés, dans les deux endroits où elle passe par les trépieds. L'un des trépieds est à deux bosses, l'autre a une bosse dans l'endroit où la règle y repose; ce qui produit la position stable requise.

L'appareil du niveau, fig. 3, a un pied en fer, à trois chevilles en acier avec lesquelles il se place dans les petits cercles indiqués sur les tablettes c et d , fig. 2. Ce pied porte le niveau qui tourne sur un centre le long d'un arc divisé en 250 parties, chacune de presque exactement 100". L'alidade n'a qu'un simple index; ce qui suffit pour lire les inclinaisons à 5" près.

L'appareil pour fixer sur le terrain le terme de l'opération d'une journée, fig. 16 et 17, est formé par une grosse cheville carrée en fer, longue de 32 pouces et qui entre verticalement dans le terrain à coups de marteau, jusqu'à une profondeur de 24 pouces. Dans sa partie supérieure elle porte un bras avec une rainure sur laquelle glisse et se fixe à l'endroit convenable un cube métallique, pourvu d'un cercle argenté dont le centre délié doit marquer le terme. La projection du dernier point d'une règle sur ce centre se fait à l'aide d'un théodolite établi comme instrument des passages, à une distance de 25 pieds, dans une direction perpendiculaire à la ligne mesurée. Les deux vis z , z' produisent le mouvement micrométrique du point central du cube dans le sens de la ligne mesurée. La projection désirée se fait

avec la plus grande certitude, dès qu'on renverse la lunette sur ses coussinets et qu'on donne à l'axe la juste position horizontale. Le même théodolite opère dans un sens inverse pour relever le point l'autre jour, afin de continuer l'opération.

Le comparateur a pour but de comparer les 4 règles de mesure A, B, C, D avec l'étalon P à deux bouts fixes, travaillés exactement comme le bout fixe d'une règle de mesure, fig. 11.

La figure 18 représente le comparateur vu de côté avec l'étalon P en place. Deux chevalets en bois semblables à ceux dont il a été question plus haut, portent trois poutres, vues d'en haut fig. 19. Les deux poutres extérieures sont de bois de sapin, peintes en huile, comme tous les chevalets, et fixées sur les chevalets, chacune à l'aide de 4 grands boulons à écrous. C'est sur ces deux poutres extérieures que sont placés les deux trépieds métalliques, sur lesquels repose l'étalon ou la règle de mesure pour l'opération comparative. On voit que le poids placé sur les trépieds n'agit aucunement sur la troisième poutre, celle du milieu, en bois de chêne, et qui est librement couchée sur les chevalets, sans vaciller, ayant aux endroits de contact avec les chevalets d'un côté une surface convexe, de l'autre une surface concave. Cette poutre qui forme le corps principal du comparateur, a 13 pieds de long sur $6\frac{1}{2}$ pouces de haut et $4\frac{1}{4}$ pouces de large. Une de ses extrémités porte l'appareil du point fixe γ , fig. 18, et l'autre la pièce δ destinée à la mesure, étant composée d'un levier de touche et d'un appareil microscopique à micromètre.

Les figures 20 et 21 représentent l'appareil du point fixe, vu de face et de côté. Une plaque de fer, forte d'au-delà d'un pouce et de $4\frac{1}{4}$ pouces de large, comme la poutre, porte deux étriers très-solides de fer. Cette plaque est invariablement fixée à la poutre à l'aide de quatre boulons à écrous. Le parallélépipède de fer ϵ est le corps du point fixe. Il entre dans les deux étriers et se fixe dans l'étrier du devant, par deux vis, contre les surfaces opposées et convexes de l'étrier. Dans l'étrier d'arrière il est mobile à l'aide de trois vis, dont l'une agit d'en haut et deux sont latérales, en reposant d'en bas sur un coin mobile d'acier, qui sert à changer la hauteur au besoin. Il est clair que, par ces arrangements, la position du parallélépipède peut être ajustée dans tous les sens, et une fois en place être invariablement fixée. Le bouton ζ d'acier trempé, fig. 21, offre dans le centre de son plan antérieur, légèrement convexe, le vrai point fixe ou d'appui. Ce bouton est réuni au cylindre η , invariablement joint au corps ϵ par une grosse vis à frottement dur opposée à ζ , et qui force la face postérieure de η à s'appuyer sur le plan antérieur de ϵ . Le cylindre η porte encore une petite plaque d'argent θ qui fait un miroir plan. ζ et η ont été travaillés ensemble sur le tour, et le miroir θ est parallèle au plan qui touche le bouton ζ dans le centre de sa surface un peu convexe. Ce miroir présente le moyen de placer le point d'appui dans sa juste position, c. à d. de sorte que le plan tangent à ζ soit exactement perpendiculaire à l'axe de la règle à comparer, ou à la ligne qui joint le centre de ζ au centre du demi-globule du levier de touche.

L'appareil de mesure δ , fig. 18, est représenté en demi-grandeur naturelle fig. 22 et 23. Une plaque de laiton qui se meut dans une queue d'aronde du même métal, porte un levier de touche tendu par un faible ressort dans une direction constante. La queue d'aronde est fixée sur la poutre de chêne par 4 vis. Le mouvement de la plaque se fait par la vis λ , fig. 22. Si l'un des bouts d'une règle à comparer s'appuie contre le point fixe ζ , fig. 21, le levier de touche peut avancer à l'aide de la vis λ , de sorte qu'il vienne en contact avec l'autre bout de la règle, jusqu'à ce que l'index du levier coïncide exactement avec le trait de repère de l'arc qu'il parcourt. Cette coïncidence s'observe avec une extrême précision à l'aide d'une loupe d'un grossissement fort. La loupe qui manque dans le dessin, est fixée au corps de bois. On voit que si deux règles de longueurs un peu différentes sont placées successivement sur le comparateur, la différence pourrait être mesurée à l'aide de la vis λ . Mais j'ai préféré d'exécuter cette mesure à l'aide d'un microscope pourvu d'un micromètre et qui pointe une échelle tracée sur une plaque vissée à la plaque mobile qui porte le levier. L'emplacement du microscope se comprend de nos dessins. C'est un des microscopes de réserve pour le grand cercle méridien de Repsold, que j'ai employé ici. Chaque division du tambour du micromètre donne $\frac{1}{700}$ de ligne. En lisant les dixièmes des divisions, on a les $\frac{1}{7000}$ de ligne. L'échelle divisée, vue sous le microscope, présente 20 parties, chacune $= \frac{1}{6}$ de ligne. Cette échelle est encore mobile à elle et offre ainsi l'avantage d'admettre des mesures faites sur différentes portions de la vis micrométrique, pour éliminer les erreurs dans la vis, s'il y en a.

Si une règle de mesure est placée sur le comparateur, c'est le levier de la règle qui vient en contact avec le point fixe du comparateur, et le levier du comparateur avance vers le bout fixe de la règle. Il en est autrement pour l'emplacement de l'étalon P à deux bouts fixes. Ici un des bouts fixes de l'étalon doit venir en contact avec le point d'appui du comparateur. Pour cet effet, ce bout fixe de l'étalon est préalablement arrêté à une distance d'un dixième de ligne du point d'appui du comparateur. Le dernier mouvement qui conduit au contact se fait alors par une corde qui passe sur une poulie et porte un petit poids μ , fig. 18. Le poids est ajusté à vaincre la friction de l'étalon dans ses coussinets, dès que la vis de pression du coussinet rond est ouverte; et le contact entre les deux bouts fixes se fait avec une telle lenteur, que tout choc, et par conséquent toute réaction, sont parfaitement évités.

Je crois que les notices que je viens de donner, suffisent pour créer une idée nette de notre appareil. Je m'abstiens aussi des détails de rectification etc., vu que l'appareil offre sous ce point de vue tous les moyens requis et dont l'application se présente d'elle-même.

§ 19. L'appareil de M. de Tenner.

M. de Tenner a donné dans les *Zanucku* VIII. p. 126 à 169 une description détaillée de son appareil, illustrée par nombre de dessins, en ajoutant toutes les rectifications et les méthodes employées dans l'opération effective. Cet appareil, composé de quatre règles, est une imitation presque exacte de l'appareil de Borda, employé par Delambre et Mechain dans les opérations de France. Il y a cependant une différence essentielle entre l'appareil de Tenner et celui de Borda; c'est que M. de Tenner a rejeté l'usage du thermomètre métallique qui se trouvait primitivement joint à chaque règle, par l'addition d'un cylindre de laiton de 0,36 pouce de diamètre, en contact avec la règle de fer. Ce cylindre était d'un côté invariablement réuni à la règle de fer, et portait à l'autre extrémité un vernier indiquant les millièmes de pouce. Ayant trouvé une marche irrégulière de ce thermomètre métallique, M. de Tenner se décida à ôter le cylindre et à le remplacer par un thermomètre à mercure. La partie essentielle de chaque règle consiste en une barre de fer forgé de 2 saènes = 14 pieds anglais de long, large de 0,85 pouce et de 0,3 pouce de haut. Elle se trouve placée à la surface d'un corps en bois de sapin de 4,5 pouces de haut sur 3,5 pouces de large, couvert dans une distance de 4 pouces par un toit formé d'une planche convexe, puis par une toile qui, descendant des deux côtés de la planche, était clouée sur le corps de bois et garantissait la règle de fer contre le vent, l'humidité et les rayons du soleil. L'air extérieur n'avait accès à la barre que par les ouvertures aux deux extrémités. Le corps de bois reposait toujours sur des points marqués, distants des deux extrémités d'un quart de la longueur. Dans cette position la barre offrait son plan normal, dont l'identité pouvait être vérifiée, ou, s'il le fallait, être reproduite à chaque occasion. La barre fixée au bois à l'une des extrémités jouissait d'une liberté parfaite pour les dilatations produites par les changements de température. L'autre extrémité était formée par une languette divisée en centièmes du pouce et dont la position se lisait par une loupe, à l'aide d'un vernier qui indiquait directement les millièmes et par estime les quatre-millièmes du pouce. Chaque règle était pourvue d'un thermomètre dont la boule se trouvait à l'intérieur d'un globe creux de fer de 0,15 pouce d'épaisseur, globe qui était en contact avec la barre. L'échelle inclinée du thermomètre sortait de la planche du toit, pour pouvoir faire les lectures des degrés extérieurement. Tous les thermomètres employés avaient été soigneusement vérifiés. Ces indications suffiront pour donner une idée générale de la partie essentielle des règles, et nous n'entrons pas dans les détails des moyens employés, soit pour placer les règles sur le terrain et pour l'alignement, soit pour déterminer l'inclinaison de chaque règle. Ces moyens répondaient entièrement au but et jouissaient d'une grande commodité. Ajoutons seulement que la mesure effective d'une base se faisait toujours dans une élévation d'un pied au dessus du terrain,

pour la règle de fer, et en outre à l'ombre. Car dès que le soleil brillait, des coulisses transportables couvertes de toile blanche étaient placées successivement le long de la ligne à mesurer.

§ 20. Coefficients de dilatation des étalons et des règles de Struve.

Il fallait connaître les coefficients de dilatation, des trois étalons N , P , R et des huit règles de mesure, A , B , C , D du premier appareil et A^* , B^* , C^* , D^* du second, ou plutôt des deux $S = A + B + C + D$ et $S^* = A^* + B^* + C^* + D^*$.

Rien de plus facile que de déterminer les dilatations relatives d'un couple de nos barres qui ne diffèrent en longueur que d'une quantité tellement minime, que l'on peut négliger la dilatation de cette différentielle. En désignant par ν le coefficient de N pour 1° C., et par π celui de P , il suffit de comparer, à l'aide de notre comparateur, N et P sous des températures considérablement différentes, pour obtenir $\pi - \nu$. Cette détermination gagne une haute précision, dès qu'on l'exécute sous des circonstances où les deux barres ont pris des températures identiques, et augmente en exactitude à proportion que la différence des deux températures est plus considérable.

Il en est autrement du coefficient de la dilatation absolue. Mais nous n'avons besoin que du coefficient absolu d'une des barres, pour en déduire, à l'aide des dilatations relatives, les coefficients absolus de toutes les barres. Dans les expériences qui se rapportent aux dilatations absolues, il m'a toujours paru très-dangereux, de comparer une barre aux deux températures de zéro et de l'eau bouillante, parce qu'il est presque inévitable que le procédé qui produit ces deux températures, n'exerce une influence essentielle sur les points fixes avec lesquels la longueur doit être comparée, quelques précautions qu'on prenne pour garantir ces points fixes contre l'action d'une grande masse placée au milieu pendant des heures, dans des températures qui diffèrent jusqu'à 100° C. Par cette raison j'ai choisi une autre voie. Pour mieux fixer les idées, prenons un cas spécial, non pas imaginé mais réel. Pour N et P j'ai déterminé : a) la dilatation relative à l'aide de différentes suites de comparaisons faites aux environs de $+18^\circ$ C. et -2° C., dans des températures chaque fois identiques des deux étalons. Puis b) des comparaisons ont été faites entre N ayant $+18^\circ$ et P ayant -2° , et de même entre N ayant -2° et P ayant $+18^\circ$. Chaque comparaison de la première espèce, en désignant par w la différence $P - N$ à $16,25$ C. et par n la différence de longueur $P - N$ observée à la température t , conduit à une équation de la forme :

$$w + (t - 16,25) (\pi - \nu) = n \quad . \quad (a)$$

Les observations de la seconde espèce, t étant la température de N et t' celle de P , répondent à des équations de la forme :

$$w + (t' - 16,25) \pi - (t - 16,25) \nu = n \quad . \quad (b)$$

Il s'entend que w , π , v et n doivent être exprimés dans ces équations, soit en fractions de la longueur totale, soit en unités linéaires identiques, lignes. Dans les équations (a) t sera tantôt $+18^\circ$, tantôt -2° . Dans les (b) nous aurons alternativement $t = +18^\circ$ avec $t' = -2^\circ$ ou $t = -2^\circ$ avec $t' = +18^\circ$. D'où suit que nos équations sont, dans le cas présent, les plus avantageuses qu'il est possible, pour le but indiqué. La totalité des équations traitée d'après les moindres carrés donnera les résultats définitifs pour w , v , π , et $\pi - v$.

Il y a cependant deux circonstances qui limitent l'exactitude des résultats obtenus pour les coefficients absolus. Car elle dépend en premier lieu de la précision avec laquelle la différence des deux températures t et t' a pu être reconnue à l'aide des thermomètres. Une incertitude de $0,1$ sur 20° produirait une incertitude d'un deux-centième sur le coefficient à déterminer. Heureusement il ne s'agit ici que d'une différence de température; et pour de bons thermomètres soigneusement examinés, il est facile de parvenir à quelques centièmes du degré dans les corrections relatives.

D'un autre côté, l'opération elle-même présente une source d'erreurs. Pour la comparaison des deux étalons de même température, rien de plus invariable que notre comparateur, et s'il y a quelque variation minime, elle s'élimine par l'observation de P symétriquement intermédiaire entre deux observations de N . Mais pour obtenir des températures t et t' , différentes de 20° , pour N et P , j'ai dû établir N (ou P) et le comparateur dans la salle centrale de l'Observatoire, localité d'une température presque invariable pendant 24 heures, tandis que P (ou N) se trouvait dans une des salles d'observation qui avait une température au dessous de zéro. Quoique la température dans cette seconde localité fût sujette à quelques variations, dans la période journalière, je pouvais cependant attendre l'époque où les thermomètres enfoncés dans le corps de P devenaient stationnaires. Cette époque où la température de l'étalon était effectivement celle qu'indiquaient les thermomètres, a été choisie toujours pour les comparaisons. Mais pour exécuter la dite comparaison, il était nécessaire de transporter P dans l'autre localité où était le comparateur, sans que P changeât de température, et sans que le comparateur éprouvât une altération de longueur. Pour ce but, N et P se trouvaient dans leurs caisses de bois, remplies de coton brut jusqu'aux extrémités, et même les bouts des étalons étaient tellement pourvus d'une grosse enveloppe de coton, qu'il ne restait que 0,5 ligne de chaque côté exposée à l'action de l'air extérieur. Puis le comparateur était tellement préservé par des doublures en bois et des parois percées pour laisser passer seulement les points extrêmes métalliques du comparateur, que l'action du rayonnement était à peu près évanouissante, vu que le temps que P restait sur le comparateur n'était que de 4 minutes. Le changement de température en P devait, s'il avait lieu, se manifester par les lectures des deux thermomètres, faites avant et après l'expérience. En

outre, des essais préalables avaient démontré que le levier de touche en contact avec *P* était invariablement sur son trait de repère, même si *P* restait pendant près de dix minutes sur le comparateur.

Pour mieux faire comprendre la marche de l'opération, je donnerai un extrait du journal du 15 avril 1852, qui expose une comparaison complète, faite entre *N* ayant 15° C. et *P* ayant — 5° C.

Le comparateur et l'étalon N sont placés dans la salle centrale, chauffée, l'étalon P dans la salle d'observation, froide et qui touchait à la salle centrale.

	Temps.		Lecture.	Moyenne.
I. <i>N</i> placé sur le comparateur	1 ^h 43,5.	Therm.	+14°7 C. et +14°75 C.	+14°72
Première mesure de <i>N</i>	» 44,5.	Microscope :	trait 13 — 39,82 parties	} 13 — 39,92
Seconde » » »	» 46,5	» »	— 40,02 »	
<i>N</i> ôté et remis à sa place de repos »	48,5			
II. Observation de la température de <i>P</i> ,				
faite dans la salle froide	1 ^h 52,0.	Therm.	— 5°0 et — 5°05	— 5°02
<i>P</i> transporté dans la salle chauffée et				
en place	» 53,5			
Première mesure de <i>P</i>	» 54,5.	Microscope :	trait 8 — 28,3 parties	} 8 — 28,15
Seconde » » »	» 56,5	» »	28,0 »	
Observation de la temp. de <i>P</i> dans la				
salle chauffée	» 57,5.	Therm.	— 4°95 et — 5°0	— 4°97
<i>P</i> ôté et remis à son endroit froid				
de repos	2 ^h 0,0			
III. <i>N</i> placé une seconde fois sur le com-				
parateur	2 ^h 2,0			
Première mesure de <i>N</i>	» 4,0.	Microscope :	trait 13 — 40,32 parties	} 13 — 40,82
Seconde » » »	» 5,5	» »	— 41,32 »	
Observation de la température de <i>N</i> »	7,5.	Therm.	+14°7 et +14°75	+14°72
<i>N</i> ôté et remis à sa place de repos.				

On voit de ce tableau que *P* a été pendant 4 minutes sur le comparateur, que le changement de température en *P*, indiqué par les thermomètres, ne s'élève qu'à 0°05, et que les thermomètres de *N* n'avaient pas bougé. En comparant maintenant I et II, puis II et III nous avons :

par I et II: P ayant $-5^{\circ}00 = N$ ayant $+14^{\circ}72 - (13-8)$ divis. $+11,77$ parties $= N - 0,4000$ ligne
 » II et III: $- (13-8)$ divis. $+12,67$ » $= N - 0,3988$ »
 Différence $0,0012$ ligne.

La moyenne des deux mesures donne :

$$P = N - 0,3994 \text{ ligne, pour } (t-t') = +19^{\circ}72 - 0^{\circ}12 = +19^{\circ}60 \text{ C. ;}$$

$-0^{\circ}12$ étant l'effet des corrections à appliquer aux thermomètres, connus par des recherches antérieures.

Remarquons encore que le microscope était dirigé sur une petite plaque d'argent sur laquelle une échelle de 20 divisions était tracée, chacune de $\frac{1}{2}$ ligne. Le tambour du micromètre subdivisait ces intervalles en 60 parties à peu près, dont chacune d'environ $\frac{1}{700}$ ligne. On lisait les dixièmes du micromètre, chacun $= \frac{1}{7000}$ ligne, et même des fractions encore plus petites. L'échelle elle-même avait été examinée le plus rigoureusement, soit pour reconnaître la valeur moyenne d'une division, soit pour déterminer les erreurs de division dans l'échelle.

Les observations qui se rapportent à l'évaluation des dilatations des étalons N et P et des règles du second appareil A^* , B^* , C^* , D^* , ont été faites en printemps 1852, sous ma surveillance dans les essais préalables, puis définitivement sous l'unique direction de M. Lindhagen, assisté par M. Wagner. Elles conduisirent à la détermination des dilatations absolues ν et π pour N et P , et aux dilatations de $S^* = A^* + B^* + C^* + D^*$ relatives à N et P , ou à $\sigma^* - \nu$ et $\sigma^* - \pi$. Le calcul rigoureux de ces observations a été fait par M. Lindhagen. Quant aux dilatations relatives de N et des règles du premier appareil, les matériaux, ramassés en 1827 et 1828, sont consignés *Gradmessung* II. p. 400 à 408. D'autres matériaux qui s'y trouvent, fournissent en outre les dilatations relatives de la toise de Fortin F , vis-à-vis de N , et d'une toise auxiliaire H , employée pour doubler F , en comparant F avec H et $F+H$ avec N . Cette toise H avait, comme les règles de mesure, un bout fixe et l'autre bout pourvu d'un levier. Voici maintenant les résultats de toutes ces observations, en désignant par μ les millionièmes.

Dilatation absolue pour $+1^{\circ}$ C.:

		erreur prob.
de l'étalon-module N	$\nu = 11,394 \mu \mp$	$(b\nu = 0,018 \mu)$
» l'étalon P	$\pi = 11,253 \mu \mp$	$(b\pi = 0,017 \mu)$
» la toise de Fortin F	$\varphi = 11,291 \mu \mp$	$(b\varphi = 0,020 \mu)$
» la toise auxiliaire H	$\eta = 11,480 \mu \mp$	$(b\eta = 0,057 \mu)$
» $S = A + B + C + D$	$\sigma = 11,399 \mu \mp$	$(b\sigma = 0,023 \mu)$
» $S^* = A^* + B^* + C^* + D^*$	$\sigma^* = 11,221 \mu \mp$	$(b\sigma^* = 0,025 \mu)$

Erreurs für 1° Fok

*. 00000633
 . 00000625*

Dilatation relative :

$$\begin{array}{l} \text{de } S \text{ et } N \quad \sigma - \nu = +0,005 \mu \mp \left(\overset{\text{erreur prob.}}{b(\sigma - \nu)} = 0,013 \mu \right) \\ \text{de } S^* \text{ et } P \quad \sigma^* - \pi = -0,032 \mu \mp \left(b(\sigma^* - \pi) = 0,018 \mu \right). \end{array}$$

L'étalon-module N et les règles A, B, C, D , d'un fer de même origine, donnent un ν et un σ identiques, quoique je m'attendasse à une petite différence sensible, parce que le levier des règles de mesure était fixé à une boîte en cuivre. L'étalon P et A^*, B^*, C^*, D , également d'origine commune, présentent une différence si petite entre π et σ^* , qu'elle peut être expliquée par les inexactitudes accidentelles des expériences. L'étalon R employé aux deux bases de ROMANRAUTZI et de TASCUNAN, manque dans notre tableau, parce qu'il n'était pas encore retourné à l'Observatoire, en 1852. Cet étalon, étant de même origine que P , j'aurais pu lui assigner la dilatation $\rho = \pi$. J'ai adopté cependant un ρ intermédiaire entre ν et π , mais plus proche de π , savoir $\rho = 11,300 \mu$, chiffre moins certain que les autres. Par cette raison j'attribue à ce ρ une erreur probable $b\rho = \mp 0,150 \mu$, mais qui est sûrement trop forte. Nous avons par conséquent :

$$\begin{array}{l} \text{pour l'étalon } R \quad \rho = 11,300 \mu \mp (b\rho = 0,150 \mu) \\ \sigma - \rho = +0,099 \mu \mp (b(\sigma - \rho) = 0,153 \mu). \end{array}$$

§ 21. Coefficients de dilatation de l'étalon et des règles de Tenner.

M. de Tenner a déterminé les dilatations absolues des barres de fer forgé qui forment le corps principal de ses règles. Les *Zanucku* VIII. p. 136 à 145 donnent la description de l'appareil et tous les détails des comparaisons. Voici les résultats de ces expériences, réunies *Zanucku* VIII. p. 145.

<i>Dilatation absolue pour 1° C. :</i>		<i>Expansion p^r 1° F^{ah} :</i>
de la règle No. I	11,688 μ	
" " II	11,709 μ	
" " III	11,821 μ	
" " IV	11,794 μ	
Moyenne	11,753 μ	. 00000653

Quant aux languettes mobiles de cuivre jaune, M. de Tenner a adopté la dilatation selon Borda, savoir $17,83 \mu$ pour 1° C. ; coefficient qui était certainement plus que suffisamment exact pour la réduction de la somme des intervalles entre les règles successives, qui en moyenne ne s'élève qu'à $0,004$ de la longueur de la base. La dilatation de l'échelle T , d'après laquelle les règles ont été étalonnées, n'a pas été examinée par M. de Tenner. Cet étalonnage ayant été fait à exactement $14^\circ 0 \text{ R.} = 17^\circ 5 \text{ C.}$, il n'a fallu employer la dilatation relative entre l'étalon et les règles que pour $1^\circ \text{ R.} = 1^\circ 25 \text{ C.}$, pour avoir la longueur

des règles pour $13^{\circ}0\text{R.} = 16^{\circ}25\text{C.}$ Cette dilatation relative a été mise = zéro par M. de Tenner qui supposait que la dilatation de l'étalon était pour 1°R. sensiblement identique avec celle des règles.

§ 22. Dilatation moyenne des barres de fer forgé employées dans nos opérations.

Il faut exclure ici, de nos coefficients de dilatation absolue, ceux de $S = A + B + C + D$ et de H , règles où il y avait une pièce de cuivre à un des bouts. Dans les autres barres il n'y a eu que du fer forgé. Voici la comparaison des différents coefficients de dilatation trouvés.

Dilatation pour 100°C.

1) toise de Fortin <i>F</i>	$\alpha =$	0,001129, fer forgé originaire de France	} Expansion 0,00000
2) étalon-module <i>N</i>		0,001139 » » » » Russie	
3) étalon <i>P</i>		0,001125 » » » » »	
4) règles <i>S*</i>		0,001122 » » » » »	
5) règles de Tenner		0,001175 » » » » »	
Moyenne		0,0011380	

A ces 5 coefficients je puis ajouter encore celui de la règle de fer forgé No. 4 de l'appareil de Repsold, employé en 1820 et 1821 par feu M. Schumacher à la mesure de la base de Braack; règle qui est la longueur primitive de l'arc du méridien danois mesuré par Schumacher, et de celui de Hanovre, mesuré par M. Gauss. C'est une barre de deux toises de long, sur 1,5 pouces de haut et de large. d'origine anglaise. En 1853 cet étalon a été transporté d'Altona à Poulkova, par ordre du gouvernement danois, pour être comparé à notre étalon-module. La dilatation en a été trouvée à Poulkova $\alpha = 0,001154$. Enfin, Bessel a déterminé pour sa toise de Fortin, qui a servi d'unité linéaire dans ses célèbres expériences sur le pendule et dans les opérations géodésiques de Prusse, la dilatation $\alpha = 0,001126$.

L'accord très-proche de ces 7 dilatations de barres de fer forgé de différente origine est un fait intéressant, et il paraît que les discordances quelquefois considérables dans les coefficients de dilatation, donnés par plusieurs physiciens, doivent être attribuées au moins autant aux imperfections des méthodes d'expérience, qu'à une diversité des dilatations elles-mêmes. En excluant les règles de Tenner, qui ne sont point des barres, mais des lamelles comparativement minces, et qui ont dû subir dans le travail des modifications moléculaires, la moyenne des 6 valeurs est :

dilatation des barres de fer forgé pour 100°C. , $\alpha = 0,0011325 \mp 33$.

L'erreur probable $\mp 0,0000033$ que j'ai donnée, est déduite de l'accord des 6 valeurs. Pour chacune des 6 valeurs isolées de α , l'erreur pr. est $0,0000083 = 0,0073\alpha = \frac{1}{137}\alpha$, chiffre qui exprime la différence spécifique probable des différentes règles.

CHAPITRE VII.

MESURE DES BASES. ÉVALUATION DE L'EXACTITUDE DES BASES MESURÉES.

§ 23. Dimensions des bases. Choix du terrain.

La mesure directe d'un arc terrestre, faite à l'aide de l'appareil qui sert à la mesure des bases, offrirait sans doute le moyen le plus sûr pour la détermination de la valeur linéaire de cet arc, et serait de beaucoup supérieure à toute détermination faite à l'aide d'une base comparativement petite, et de la mesure des angles. Car la mesure télescopique d'une ligne, par l'angle formé entre ses termes vus d'une distance égale à la longueur de la ligne, est déjà beaucoup plus inexacte, que la mesure directe de la dite ligne. Nous verrons, § 24, que l'erreur probable d'une ligne mesurée à l'aide de mon appareil est en dedans d'un millionième ou $0,8\mu$, tandis que la détermination d'un côté de cette longueur, en partant d'un autre côté donné du même triangle, est sujette à une erreur probable de $2,0\mu$, même si ce triangle est équilatéral et si tous les trois angles y sont mesurés avec une erreur probable de $0,5$ seulement. Mais la mesure directe n'est praticable que dans des cas exceptionnels et pour des distances très-restreintes, étant d'ordinaire impossible pour de plus grandes distances, à cause de l'inégalité et des obstacles du terrain. En outre une telle mesure, étant composée d'un très-grand nombre d'opérations partielles, serait sujette à des méprises que l'on ne pourrait éviter, qu'en contrôlant la première mesure par une seconde. Le sacrifice de temps serait immense pour ce procédé. Or on ne mesure qu'une seule base, ou plusieurs bases, qui fournissent les côtés de départ pour le calcul des côtés de la suite de triangles, choisie pour la jonction de certains points extrêmes. Il est évident que l'exactitude du résultat gagne avec le nombre et l'étendue des bases mesurées. Partant, il serait à désirer de pouvoir donner aux bases une longueur qui ne s'éloigne pas trop de la longueur moyenne d'un côté des triangles de continuation, ou qui serait, pour notre

opération totale entre la Mer Glaciale et le Danube, de près de 14000 toises = 25,2 verstes. Mais c'est très-rare que de trouver un terrain propre à la mesure d'une base de cette dimension. Aussi la plus grande base, de notre arc total, n'est-elle que de 6055 toises = 11,06 verstes. C'est celle de PONEDELI, mesurée en 1820 par M. de Tenner, et qui forme immédiatement le côté PONEDELI-JAKSCUTI d'un des triangles de continuation. Les autres bases sont moindres, et la plus courte, celle d'ALTEN, n'est que de 4155 toises = 2,11 verstes. Une telle diminution d'une base n'est permise que dès qu'elle est inévitable. En effet, pour monter d'une base courte à la détermination d'un côté principal nombre de fois plus long, de petits angles C opposés aux côtés connus c sont inévitables, et un tel C présente un γ fort dans l'expression $\frac{1}{3} \Omega (\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2)$, p. 2. Il est clair que le danger qu'apportent les petits angles C à l'exactitude de l'opération, diminue avec l'exactitude de la mesure des angles, et que le choix de la dimension d'une base à mesurer est en dépendance soit de l'exactitude proposée, soit de la perfection qu'on saura atteindre dans la mesure des angles. La moyenne des trois bases, mesurées avec l'appareil de Tenner est de 5447 toises = 10,0 verstes, ou de près de 0,40 de la longueur moyenne d'un côté des triangles principaux de Lithuanie et de Volynie, pour lesquels l'erreur moyenne d'un angle observé est $\omega = 1''21$, voyez § 42. Une longueur de 5 verstes m'a paru suffisante pour des opérations, dans lesquelles la mesure des angles était à peu près celle qu'offrait la mesure de l'arc Baltique. Mais déjà dans le choix de la base de SIMONIS, j'avais dû céder à la nécessité. Le terrain étant le plus propre sur tout l'espace entre le Golfe et la Duna que traversaient nos triangles, il était cependant impossible de donner à la base une étendue plus grande que de 2315 toises = 4,2 verstes, par la même raison qui avait rétréci également les triangles principaux aux environs de cette base, où nous rencontrons un côté de 5398 toises = 9,9 verstes. Le rapport de cette base à un côté moyen de Livonie est de 0,16. En revanche ω n'est ici que de 0'',57. Les deux bases de Bessarabie offrent une longueur moyenne de 2840 toises = 5,2 verstes = 0,24 de la longueur moyenne d'un côté principal, ω étant = 1'',02. Pour l'arc septentrional entre le Golfe de Finlande et la Mer Glaciale, les grandes bases étaient impossibles. Car tout le terrain de cette vaste région est composé d'une infinité de rochers de granit, entrecoupés par des bas-fonds quelquefois d'un sol solide, plus souvent marécageux. Les géomètres étaient très-satisfaits, de trouver à ELIMÄ, à ULEABORG et à ÖFVER-TONNEA des bases de 1349, 1505 et 1520 toises, en moyenne de 1458 toises = 2,7 verstes, ce qui ne fait que 0,10 de la longueur moyenne des côtés d'un triangle principal. Quant à la base d'ALTEN, située sur le bord de la Mer Glaciale, et qui est la plus courte de toutes, n'ayant que 4155 toises = 2,1 verstes = 0,08 d'un côté principal, de grands doutes s'étaient élevés déjà à l'occasion du projet des opérations de Norvège, s'il serait possible de trouver un terrain propre pour la mesure d'une base, sur toute l'étendue des triangles, depuis

le Cap Nord à travers le Finmarken jusqu'à la frontière de la Laponie russe près de l'église de Katokeino. En effet M. Klouman qui avait travaillé antérieurement, pendant plusieurs années, à la levée du littoral du Finmarken norvégien, et qui prolongea, plus tard, ses reconnaissances jusqu'à Katokeino, déclara que la mesure d'une base, dans ces régions, serait absolument impraticable, si elle ne pouvait se faire sur le bord même de la mer. Aussi le terrain choisi près d'ALTEN, le seul qui pouvait être employé, quelque petit qu'il fût, se trouvait-il dans une telle proximité de la mer, que 70 toises ont dû être mesurées pendant que le reflux avait mis le sol à sec. Heureusement ce sol, composé d'un gros gravier, était d'une parfaite solidité. La base d'ÖFVEN-TORNEA en Laponie, choisie par M. Selander, était tout près de l'endroit, où Maupertuis et Svanberg avaient opéré en 1736 et en 1802. Mais la base de ces savants se trouvait en majeure partie sur la glace de la rivière Tornea-elf. M. Selander choisit le terrain contigu à la rivière du côté oriental ou russe, élevé de deux toises au-dessus de la rivière et qui présentait une plaine extrêmement unie et en général d'une constitution très solide, mais qui n'admettait que la dite longueur de 1520 toises = 2,8 verstes, des marais et la rivière entravant la continuation ultérieure.

§. 24. Exactitude des 7 bases mesurées à l'aide de l'appareil de Struve.

Dans cette recherche il s'agit d'évaluer l'erreur probable du rapport entre l'étalon-module N et la longueur de la base K , déduite de l'opération de la mesure, recherche dans laquelle il faut considérer toutes les causes qui aient pu déroger à l'exactitude du résultat effectif de la mesure. Les 7 bases mesurées à l'aide de mon appareil fournissent des données suffisantes, pour évaluer, au moins très-approximativement, les effets probables des différentes causes perturbatrices de l'opération. Il faut examiner pour notre but :

- I. les erreurs commises dans la direction azimutale, l'alignement des règles de mesure;
- II. les erreurs dans la détermination des inclinaisons des règles;
- III. l'incertitude qui est restée dans le rapport entre l'étalon-module N et les étalons-copies P et R , pour toutes les bases où N n'a pas été directement employé à l'étalonnage des règles de mesure;
- IV. l'incertitude du rapport trouvé entre l'étalon et la somme des quatre règles de mesure;
- V. l'incertitude qui a lieu soit dans la lecture de l'index du levier de touche sur son arc gradué, soit dans la valeur d'une division de cet arc;
- VI. les erreurs personnelles, propres aux deux observateurs qui, pour toutes les bases, ont tenu des journaux indépendants de toutes les lectures faites;
- VII. l'incertitude relative aux effets de la température.

Le tableau suivant présente plusieurs données relatives à nos 7 bases, qui serviront en quelque sorte de points de départ dans les recherches à faire.

Base de	Appareil employé.	Étalon employé.	Durée de la mesure.	Longueur de la base.	Température moyenne, degrés centésimaux.		Différence du niveau des deux termes de la base.	Inclinaison moyenne de la base entre ses deux termes.	Somme des réductions pour les inclinaisons des règles.
					des règles dans la mesure de la base.	de l'étalon et des règles dans leur comparaison.			
				K	b	e	h		r
1. SIMONIS	I	N	1827. Sept. 1 à Sept. 15	2315,2 toises	16,392	12,16	3,00	4,5	— 0,1326
2. ELIMÄ	I	N	1844. Août 21 à Août 28	1348,8	19,846	18,07	1,25	3,2	— 0,1538
3. ULEADORG	I	N	1845. Août 13 à Août 21	1505,3	14,632	18,06	1,06	2,4	— 0,1674
4. ROMANKAUTZI	I	R	1848. Août 27 à Sept. 8	2910,2	14,364	14,82	3,27	3,9	— 0,3632
5. TASCHBUNAR	I	P	1852. Sept. 26 à Oct. 8	2770,3	20,949	20,64	14,07	17,5	— 0,1493
6. ALTEN	II	P	1850. Juill. 5 à Juill. 12	1154,7	15,000	15,46	2,98	8,9	— 0,2148
7. ÜFVER-TORNEA	II	P	1851. } Août 5 à Août 12	1519,9	14,473	17,38	0,04	0,1	— 0,1998.
			» 12 à » 19						

Toutes les durées des bases se rapportent uniquement à la mesure directe sur le terrain, sans comprendre les journées employées, avant et après l'opération, pour la rectification de l'appareil et pour les comparaisons des règles avec l'étalon. De ces durées il faut encore soustraire les journées d'interruption à cause d'un mauvais temps etc. En additionnant les heures du travail effectif, j'ai trouvé que la base de SIMONIS a été mesurée en 65 heures, ce qui donne à peu près 17,8 règles placées et observées dans une heure. Mais une telle opération va toujours plus lentement au commencement que vers la fin. L'on parvient à placer au-delà de 20 règles par heure, sans rien précipiter, et une journée de 10 heures de travail conduit à l'enplacement de 200 règles, ou à la mesure de 400 toises.

Ad I. L'alignement des règles a été effectué à SIMONIS à l'aide de pinnules fixées aux boîtes; dans les autres six bases par le moyen connu d'un instrument des passages, placé successivement sur plusieurs points convenables de la ligne à mesurer. Les deux méthodes sont à peu près de la même exactitude, car on est sûr de ne point commettre, par l'une ou l'autre, des erreurs qui dépassent deux minutes dans l'azimut de la règle posée. Pour une déviation de deux minutes, il faut appliquer à une règle la correction $-2 \sin 2' = 0,000000169 = 0,169 \mu$, en désignant par μ le millionième de la longueur. Mais 2' est la limite des déviations possibles. Admettons que toutes les déviations entre 0 et 2' soient également fréquentes, supposition exagérée, car les grandes déviations ont lieu moins souvent que les petites. Pour ce cas, la réduction diminue au

tiers du maximum, et nous aurons à ajouter à la longueur totale de la base une correction moyenne (1) = $-0,056 \mu$, ou à peu près d'un dix-huit-millionième de la longueur.

Ad II. L'inclinaison d'une règle est déterminée à l'aide d'un appareil à niveau, qui se place sur deux tablettes en fer, invariablement réunies au corps de la règle et dont les deux surfaces font partie d'un plan parallèle à l'axe principal de la règle. Le parallélisme de ce plan avec l'axe est le mieux examiné par le renversement de la règle entre deux points constants du comparateur, opération qui donne une exactitude en dedans de $5''$. Cette méthode a été employée pour 6 de nos bases. A la première base, celle de SIMONS, je m'étais servi du théodolite, par une voie décrite *Gradm.* II. p. 366, mais qui est moins précise que l'autre. L'examen du parallélisme a été fait deux fois pour chaque base, savoir avant et après l'opération, et la moyenne des deux corrections a été employée pour le calcul des inclinaisons. La comparaison des deux corrections indiquait cependant quelques petits changements, qui s'élevaient, pour la moyenne des 4 règles, à $27''$ pour SIMONS, à $7''$, $9''$, $3''$, $3''$, $5''$ pour les autres bases. Il faut par conséquent convenir que dans les corrections adoptées, il peut y avoir une certaine erreur constante, même pour la moyenne des 4 règles. En la supposant $f = \mp 20''$ pour SIMONS, et $f = \mp 10''$ dans les autres bases, nous la faisons certainement trop forte. Quant aux erreurs accidentelles des différentes inclinaisons, elles sont l'effet d'une lecture imparfaite des divisions et des petites erreurs de division locales dans l'échelle. J'ai montré, *Gradmessung* II. p. 415, que dans la base de SIMONS l'erreur probable d'une inclinaison n'est que de $\mp 9,7''$. Dans les autres bases elle a été encore plus petite. Supposons cependant qu'elle ait été de $20''$ dans toutes nos bases. Voyons à présent quelle sera l'erreur de la réduction calculée, par suite des deux sources d'incertitude indiquées. Si nous désignons par i, i', i'', \dots les inclinaisons successives des règles, nous aurons, chaque règle étant de 2 toises, les réductions successives $4 \sin^2 \frac{1}{2} i, 4 \sin^2 \frac{1}{2} i', \dots$ ou $\sin^2 i, \sin^2 i', \dots$; réductions exprimées en parties de la toise. Donc la réduction de la longueur totale sera $r = -[\sin^2 i]$. Dès qu'il y a dans tous les i , une erreur constante f , nous avons $dr = -2 [\sin i] \cdot \sin f$. Mais $2[\sin i]$ est $= h$, en désignant par h la différence de hauteur entre la première et la dernière règle, c. à d. entre les deux termes de la base. Donc finalement $dr = -h \cdot \sin f$, et avec $f = \mp 20''$ et $\mp 10''$ nous aurons $dr = \mp h \sin 20''$ pour SIMONS, et $dr = \mp h \sin 10''$ pour les autres bases. Soit enfin $\mp g$ l'erreur accidentelle probable d'une inclinaison observée, l'effet $b'r$ qu'elle exerce sur la réduction, s'exprime par $b'r = \sqrt{[\sin^2 i]} \cdot \sin 2g = \sin 2g \cdot \sqrt{-r}$. En combinant dr et $b'r$ nous parvenons à l'erreur probable totale dans la réduction calculée (2) = $\mp \sqrt{(dr)^2 + (b'r)^2}$.

Ad III. J'ai donné plus haut, p. 37, les résultats des comparaisons entre N et les copies P et R , avec les erreurs probables auxquelles ils sont sujets, pour $16^{\circ}25$ C.

Ces erreurs nous fournissent :

$$(3) = 0,000 \mu, \text{ pour } N \text{ employé}$$

$$(3) = \mp 0,110 \mu \quad \text{ » } P \quad \text{ »}$$

$$(3) = \mp 0,445 \mu \quad \text{ » } R \quad \text{ »}$$

Ad IV. Les règles de mesure, quoique pourvues à l'une des extrémités de leviers mobiles autour d'un axe, conservaient une longueur très-constante, pour la position normale de l'index du levier, non seulement pendant la mesure d'une base, mais aussi pour des périodes de longue durée, et même après des transports par des distances considérables. Je donnerai ici le tableau de toutes les comparaisons faites, depuis 1827 jusqu'en 1852, entre les règles des deux appareils et les étalons, en partant soit de $N = 1728,01249$ lignes pour $16^{\circ}25$ C., soit des relations entre N , P , et R données plus haut, p. 37. Dans ce qui suit, S et S^* signifient, la somme des 4 règles des deux appareils, exprimée en lignes. Comme de temps à autre les axes des leviers ont dû être ôtés, pour les nettoyer, huiler et même repolir, cette opération a dû changer tant soit peu les longueurs des règles. C'est pourquoi les différentes périodes pendant lesquelles les axes n'ont pas été touchés, sont séparées par des traits horizontaux; et ce ne sont que les chiffres qui se trouvent entre deux traits voisins, qui soient parfaitement comparables. A côté des différents S et S^* j'ai placé les Σ et Σ^* , qui expriment la longueur de la somme des 4 règles pour la température normale de $16^{\circ}25$ C., déduites des S et S^* à l'aide des coefficients de dilatation relative déterminés p. 50.

Longueurs des règles de mesure.

Premier appareil.

	$S =$ lignes	Température.	$\Sigma =$ lignes	Moyenne. lignes
1) 1827. Août, avant la mesure de SIMONIS,	6912,20983	+ 12,72 C.	6912,20995	6912,20905
» Août, après » » » »	6912,20799	+ 11,60	6912,20815	
2) 1828. Août, à DORPAT.....	6912,19925	+ 18,11	6912,19919	6912,19918
» Déc. » »	6912,19815	- 12,79	6912,19916	

L'appareil ayant été transporté, en 1843, de DONPAT à POULKOVA, j'en fis une révision soignée. Après quinze ans de repos, les bouts en acier des extrémités fixes et des leviers étaient en état parfait de conservation. Mais il fallait repolir les axes des leviers et retoucher les trous coniques dans lesquels ils tournaient. En outre, une nouvelle division fut donnée à l'échelle verticale de l'appareil de nivellement.

	$S =$ lignes	Température.	$\Sigma =$ lignes	Moyenne.
3) 1844. Juillet, à POULKOVA	6912,28028	+ 17,79 C.	6912,28023	
Août, avant la mesure d'ÉLIMÁ.	6912,31640	+ 19,75 »	6912,31628	lignes
Août, après » » »	6912,31468	+ 16,38 »	6912,31468	6912,31548
4) 1845. Août, avant la mesure d'ŪLEANORG	6912,29083	+ 21,24 »	6912,29060	
» après » » »	6912,28015	+ 14,88 »	6912,28019	6912,28540
5) 1848. Août, avant la mesure de ROMANKAUTZI	6912,30054	+ 16,86 »	6912,30113	
» Sept., après » » »	6912,28913	+ 12,78 »	6912,28575	6912,29344

L'appareil, resté en Bessarabie en 1848, puis transporté à Jekaterinoslaw et remis au major-général Wrongschenko, retourna en Bessarabie en 1852. M. Wrongschenko ayant remarqué que l'appareil avait éprouvé en Bessarabie des dégâts essentiels par manque de surveillance, un mécanicien accompagna l'expédition, envoyée en 1852 de l'Observatoire central en Bessarabie, et rétablit l'appareil à l'état parfait. Il y avait eu même un axe de levier brisé, qui a dû être remplacé par un nouveau.

6) 1852. Sept., avant la mesure de TASCHEUNAR	6912,38188	+ 21,42 »	6912,38691	
» Oct., après » » »	6912,37338	+ 19,86 »	6912,37690	6912,38190

Second appareil.

	$S^* =$	Température.	$\Sigma^* =$	
7) 1850. Juillet, avant la mesure d'ÄLTEN	6912,00331	+ 15°12 C.	6912,00306	
» » après » » »	6912,00161	+ 15°80 »	6912,00151	6912,00228
1851. Août, avant la mesure d'ÖFVER-TORNEA	6912,00116	+ 18,45 »	6912,00068	
» » après » » »	6911,99959	+ 16,30 »	6911,99958	6912,00013

Les comparaisons 2) avaient été faites à DONPAT pour déterminer la variation relative entre N et S produite par l'effet d'un changement de température. En désignant maintenant les valeurs

de Σ ou Σ^* , trouvées avant et après la mesure d'une base, par Σ' et Σ'' , nos 7 bases présentent les $\Sigma'' - \Sigma'$ suivants :

à SIMONIS	$\Sigma'' - \Sigma' = - 0,00180$ ligne
» ELIMÁ	— 0,00160 »
» ULEABORG	— 0,01041 »
» ROMANKAUTZI	— 0,01538 »
» TASCHEUNAR	— 0,01001 »
» ALTEN	— 0,00155 »
» ÜFVER-TORNEA	— 0,00110 »

$$\text{Moyenne} = - 0,00598 \text{ ligne} = - 0,865 \mu = - \frac{1}{1160000}$$

On voit que les règles ont éprouvé, dans toutes les mesures des bases un petit raccourcissement qui s'élève en moyenne, pour la somme des quatre règles, à 0,00598 ligne, pour chaque règle à 0,00150 ligne. Il s'en suit que la double comparaison des règles avec l'étalon à bouts fixes, avant et après la mesure de la base, a été une opération essentielle et qui a dû augmenter la certitude du résultat. La moyenne des deux comparaisons, ou la valeur $\frac{1}{2}(\Sigma' + \Sigma'')$, employée finalement au calcul de la base, devait donner une valeur extrêmement exacte du rapport entre l'étalon et les règles pendant l'opération. En effet, en considérant les différences, entre les $\Sigma'' - \Sigma'$ et leur moyenne, comme produites par des perturbations d'origine accidentelle, nous avons pour chaque $\Sigma'' - \Sigma'$ observé, l'erreur probable $\mp 0,00394$ ligne, et pour $\frac{1}{2}(\Sigma' + \Sigma'')$ l'erreur probable $\mp 0,00197$ ligne $= \mp 0,287 \mu = \mp \frac{1}{3180000}$ de la longueur; quantité qui répond à la dilatation produite par 0,025 C. Comme, dans les différentes comparaisons des règles avec l'étalon, il ne s'agissait pas tant de la température absolue, que de l'identité des températures moyennes des règles et de l'étalon, il est évident que les arrangements pris pour ce but ont eu partout un succès distingué. C'est que, pour ces comparaisons, des localités avaient été choisies, sujettes à des changements minimes de température pendant les 24 heures; et c'est aussi par cette raison que l'incertitude dans la température commune absolue a été toujours en dedans de 0,2 C. Mais l'erreur probable, en $\frac{1}{2}(\Sigma' + \Sigma'')$, trouvée $= \mp 0,287 \mu$ est trop forte, car il n'y a pas de doute que $\frac{1}{2}(\Sigma' + \Sigma'')$ ne soit plus exact que ne l'indique la comparaison des $\Sigma'' - \Sigma'$ de toutes les bases, mesurées sous des circonstances très-variées et par différents individus. En tout cas, en mettant (4) $= \mp 0,287 \mu$, nous avons une erreur probable trop grande.

Notre tableau nous montre encore que les voyages de l'appareil *I*, faits pour le transporter d'un endroit d'observation à un autre, ont exercé sur les règles une certaine influence, quoique

très-petite. Il y a une diminution de 0,00896 ligne entre le dernier Σ de 1827 et celui du mois d'août 1828. Dans cet intervalle l'appareil avait été transporté en hiver de SIMONIS à DONPAT, chaque règle étant placée sur deux trainaux, liés par des cordes. Nous voyons un allongement de 0,03605 ligne produit par le voyage de Poulkova à ELIMÅ en 1844, et un raccourcissement de 0,02408 ligne après que l'appareil avait été transporté d'ELIMÅ à Helsingfors, pour y hiverner à l'Observatoire, puis après deux voyages par mer, l'un de Helsingfors à Abo dans un bateau à vapeur, l'autre d'Abo le long du Golfe Bothnique jusqu'à ULEABORG, dans une embarcation de cabotage. Pour l'appareil II, les comparaisons faites l'une sur le bord de la Mer Glaciale, l'autre en Laponie, ne présentent qu'une différence de $-0,00083$ ligne, sur la longueur totale des 4 règles, malgré l'intervalle d'une année et le long voyage par mer autour de la Norvège, puis de Christiania à Gothenburg; d'ici sur le Götha-Canal à Stockholm, plus tard de Stockholm à TONNEA, enfin par terre de TONNEA à l'endroit de la mesure d'ÖFYER-TORNEA.

Ad V. Les règles de l'appareil I étaient étalonnées, l'index du levier indiquant $m = 20,00$, celles de l'appareil II pour $m^* = 15,00$ sur l'arc gradué. Le contact des règles, dans la mesure des bases, était de sorte, que le lieu de l'index, l ou l^* , ne s'écartait de m ou m^* que d'une très-petite fraction d'une division. D'où provenait que, pour la base totale de n règles, la somme $[l]$ différait très peu de $20n$ et de $15n$. Donc en désignant par v et v^* la valeur d'une division pour les deux appareils, nous avons, pour la correction qui se rapporte aux l ou l^* , la valeur

$$\lambda = (20n - [l])v \quad \text{et} \quad \lambda^* = (15n - [l^*])v^*.$$

L'exactitude de cette correction dépend de celle des chiffres l et l^* lus, puis de la précision avec laquelle v et v^* étaient déterminés. Les valeurs $v = 0,0227$ ligne, $v^* = 0,0218$ ligne ont été trouvées par des expériences décrites *Gradmessung* II. p. 379, et jouissent d'une précision en dedans de $\frac{1}{200}$ de leur valeur, ou ne sont soumises qu'à des erreurs probables de tout au plus $bv = \mp 0,005v$ et $bv^* = \mp 0,005v^*$. Pour la base de SIMONIS la comparaison des l , consignés dans les deux journaux indépendants, donne l'erreur probable d'une lecture l du levier :

$$bl = \frac{1}{36}v = \mp 0,00063 \text{ ligne} = \mp 0,36 \mu,$$

ou à peu près d'un trois-millionième de la longueur d'une règle. La lecture ayant été faite à l'oeil nu, on voit que nos leviers présentent un moyen aussi exact que commode pour l'indication des quantités linéaires minimales. Mais nous n'avons pas à nous occuper de ces bl pour quatre de nos bases, pour lesquelles les bl entrent dans la recherche des erreurs personnelles, dont nous nous occuperons tout de suite. En ne considérant donc que les $bv = \mp 0,005v$, nous aurons :

pour la base de SIMONIS, . . . qui a $\lambda = -0,0018$ toise, $b\lambda = \mp 0,000009$ toise $= \mp 0,004\mu = (5)$
 » » » » TASCHEUNAR. . . » » » $+0,0050$ » » $= \mp 0,000025$ » $= \mp 0,009\mu = (5)$
 » » » » ALTEN » » $\lambda^* = -0,0008$ » $b\lambda^* = \mp 0,000004$ » $= \mp 0,004\mu = (5)$
 » » » » ÖFFVER-TORNEA » » » $-0,0016$ » » $= \mp 0,000008$ » $= \mp 0,005\mu = (5)$.

Dans les trois bases d'ELIMÄ, d'ULEABORG et de ROMANKAUTZI, M. Sabler qui dirigeait l'opération, introduisit une autre observation du levier de touche. Il préféra de placer, par un mouvement micrométrique de la règle suivante, le levier de la règle précédente exactement à 20,00. Ce procédé épargne aux deux observateurs, si non de lire, du moins d'écrire la position de l'index, mais il nous prive du contrôle qu'offrent les deux lectures indépendantes. En outre, ce procédé pêche contre une loi de l'observation exacte, savoir qu'il ne suffit pas de rendre une déviation de très-près égale à zéro, mais qu'il faut en évaluer la valeur restante, quelque petite qu'elle soit. D'après l'expérience et le jugement consciencieux de M. Sabler, l'erreur probable à craindre dans l'emplacement de l'index sur 20,00 monte à peu près à 0,2 ν ou à 0,0045 ligne; ce qui produit sur la longueur de la base une erreur probable de $0,0045\sqrt{n}$ ligne, ou

pour ELIMÄ, . . . n étant = 674, $b\lambda = \mp 0,117$ ligne $= \mp 0,100\mu = (5)$

» ULEABORG. . . » » = 753, » $= \mp 0,123$ » $= \mp 0,095\mu = (5)$

» ROMANKAUTZI » » = 1455, » $= \mp 0,171$ » $= \mp 0,068\mu = (5)$.

Ad VI. Dans chaque mesure d'une base les lectures de l'index des leviers, des thermomètres et de l'échelle du niveau ont été faites séparément par deux observateurs, de sorte qu'il y avait deux journaux indépendants de chaque base. Le calcul de la longueur de la base a donc pu être fait après l'un et l'autre des journaux. Voici les différents couples de résultats, pour les distances horizontales des extrémités de chaque base, exprimées en toises.

Longueur de la base.

Base de	A selon le journal de	B selon le journal de	$K = \frac{A+B}{2}$ toises	A - B toise
SIMONIS. . . .	2315,17309 Struve	2315,17205 Wrangell	2315,17257	+0,00104 = +0,449 μ .
ELIMÄ	1348,74916 Sabler	1348,75113 Woldstedt	1348,75014	-0,00197 = -1,460 μ .
ULEABORG. . .	1505,31900 Sabler	1505,31662 Woldstedt	1505,31781	+0,00238 = +1,582 μ .
ROMANKAUTZI.	2910,22585 Sabler	2910,22619 Napersnikow	2910,22602	-0,00034 = -0,117 μ .
TASCHEUNAR. .	2770,26928 Prazmovski	2770,26963 Wagner	2770,26946	-0,00035 = -0,127 μ .
ALTEN.	1154,74489 Lindhagen	1154,74427 Klouman	1154,74458	+0,00062 = +0,537 μ .
ÖFFVER-TORNEA	1519,85023 Selander	1519,84988 Lindhagen	1519,85006	+0,00035 = +0,230 μ .

En prenant les sept $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$, comme nous devons le faire, pour les effets des équations personnelles, d'origine multiple, entre les couples d'observateurs, nous parvenons par les carrés à l'erreur probable d'un \mathfrak{A} ou \mathfrak{B} égale à $\mp 0,412\mu$ et pour $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{2}$ à

$$(6) = \mp 0,292\mu = \mp \frac{1}{3420000} \text{ de la longueur totale.}$$

Ad VII. Quant aux effets de la température, il y a deux sources d'inexactitude à considérer, savoir les erreurs qui ont lieu soit dans les températures observées, soit dans les coefficients de dilatation adoptés.

Supposons :

K la longueur de la base $= n.S'$, S' indiquant la longueur de la somme des 4 règles de mesure, correspondante à la température moyenne $= t$ de la base ;

S la longueur de cette somme $= 4E' + u$, E' étant la longueur de l'étalon, pour la température e dans laquelle la comparaison entre les règles et l'étalon a été faite ;

$E = N + w$ à $16^{\circ}25$ C., la relation, p. 37, entre l'étalon employé et l'étalon-module, dans la température normale des étalons $= 16^{\circ}25$ C. ;

enfin le coefficient de dilatation pour 1° C., pour l'étalon E égal à ε ;

» » » » pour S » à σ .

Par ces dénominations nous aurons, en considérant que u et w sont des quantités tellement minimes que les dilatations en deviennent absolument insensibles :

$$E' = E \left(1 + (e - 16,25)\varepsilon \right) = N + w + (e - 16,25)\varepsilon N ;$$

$$S = 4N + 4w + u + 4(e - 16,25)\varepsilon N ;$$

$$S' = 4N + 4w + u + 4(e - 16,25)\varepsilon N + 4(t - e)\sigma N ;$$

$$K = n(4N + 4w + u) + 4n(e - 16,25)\varepsilon N + 4n(t - e)\sigma N.$$

Donc en mettant $K' = n(4N + 4w + u)$, nous avons

$$\begin{aligned} K &= K' + (e - 16,25)\varepsilon K' + (t - e)\sigma K' \\ &= K' + \left((e - 16,25)\varepsilon + (t - 16,25)\sigma \right) K'. \end{aligned}$$

Dans cette équation ce sont les quantités e , t , ε , et σ qui peuvent, quant aux effets de la température, être en défaut des quantités de , dt , $d\varepsilon$ et $d\sigma$. Donc nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{dK}{K'} &= \frac{dK}{K} = (e - 16,25) \cdot d(\varepsilon - \sigma) + (t - 16,25) d\sigma + (\varepsilon - \sigma) de + \sigma dt \\ &= \qquad \qquad \qquad \text{I} \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad \text{II} \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad \text{III} \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad \text{IV}. \end{aligned}$$

$\frac{dK}{K}$ est l'inexactitude en K , exprimée en parties aliquotes de K . Pour en trouver la valeur effective, il faudrait connaître les quantités de , dt , $d\varepsilon$, $d\sigma$. En employant à la place de ces quantités inconnues leur montant probable, nous aurons :

$$(7) = \frac{dK}{K} = \mp \sqrt{I^2 + II^2 + III^2 + IV^2}.$$

Les différents coefficients de dilatation ont été donnés plus haut, avec les erreurs probables auxquelles ils sont sujets. Pour e j'admets $de = \mp 0,2$, quantité sûrement trop forte. Voir p. 59.

Le terme IV étant le plus important, il s'agit maintenant d'évaluer l'erreur probable de t , c. à d. de déterminer à combien près la moyenne des lectures des thermomètres indique la température moyenne des règles. Car si dt s'élevait à 0,1, nous aurions pour IV la valeur 1,13 μ , bien plus grande que l'effet réuni des autres sources d'erreur.

J'ai détaillé, *Gradmessung* II. p. 370 et suiv., les méthodes d'après lesquelles les corrections des thermomètres employés à la mesure de la base de SIMONS ont été évaluées. L'appareil des 4 règles avait ses 8 thermomètres, et je suis persuadé que la correction thermométrique moyenne, pour les 8 thermomètres, n'est soumise qu'à une incertitude de tout au plus 0,02. Le même soin a été voué aux autres thermomètres, employés soit pour remplacer quelques thermomètres endommagés du premier appareil, soit à l'occasion de la construction du second appareil. Les différentes corrections ayant été une fois déterminées, il fallait surtout contrôler l'invariabilité des thermomètres. Pour ce but les zéros des différents thermomètres ont été examinés, tant sur le lieu de la mesure de la base, qu'avant le départ et après le retour à l'Observatoire central. En tout cas, l'erreur moyenne des 8 thermomètres a dû être inférieure à 0,05. Par conséquent, en adoptant une erreur probable $dt = \mp 0,05$, dans la moyenne des 8 thermomètres, je fais une supposition exagérée.

Vient enfin la question : avec quelle exactitude la température moyenne des 4 règles a-t-elle été indiquée par la moyenne des chiffres lus sur les 8 thermomètres dont deux se trouvaient dans chaque règle, placés, comme il a été dit, à $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de la longueur? La certitude avec laquelle les thermomètres ont été lus est incontestable; ce qui se manifeste par l'accord des températures moyennes, trouvées pour chaque base par les deux journaux. Nous avons :

SECTION I. ARC MÉRIDIONAL. OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

pour SIMONIS,	Struve — Wrangell	= + 0,017 C.
» ELIMÄ,	Sabler — Woldstedt	= — 0,012 »
» ULEABORG,	Sabler — Woldstedt	= — 0,004 »
» ROMANKAUTZI,	Sabler — Napersnikow	= — 0,007 »
» TASCIBUNAR,	Prazmovski — Wagner	= + 0,008 »
» ALTEN,	Lindhagen — Klouman	= 0,000 »
» ÖFYER-TORNEA,	Selander — Lindhagen	= — 0,010 C.

Ces différences donnent une erreur probable de $\mp 0,005$ pour chaque observateur, ou de $\mp 0,0035$ pour la moyenne des deux, ce qui répond à une erreur de $\mp 0,040\mu$ de la longueur, quantité d'une telle petitesse, que toute incertitude de la longueur d'une base disparaît, en tant qu'elle dépend de la précision dans la lecture des thermomètres.

En plaçant dans chaque règle les deux thermomètres à $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ de la longueur, je suis parti de l'hypothèse que l'un des thermomètres indique la température de la première moitié de la règle, et l'autre celle de la seconde moitié; hypothèse qui doit être de très-près exacte, surtout pour la moyenne d'un grand nombre de règles placées successivement, par une température qui, dans l'opération effective, montait depuis le matin jusqu'à l'après-midi, et puis descendait jusqu'au coucher du soleil. Si la température revenait, en moyenne, le soir au même point qu'avaient indiqué les thermomètres le matin, l'exactitude de la température moyenne aurait été parfaitement à l'abri de tout effet de la marche quotidienne. Mais en général il y a eu une hausse de température depuis le matin jusqu'au soir, hausse qui se modifie surtout par l'état du ciel, étant la plus considérable pendant un ciel parfaitement clair, et bien plus petite pour les jours couverts. En désignant par k la différence : temp. du soir — temp. du matin, nous avons en moyenne des différents jours :

	$k =$	hausse moyenne.
pour SIMONIS	+ 2,70	C.
» ELIMÄ	+ 2,65	»
» ULEABORG	+ 6,96	»
» ROMANKAUTZI	+ 5,38	»
» TASCIBUNAR	+ 12,96	»
» ALTEN	— 0,54	»
» ÖFYER-TORNEA I	+ 1,26	»
» » II	+ 4,32	»
	Moyenne	+ 4,46 »
sans TASCIBUNAR	»	+ 3,26 C.

La valeur considérable de k , pour TASCHEUNAR, s'explique de ce que la mesure entière avait été faite par des jours parfaitement sereins, dans un climat qui, à la fin de septembre et au commencement d'octobre, présente de grandes chaleurs à midi, mais des nuits tellement fraîches et humides, que quelquefois le thermomètre tombe au lever du soleil à près de zéro. M. Prazmowski se décida à commencer l'opération avec le lever du soleil, pour parvenir à une température moyenne de la journée qui ne s'éloignât pas trop de $16^{\circ}25$ C.

On conçoit aisément, en supposant que les règles soient en arrière des thermomètres, que, par une hausse de température, les thermomètres indiquent une température moyenne tant soit peu trop élevée, ou que la vraie longueur moyenne des règles est tant soit peu plus petite qu'elle ne se trouve par les indications des thermomètres, et que par conséquent la hausse, c. à d. un k positif conduit à une trop forte valeur K de la base. Sous ce point de vue les deux mesures de la base d'ÖFVER-TORNEA offrent un résultat très-intéressant, car nous avons :

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{loises} & \\
 \text{par la première mesure, } K & = 1519,85093, & \text{avec } k = + 1,26 \\
 \text{» » seconde » » } & = \underline{1519,84918} & \text{» » } = \underline{+ 4,32} \\
 \text{différence } \Delta K & = - 0,00175 & \\
 & = - 1,51 \text{ lignes} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Delta K \\ \Delta k \end{array}} \right\} \text{pour } \Delta k = + 3,06. \\
 & = - 1,15 \mu &
 \end{array}$$

Nous avons donc ici, au lieu d'un ΔK positif, un ΔK négatif pour un Δk positif, et cette expérience ne donne aucun indice que les règles aient été en arrière des thermomètres. Plutôt, en considérant qu'une différence de $- 1,15 \mu$ s'explique entièrement par les autres sources d'erreurs accidentelles, et que ce $\Delta k = + 3,06$ est presque égal à la hausse moyenne $= + 3,26$, dans les autres 6 bases à l'exception de TASCHEUNAR, nous sommes engagés à admettre que nos thermomètres indiquaient la vraie température moyenne des règles.

L'exactitude de cette supposition est confirmée par la considération suivante. Un des deux thermomètres de chaque règle se trouve du côté du levier, l'autre du côté du bout fixe. Dans l'opération de la mesure, c'est toujours le levier qui est en avant. Distinguons donc les 4 thermomètres en avant I, des quatre thermomètres en arrière II. Si, en moyenne, la première moitié de la règle a une température identique avec celle de la seconde moitié, la température de la base doit ressortir la même, en la calculant à l'aide des thermomètres soit I, soit II. Nommons t' et t'' les moyennes que nous calculons séparément des deux groupes, et nous avons pour nos 8 mesures ;

SECTION I. ARC MÉRIDIONAL. OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES.

	t'	t''	$t' - t''$	Écart.
SIMONIS	16,400 C.	16,383 C.	+0,017 C.	-0,060 C.
ELIMÄ	19,852	19,840	+0,012	-0,065
ULEABORG	14,689	14,575	+0,114	+0,037
ROMANKAUTZI	14,336	14,393	-0,057	-0,134
TASCHUNAR	20,979	20,919	+0,060	-0,017
ALTEN	15,105	14,896	+0,209	+0,132
ÖFVER-TORNEA I.	14,705	14,605	+0,100	+0,023
» II	14,383	14,221	+0,162	+0,085
		Moyenne	+0,077	

On voit ici qu'en général les t' sont plus grands que les t'' , en moyenne de $0,077 \mp 0,021$. Cette différence s'explique par deux causes. Dans toutes les bases, la mesure marchait en général vers le côté où se trouvait le soleil, pour que l'individu qui dirigeait l'alignement, eût le soleil autant que possible au dos et regardât le bout éclairé de la règle. Dans une telle direction de l'opération, le bout antérieur de la règle était plus exposé au soleil, s'il brillait, que le bout d'arrière. Mais en outre, du côté II ce n'était que 0,5 ligne de l'extrémité du bout fixe qui sortait de l'enveloppe, tandis que du côté I il y avait 4,5 pouces de la boîte en cuivre, à l'intérieur de laquelle se trouvait le levier, exposés à une hausse par l'action des rayons solaires. Cette circonstance a dû produire une valeur positive $t' - t''$, et il paraît très-satisfaisant que l'effet moyen n'en monte qu'à 0,08. En prenant maintenant la moyenne $t = \frac{1}{2}(t' + t'')$ pour la température définitive des règles, nous avons par les écarts entre les différents $t' - t''$ et leur moyenne = +0,077, l'erreur probable d'un $t' - t'' = \mp 0,059$, et pour $t = \frac{1}{2}(t' + t'')$ l'erreur probable $b't = \mp 0,029$ C., valeur, à ce qui paraît, encore trop forte, parce qu'il doit y avoir une certaine compensation spéciale dans les t' et les t'' de chaque base.

En réunissant $b't = \mp 0,050$, p. 63, et $b't = \mp 0,029$, nous aurons l'erreur probable combinée $\sqrt{(bt)^2 + (b't)^2} = \mp 0,058$, pour les six bases mesurées une seule fois. Pour ÖFVER-TORNEA, base mesurée deux fois, mais à des températures presque identiques, 14,65 et 14,30 C., bt étant le même, l'erreur probable combinée deviendra $\sqrt{(0,050^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,029^2)} = \mp 0,054$.

Pour ne rien confondre, je donnerai les quantités qui déterminent les quatre termes I, II, III, IV de l'incertitude thermométrique, les valeurs de ces termes et leur effet combiné = (7).

	SIMONIS.	ELINĂ	ULEABORG.	ROMANKAUTZI.	TASCHDUNAR.	ALTEN.	ÖFYER-TORNEA.
$e-16,25 =$	- 4,09	+ 1,82	+ 1,81	- 1,43	+ 4,39	- 0,79	+ 1,13
$t-16,25 =$	+ 0,142	+ 3,596	- 1,618	- 1,886	+ 4,699	- 1,250	- 1,772
$\epsilon =$	11,394 μ	11,394 μ	11,394 μ	11,300 μ	11,253 μ	11,253 μ	11,253 μ
$\sigma =$	11,399 μ	11,399 μ	11,399 μ	11,399 μ	11,399 μ	11,221 μ	11,221 μ
$\epsilon - \sigma =$	- 0,005 μ	- 0,005 μ	- 0,005 μ	- 0,099 μ	- 0,146 μ	+ 0,032 μ	+ 0,032 μ
$b\epsilon =$	\mp 0,018 μ	\mp 0,018 μ	\mp 0,018 μ	\mp 0,150 μ	\mp 0,017 μ	\mp 0,017 μ	\mp 0,017 μ
$b\sigma =$	\mp 0,023 μ	\mp 0,023 μ	\mp 0,023 μ	\mp 0,023 μ	\mp 0,023 μ	\mp 0,025 μ	\mp 0,025 μ
$b(\epsilon - \sigma) =$	\mp 0,013 μ	\mp 0,013 μ	\mp 0,013 μ	\mp 0,153 μ	\mp 0,029 μ	\mp 0,018 μ	\mp 0,018 μ
I	\mp 0,057 μ	\mp 0,026 μ	\mp 0,025 μ	\mp 0,142 μ	\mp 0,127 μ	\mp 0,014 μ	\mp 0,020 μ
II	\mp 0,003 μ	\mp 0,083 μ	\mp 0,037 μ	\mp 0,043 μ	\mp 0,108 μ	\mp 0,031 μ	\mp 0,044 μ
III	\mp 0,001 μ	\mp 0,001 μ	\mp 0,001 μ	+ 0,019 μ	\mp 0,029 μ	\mp 0,006 μ	\mp 0,006 μ
IV	\mp 0,661 μ	\mp 0,661 μ	\mp 0,661 μ	\mp 0,661 μ	\mp 0,661 μ	\mp 0,651 μ	\mp 0,606 μ
(7) =	\mp 0,663 μ	\mp 0,666 μ	\mp 0,663 μ	\mp 0,678 μ	\mp 0,682 μ	\mp 0,652 μ	\mp 0,608 μ

Le tableau suivant réunit les effets probables (1) (2) (7) des sept sources d'erreur.

Tableau des effets probables des différentes sources d'erreur, dans les bases mesurées à l'aide de l'appareil de Struve.

	Pour l'alignement (1) = -	Pour l'inclinaison (2) = \mp	Pour l'étalon (3) = \mp	Pour la comp. des règles (4) = \mp	Pour la lecture du levier (5) = \mp	Pour les équations personnelles (6) = \mp	Pour les températures (7) = \mp	Erreur probable totale ou \mp (1) \mp (7) = $\frac{bK}{K} =$
SIMONIS	0,056 μ	0,130 μ	0,000 μ	0,287 μ	0,004 μ	0,292 μ	0,663 μ	\mp 0,792 μ
ELINĂ	0,056 μ	0,072 μ	0,000 μ	0,287 μ	0,100 μ	0,292 μ	0,666 μ	\mp 0,793 μ
ULEABORG.	0,056 μ	0,062 μ	0,000 μ	0,287 μ	0,095 μ	0,292 μ	0,663 μ	\mp 0,789 μ
ROMANKAUTZI.	0,056 μ	0,068 μ	0,445 μ	0,287 μ	0,068 μ	0,292 μ	0,678 μ	\mp 0,914 μ
TASCHDUNAR	0,056 μ	0,248 μ	0,110 μ	0,287 μ	0,009 μ	0,292 μ	0,682 μ	\mp 0,842 μ
ALTEN	0,056 μ	0,147 μ	0,110 μ	0,287 μ	0,004 μ	0,292 μ	0,652 μ	\mp 0,793 μ
ÖFYER-TORNEA.	0,056 μ	0,039 μ	0,110 μ	0,287 μ	0,003 μ	0,250 μ	0,608 μ	\mp 0,729 μ
							Moyenne = \mp 0,807 μ	
							= \mp $\frac{1}{1,24000}$	

Quant à la base d'ÖFYER-TORNEA deux fois mesurée, il fallait considérer que l'erreur probable (2) = $\mp \sqrt{(dr)^2 + (d'r)^2}$ a dû être remplacée par (2) = $\mp \sqrt{(dr)^2 + \frac{1}{2}(d'r)^2}$, dr restant identique pour

les deux mesures commencées du même côté. Si la mesure avait été faite, la seconde fois, dans le sens opposé, en commençant du côté où la première avait fini, α serait devenu zéro. En outre, la valeur de (5) a été diminuée en la multipliant par $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

§ 25. Mesure des bases à l'aide de l'appareil de Tenner. Exactitude des bases mesurées.

Trois bases qui appartiennent à la mesure de l'arc du méridien, savoir celles de PONEDELI, d'OSSOWNITZA et de STARO-KONSTANTINOW, ont été mesurées sous la direction et avec une participation personnelles de M. de Tenner. Pour les différents travaux il disposait toujours d'un personnel très-complet, composé p. e. pour la base d'OSSOWNITZA, des individus suivants, voyez *Zanucku* Vol. VIII. p. 177 :

Chef: Le major-général Tenner;

Aides: Gerassimow, porte-enseigne de l'état-major,

Saitzow, » » de l'artillerie,

Rewkowsky, étudiant de l'Université de Vilna,

Grigoriow, conducteur de première classe du corps des ingénieurs;

Service: deux sous-officiers }
40 soldats } artilleurs.

Voici quelques données relatives à ces bases, analogues à celles qui se rapportent aux autres bases, p. 55.

Base de	Durée de la mesure.	Longueur	Température mo-	Différ. du	Inclinaison	Somme des ré-
		de la base.	yenno des régles.	niveau des	moenne des	ductions pour les
		<i>K</i>	<i>t</i>	de la base.	ses deux ter-	inclinaisons des
		toises		<i>h</i>	mes.	régles.
				<i>h</i>		<i>r</i>
PONEDELI	1820. Sept. 13 à Oct. 14	6055,4	+ 10,521 C.	2,62	1,5	— 1,1295
OSSOWNITZA	1827. Sept. 22 à Oct. 6	5720,0	+ 12,511 »	1,93	1,2	— 0,8372
STARO-KONSTANTINOW	1838. Sept. 6 à Sept. 24	4564,2	+ 15,851 »	2,17	1,6	— 0,2594

La mesure de PONEDELI a duré 32 jours. Mais il faut retrancher les jours où la mesure a été interrompue. Effectivement il n'y a eu que 23 journées de mesure, car M. de Tenner n'observait que par un ciel couvert, n'ayant pas encore arrangé les coulisses mobiles dont il a fait usage plus tard pour abriter les régles et le terrain contre les rayons solaires.

Notices supplémentaires pour ces trois bases:

Base de	Nombre total de règles.	Journées d'observation.	Heures d'observation.	Nombre moyen de règles par heure.	Moyenne des températures			Hausse moyenne journalière. k
					du commencement, le matin.	maxima des diff. jours.	finales, le soir.	
PONEDELI	2754	23	171	16,2	+ 7,50 C.	+ 12,74 C.	+ 10,86 C.	+ 3,36 C.
OSSOWNITZA	2604	14	115	22,7	+ 6,64 »	+ 17,41 »	+ 15,24 »	+ 8,60 »
STARO-KONSTANTINOW	2075	15	112	18,6	+ 9,11 »	+ 20,34 »	+ 15,16 »	+ 6,05 »

La hausse signifie encore la différence entre la température indiquée le matin, au commencement de la journée, et celle qu'indiquaient les thermomètres à la clôture de la journée. La base de PONEDELI mesurée à l'ombre des nuages offre la plus petite hausse $k = + 3,36$ C. Les deux autres bases, mesurées en majeure partie à l'ombre artificiel, présentent une hausse bien plus grande, savoir en moyenne $k = + 7,32$ C.

La vitesse de l'opération a été, pour l'appareil de Tenner, un peu plus grande que pour l'appareil de Struve. En moyenne chaque heure donnait un progrès de 19,2 règles = 38,4 sajènes = 42 toises. La mesure de SIMONIS avait offert 36 toises, chiffre qui indique de très-près aussi le progrès dans les autres bases mesurées avec l'appareil de Struve.

Pour examiner l'exactitude des bases mesurées à l'aide de l'appareil de Tenner, je choisirai la même voie, que j'ai prise plus haut pour l'appareil de Struve. Seulement il faut en V., p. 54 et 60, remplacer l'incertitude qui a eu lieu dans l'emploi des leviers, par celle que produit l'usage des languettes mobiles.

Ad I et II. Les moyens, employés par M. de Tenner, pour l'alignement et pour la détermination de l'inclinaison des règles, ont été identiques avec ceux dont on a fait usage dans les autres bases. Nous avons par conséquent :

$$(1) = - 0,056 \mu.$$

Quant aux effets des erreurs commises dans l'inclinaison, mettons, dans les expressions br et $b'r$ p. 56, $f = \mp 10''$, $g = \mp 10''$. Ces quantités conduisent :

- pour PONEDELI, à $(2) = \mp 0,027 \mu$
- » OSSOWNITZA, à $(2) = \mp 0,023 \mu$
- » STARO-KONSTANTINOW, à $(2) = \mp 0,025 \mu$,

erreurs probables, en parties aliquotes, bien plus petites que pour les 7 autres bases. C'est que, dans les bases de Tenner, il y a eu une régularité remarquable du terrain, jointe à une inclinaison

son totale qui ne s'élève qu'à 1,5, 1,2, 1,6, tandis que les autres bases offraient des inclinaisons totales de 0,1 jusqu'à 17,5.

Ad III. Quant à l'exactitude du rapport de l'échelle-étalon T au module N , nous avons, d'après p. 37,

$$(3) = \mp 0,402 \mu.$$

Ad IV. La détermination exacte de la quantité dont chacune des règles No. I, No. II, No. III et No. IV s'écartait de deux fois la longueur de l'échelle-étalon T , a été le problème le plus difficile à résoudre, vu qu'il s'agissait d'une unité à traits à comparer avec une barre de double longueur, mais à bouts. M. de Tenner a décrit le procédé qu'il a employé, *Zanucku* VIII. p. 146 et suiv. La règle No. II fut comparée à T , et puis les autres trois règles à No. II. Ces différentes comparaisons se firent, une fois pour toutes, en 1828, à l'aide de deux microscopes micrométriques de Pistor, que l'Observatoire de Dorpat avait cédés pour ce but. Dès que les comparaisons étaient achevées avec l'exactitude requise, l'échelle T disparaît des journaux de M. de Tenner, parce que les règles elles-mêmes offraient quatre étalons de fer que M. de Tenner était en droit de regarder comme invariables, ayant pris les soins nécessaires pour leur conservation. Quant à ce dernier point, il suffit de mentionner que les règles ont été pendant 37 ans, depuis 1817 jusqu'à l'époque actuelle, sous la surveillance non interrompue de M. de Tenner, et que le transport des caisses lourdes qui les enfermaient, soit de l'endroit du séjour permanent à celui de la base, soit de retour, a été fait toujours à l'aide d'un détachement de soldats qui les portaient sous l'inspection d'officiers.

La comparaison des règles No. I, III, IV avec No. II n'était sujette à aucune difficulté. Des microscopes appliqués à un bois très-fort pour former un compas à verge, reposant sur une base solide, la font avec la précision qui leur est propre, surtout si l'on soigne l'identité des températures. Mais pour la détermination de x dans l'équation No. II = $2T \mp x$ pour 16,25 C., il reste quelque chose de vague dans l'opération, si l'on ne parvient pas à éliminer entièrement l'observation microscopique des bouts. Cette élimination n'ayant pas eu lieu, la possibilité d'une erreur constante dans le rapport de T à No. II subsiste. Cependant, ayant une pleine confiance en l'intelligence et la circonspection éminentes, avec lesquelles M. de Tenner a su vaincre, avec les moyens dont il disposait, tant de difficultés graves, je crois pouvoir admettre que cette erreur constante ne s'élève qu'à $\frac{1}{200000}$ de la longueur totale, et qu'il faut supposer :

$$(4) = \mp 2,000 \mu.$$

Ad V. Intervalles mesurés à l'aide des languettes. M. de Tenner a examiné avec un soin scrupuleux, et séparément pour chaque languette, soit la longueur totale de la division tracée, soit les erreurs de division. Les deux pouces de chaque languette furent comparés à un intervalle de deux pouces sur l'échelle T , dont le rapport à T était évalué par une opération microscopique. Les centièmes de pouce des languettes furent examinés à l'aide d'un procédé micrométrique réitéré. Un tableau des corrections à appliquer à chaque lecture d'une languette était le résultat de cette recherche, qui est d'autant plus digne de confiance qu'elle s'étend sur les deux pouces de chaque languette, quoique la distance moyenne entre deux règles consécutives ne s'élevât qu'à 0,7 pouce. Aussi n'hésitons-nous aucunement de supposer, sans commettre une erreur relativement sensible :

$$(5) = 0,000 \mu.$$

Ad VI. Dans la mesure de ces trois bases, M. de Tenner exécutait lui-même, à côté de la direction générale des opérations, les travaux les plus importants, l'ajustement de la première règle sur le point initial, la position du terme quotidien et, l'autre jour, le nouvel ajustement de la règle sur ce terme etc.; puis il faisait le contact des languettes avec les règles suivantes, la lecture des languettes et des thermomètres. Tous les chiffres lus, ainsi que les indications du niveau, observées par un aide, mais encore vérifiées par le chef, furent inscrits sous la dictée dans deux journaux, qui ne formaient cependant qu'un seul journal identique, tenu au double pour éviter des erreurs de l'ouïe et de l'écriture. Nous n'avons par conséquent aucune connaissance sur le montant d'une équation personnelle dans les différents chiffres. Mais il est certain que cette équation doit être, pour l'appareil de Tenner, aussi modique que pour l'autre, et j'adopte ici la valeur trouvée p. 62, pour un seul journal,

$$(6) = 0,412 \mu.$$

Ad VII. Dans la base de PONEDELI il n'y avait que deux thermomètres pour les quatre règles, à OSSOWNITZA chaque règle avait un thermomètre, à STARO-KONSTANTINOW chaque règle en avait deux. Dans ces circonstances il a été une précaution des plus sages, pour PONEDELI, de ne mesurer que pendant un ciel couvert. L'emploi des coulisses mobiles, p. 46, a accéléré l'opération, en admettant la mesure par un temps de soleil. Cependant la manière dont les thermomètres étaient réunis à l'appareil, admet un petit doute sur l'identité absolue des températures moyennes, des règles et des thermomètres. Il est impossible de fixer cette incertitude, augmentée encore par les petites erreurs qui doivent se trouver dans les corrections thermométriques adoptées. Je crois pourtant ne pas m'éloigner beaucoup de la vérité, en supposant que les températures des trois bases sont

sujettes à une erreur probable totale $bt = \mp 0,14 \text{ R.} = \mp 0,175 \text{ C.}$ Les expériences de M. de Tenner ont déterminé la dilatation pour 1°C. , $\sigma = 11,753 \mu$. Ce coefficient employé dans le calcul des bases, est cependant plus grand que celui qu'ont présenté 6 autres barres de fer, trois de Russie, deux de France, une d'Angleterre, et qui donnent, p. 51, avec des écarts très-petits, en moyenne $11,325 \mu$. A ce qui paraît, les points fixes, dans les expériences de dilatation de Tenner, n'ont pas été absolument insensibles à l'effet du changement de température depuis 0° à 100°C. , dans l'appareil interposé entre les points fixes. Mettons soit $b\sigma$ soit $b\varepsilon = \mp 0,200 \mu$; nous aurons $b(\varepsilon - \sigma) = \mp 0,283 \mu$. Avec ces données approximatives, et en nous rappelant que la comparaison des règles avec l'échelle a été faite à $14,00 \text{ R.} = 17,50 \text{ C.}$, nous pouvons faire le calcul de l'erreur probable (7), pour les trois bases Tenneriennes, à l'aide des formules p. 63. Dans ce calcul nous négligeons l'incertitude que produit l'erreur dans la dilatation adoptée du cuivre des languettes, parceque la somme des intervalles mesurés ne monte qu'à $\frac{1}{220}$ de la longueur totale d'une base.

	PONEDELL.	OSSOWNITZA.	STARO-KONSTANTIN.
$e - 16,25 =$	$+ 1,25 \text{ C.}$	$+ 1,25 \text{ C.}$	$+ 1,25 \text{ C.}$
$t - 16,25 =$	$- 5,729 \text{ C.}$	$- 3,739 \text{ C.}$	$- 0,399 \text{ C.}$
$bt =$	$\mp 0,175 \text{ C.}$	$\mp 0,175 \text{ C.}$	$\mp 0,175 \text{ C.}$
$\sigma = \varepsilon =$	$11,735 \mu$	$11,735 \mu$	$11,735 \mu$
$b\sigma = b\varepsilon =$	$\mp 0,200 \mu$	$\mp 0,200 \mu$	$\mp 0,200 \mu$
$b(\varepsilon - \sigma)$	$\mp 0,283 \mu$	$\mp 0,283 \mu$	$\mp 0,283 \mu$
I.	$\mp 0,354 \mu$	$\mp 0,354 \mu$	$\mp 0,354 \mu$
II.	$\mp 1,146 \mu$	$\mp 0,748 \mu$	$\mp 0,798 \mu$
III.	$0,000 \mu$	$0,000 \mu$	$0,000 \mu$
IV.	$\mp 2,057 \mu$	$\mp 2,057 \mu$	$\mp 2,057 \mu$
(7) =	$\mp 2,381 \mu$	$\mp 2,216 \mu$	$\mp 2,236 \mu$

En réunissant finalement les erreurs, comme nous l'avons fait p. 67, nous parvenons aux résultats que voici :

Erreurs probables dans les bases mesurées à l'aide de l'appareil de Tenner.

	(1) = -	(2) = ±	(3) = ±	(4) = ±	(5) = ±	(6) = ±	(7) = ±	$\frac{bK}{K}$
PONEDLI	0,056 μ	0,027 μ	0,402 μ	2,000 μ	0,000 μ	0,412 μ	2,381 μ	± 3,16 μ
OSSOWNITZA	0,056 μ	0,023 μ	0,402 μ	2,000 μ	0,000 μ	0,412 μ	2,216 μ	± 3,04 μ
STARO-KONSTANTINOW	0,056 μ	0,053 μ	0,402 μ	2,000 μ	0,000 μ	0,412 μ	2,236 μ	± 3,05 μ
							Moyenne = ± 3,08 μ	
								= ± $\frac{1}{325000}$

Les erreurs probables $\frac{bK}{K}$ trouvées, p. 67, pour les 7 bases mesurées à l'aide de l'appareil de Struve, reposent sur des données numériques tirées des expériences elles-mêmes. Seulement j'ai cru devoir admettre, dans les différentes causes d'erreur I à VII, plutôt des chiffres trop forts que trop faibles, et l'incertitude probable effective est plus petite que le $\frac{bK}{K}$ numérique donné. Quant aux $\frac{bK}{K}$ des trois bases de Tenner, faute de données numériques puisées dans les expériences, j'ai dû recourir quelquefois à l'estime du montant des causes perturbatrices. Par conséquent, il y a dans ces $\frac{bK}{K}$ quelque chose d'arbitraire. Néanmoins cette recherche était indispensable, pour se former au moins une opinion nette, quoique en partie subjective, sur l'exactitude de ces bases, opinion qui me devait guider dans des analyses ultérieures. J'ajoute que l'erreur probable moyenne des bases de Tenner, $\frac{bK}{K} = \pm \frac{1}{325000}$ me satisfait au point que je suis tout-à-fait indécis s'il existe des motifs pour en admettre une valeur numérique plus grande ou plus petite.

§ 26. Valeurs définitives des six bases de l'arc méridional, réduites au niveau de la Mer.

J'ai donné, p. 61, les distances horizontales K entre les points extrêmes des bases mesurées à l'aide de mon appareil. Ces distances ont été trouvées, quant à la réduction thermométrique par l'emploi de la formule, p. 62 :

$$K = K' + ((e - 16,25)(e - \sigma) + (t - 16,25)\sigma) K'$$

et elles sont les moyennes des deux journaux indépendants.

Pour les trois bases de M. de Tenner, nous trouvons, dans ses exposés, les données suivantes, déduites d'un calcul parfaitement strict;

<i>Zanucku</i> VIII p. 392, PONEDELI	$K = 5531,71327 T'$ ou sajènes à $14^{\circ}0 R. = 17^{\circ}5 C.$
» » » 287, OSSOWNITZA	$K = 5225,24993$ » » » » » »
» XII » 35, STARO-KONSTANTINOW	$K = 4169,55375$ » » » » » »

L'unité linéaire est ici le sajène T' , indiqué sur l'échelle-étalon, mais ayant $14^{\circ}0 R. = 17^{\circ}5 C.$ Ce T' est plus long que T , le même sajène à $13^{\circ}0 R. = 16^{\circ}25 C.$, de l'effet de la dilatation pour $1^{\circ}25 C.$ Le coefficient de dilatation étant $11,753 \mu$ pour $1^{\circ} C.$, il faut ajouter au $\log T$, qui sert à changer les T en toises, $1,25 \cdot 11,753 \cdot 4,343 = 63,80$ unités de la septième place. Or ayant p. 39,

$$\log T = 0,0392661.85$$

nous obtenons, pour la conversion des T' en toises :

$$\log T' = 0,0392725.65$$

Voici maintenant les six K de nos bases de l'arc méridional, déduits des données citées et exprimés en toises :

	$K =$
SIMONIS	2315,17257
PONEDELI	6055,25206
OSSOWNITZA	5719,78406
STARO-KONSTANTINOW	4564,17347
ROMANKAUTZI	2910,22602
TASCBUNAR	2770,26946

Il nous reste maintenant à réduire les bases au niveau de la mer, réduction qui a pour fondement la hauteur de la base au dessus de la mer $= H$, et le rayon de courbure de la terre $= R$ à l'endroit et dans la direction de la base. Les tables relatives à la figure de la Terre, qu'a publiées M. Encke dans les éphémérides de Berlin pour 1852, contiennent p. 343 à 373, pour toutes les latitudes de $10'$ en $10'$ et d'après les éléments de la figure de la Terre selon Bessel, *Astr. Nachr.* No. 438, la valeur en toises du degré de courbure, M dans la direction de la méridienne, et P dans une direction normale à la méridienne. Pour un azimut quelconque α on en déduit G , la valeur du degré avec une exactitude suffisante pour notre but, en faisant $P - M = d$, par :

$$G = M + d \sin^2 \alpha; \text{ et le rayon de courbure } R = G : 3600 \sin 1''.$$

Les différents azimuts ont pu être pris dans la carte des triangles. Quant aux hauteurs H , elles sont trouvées par le nivellement trigonométrique, exécuté conjointement avec les autres opérations géodésiques. Ce nivellement part, dans les travaux de Struve, du Golfe de Finlande, près du port de Kunda, dans ceux de M. de Tenner de la Baltique près de Polangen, au nord de Memel. Les opérations

de Tenner donnent la Baltique = la Mer Noire + 0,53 toise. Cette différence étant bien plus petite que n'en est l'erreur probable, nous sommes autorisés à adopter un niveau égal des deux mers, et à conserver sans altération les hauteurs des termes des différentes bases, telles qu'elles ont été données par Struve et Tenner dans leurs ouvrages spéciaux. Soient maintenant h et h^n les deux hauteurs des deux termes d'une base, y compris la petite élévation des règles au dessus des points fixes dans le terrain, nous avons $\frac{h+h^n}{2} = H'$ la hauteur moyenne des deux termes. Mais il nous faut $\frac{h+h'+\dots+h^n}{n} = H$, la hauteur moyenne de la base. Il y aura toujours une petite différence $H-H' = dH'$, mais qui peut être déterminée à l'aide des inclinaisons successives des règles qui fournissent un nivellement mécanique *) de la ligne mesurée. La réduction ψ au niveau de la mer se calcule alors par :

$$\psi = -\frac{H'}{R} K.$$

Voici le tableau des éléments de réduction et des réductions ψ elles-mêmes pour nos six bases :

	Latitude φ	Azimat α	$\log R$	H'	dH'	H	Réduction ψ
				toises.	toises.	toises.	toise.
SIMONIS	59° 2'	75°	6,51583	55,77	+ 0,19	55,96	- 0,03950
PONDELLI	55 58	26	6,51508	49,78	- 1,26	48,52	- 0,08974
OSSOWNITZA	52 14	37	6,51503	81,01	- 0,37	80,64	- 0,14090
STARO-KONSTANTINOW	49 42	86	6,51566	146,83	- 1,78	145,05	- 0,20194
ROMANKAUTZI	48 30	49	6,51508	148,94	- 0,99	147,95	- 0,13151
TASCHBUNAR	45 35	38	6,51467	26,81	+ 0,72	27,53	- 0,02332

Les réductions ψ ainsi trouvées ne jouissent cependant point d'une précision parfaite, vu que les H' sont toujours sujets à une certaine inexactitude, qui doit être la plus grande à mi-chemin entre les deux mers. Cette incertitude s'est distinctement prononcée dans les hauteurs des quatre points près de la Duna, qui sont communs aux deux opérations de Tenner et Struve et donnent en moyenne $S-T = + 1,74$ toises, ce qui répond à une erreur probable $dH = \mp 0,83$ toise. En faisant usage ici d'une estimation judicieuse, je crois qu'il faut admettre pour nos 6 bases les erreurs probables dH

*) J'appelle cette opération un nivellement mécanique, pour la distinguer du nivellement optique qui se fait à l'aide de la lunette. Le nivellement mécanique est la méthode de niveler la plus exacte de toutes, dès qu'il se fait à l'aide d'un appareil proprement construit, et rationnellement employé. Il présente, sur le nivellement optique, l'avantage d'éviter les indistinctions du pointé, par des images ondulantes. Mais il a le désavantage de marcher plus lentement. On pourra cependant niveler mécaniquement au delà de deux verstes par journée de 10 heures de travail.

suivantes, d'où se déduisent les erreurs probables des réductions ψ ou les $b\psi$. A côté de ces $\frac{b\psi}{K}$ je place les autres erreurs probables $\frac{bK}{K}$, données p. 67 et 73, pour les réunir en des erreurs probables finales de nos bases, produites par l'action combinée de toutes les sources d'inexactitude, erreurs probables que je désigne par $\frac{\Sigma K}{K} = \sqrt{\left(\frac{bK}{K}\right)^2 + \left(\frac{b\psi}{K}\right)^2}$.

	bH	$b\psi$	$\frac{b\psi}{K}$	$\frac{bK}{K}$	$\frac{\Sigma K}{K}$
SIMONIS	$\mp 0,5$ toise	$\mp 0,00035$ toise	$\mp 0,153 \mu$	$\mp 0,792 \mu$	$\mp 0,806 \mu$
PONEDELI	$\mp 1,2$	$\mp 0,00222$ »	$\mp 0,366 \mu$	$\mp 3,16 \mu$	$\mp 3,18 \mu$
OSSOWNITZA	$\mp 1,9$	$\mp 0,00332$ »	$\mp 0,580 \mu$	$\mp 3,04 \mu$	$\mp 3,10 \mu$
STARO-KONSTANTINOW	$\mp 2,5$	$\mp 0,00348$ »	$\mp 0,764 \mu$	$\mp 3,05 \mu$	$\mp 3,15 \mu$
ROMANKAUTZI	$\mp 1,8$	$\mp 0,00160$ »	$\mp 0,550 \mu$	$\mp 0,914 \mu$	$\mp 1,067 \mu$
TASCHBUNAR	$\mp 1,0$	$\mp 0,00085$ »	$\mp 0,306 \mu$	$\mp 0,940 \mu$	$\mp 0,989 \mu$

Nous voilà parvenus aux :

Valeurs définitives K^I à K^{VI} des 6 bases réduites au niveau de la Mer Baltique.

Base de	Erreur prob.	Erreur prob.	Carré de l'erreur moyenne en $\lg K$.
SIMONIS	$K^I = 2315,13307 \mp 0,00187$ toises	$\lg K^I = 3,3645759.58 \mp 3.50$	$E^I = 26,9$
PONEDELI	$K^{II} = 6055,16232 \mp 0,01925$ »	$\lg K^{II} = 3,7821257.90 \mp 13.81$	$E^{II} = 418,7$
OSSOWNITZA	$K^{III} = 5719,64316 \mp 0,01773$ »	$\lg K^{III} = 3,7573689.34 \mp 13.46$	$E^{III} = 396,6$
STARO-KONSTANTINOW	$K^{IV} = 4563,97153 \mp 0,01438$ »	$\lg K^{IV} = 3,6593429.27 \mp 13.68$	$E^{IV} = 410,4$
ROMANKAUTZI	$K^V = 2910,09451 \mp 0,00309$ »	$\lg K^V = 3,4639070.94 \mp 4.63$	$E^V = 47,1$
TASHBUNAR	$K^{VI} = 2770,24614 \mp 0,00274$ »	$\lg K^{VI} = 3,4425183.58 \mp 4.30$	$E^{VI} = 40,6$
		Moyenne ∓ 8.90	

CHAPITRE VIII.

EXCÈS DE LA SOMME DES TROIS ANGLES SUR 180°, DANS LES TRIANGLES TRACÉS SUR LE SPHÉROÏDE TERRESTRE.

§ 27. Formules et tables générales.

Le célèbre théorème de Legendre, «qu'un petit triangle sphérique a des côtés identiques avec un triangle plan, dans lequel les angles sont d'un tiers de l'excès sphérique plus petits que ceux du triangle sphérique», a puissamment facilité le calcul des opérations géodésiques. Il restait cependant un pas essentiel à faire, dès qu'il s'agissait de triangles de plus grandes dimensions, ou d'un triangle formé non pas par trois portions de cercles de la sphère, mais par trois lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde. Buzengeiger avait indiqué, déjà en 1818, le rapport entre l'aire du triangle sphérique et celle du triangle plan analogue. Voyez: Lindenau et Bohnenberger, *Zeitschrift für Astronomie*, vol. VI, pag. 264 et suiv. Mais c'est à M. Gauss que la science est redevable d'une analyse complète des différents problèmes qui se rattachent à l'usage de l'excès, sur la sphère et sur le sphéroïde, analyse qui est contenue dans son admirable mémoire: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, publié en 1818 dans les *Commentationes Soc. Goett. rec. math.* vol. VI. p. 99 à 146. Les formules et les chiffres suivants, relatifs au calcul de l'excès des triangles sur le sphéroïde terrestre, ont été déduits du dit mémoire de M. Gauss, en supposant les dimensions de la Terre d'après les recherches de Bessel, publiées dans les *Astronomische Nachrichten*, No. 438.

Si nous désignons, pour une latitude φ , les rayons de courbure dans la direction de la méridienne et dans la direction normale à la méridienne par r et r' , nous avons, selon M. Gauss, la mesure k de la courbure (*mensura curvaturae*) par $k = rr'$. Mettons $m = \frac{1}{2rr' \sin 1''}$, et exprimons r et r' par les deux valeurs du degré, M du méridien, P du cercle perpendiculaire au méridien, données en toises, nous aurons:

$$m = \frac{6480000 \sin 1''}{MP}; \quad \lg m = 1,4971498 . 7 - (\lg M + \lg P).$$

Les M et P se trouvent calculés, d'après les données de Bessel, de $10'$ à $10'$ de latitude dans la table I qu'a donnée M. Encke à la fin de son mémoire sur les dimensions de la Terre, *Berliner Jahrbuch für 1852*.

Table des $lg m$ et des m .

φ .	$lg m$ = -10 +	$10^{10} m$ =	φ .	$lg m$ = -10 +	$10^{10} m$ =	φ .	$lg m$ = -10 +	$10^{10} m$ =
0°	1,986656	96,9742	30°	1,985206	96,6509	60°	1,982298	96,0058
1	6655	9738	31	5117	6312	61	2210	95,9865
2	6649	9727	32	5027	6111	62	2125	9676
3	6640	9709	33	4935	5906	63	2042	9493
4	6628	9680	34	4842	5699	64	1960	9313
5	6612	9644	35	4747	5488	65	1881	9139
6	6593	9601	36	4651	5275	66	1805	8969
7	6570	9550	37	4554	5060	67	1730	8805
8	6544	9492	38	4456	4842	68	1658	8646
9	6515	9426	39	4357	4623	69	1589	8493
10	6482	9352	40	4258	4401	70	1522	8346
11	6445	9271	41	4158	4179	71	1458	8204
12	6406	9183	42	4057	3955	72	1397	8069
13	6363	9088	43	3956	3731	73	1338	7940
14	6317	8985	44	3854	3506	74	1283	7818
15	6268	8876	45	3753	3281	75	1231	7702
16	6216	8759	46	3651	3056	76	1181	7594
17	6161	8636	47	3550	2831	77	1135	7492
18	6103	8507	48	3449	2607	78	1092	7397
19	6042	8371	49	3348	2383	79	1052	7309
20	5978	8229	50	3248	2161	80	1016	7229
21	5912	8081	51	3148	1940	81	0983	7156
22	5843	7927	52	3049	1721	82	0953	7090
23	5771	7767	53	2951	1504	83	0926	7032
24	5697	7602	54	2854	1289	84	0903	6981
25	5620	7432	55	2758	1076	85	0884	6939
26	5542	7256	56	2663	0866	86	0868	6903
27	5461	7076	57	2569	0659	87	0856	6876
28	5378	6892	58	2477	0453	88	0847	6856
29	5293	6703	59	2387	0255	89	0842	6845
30	1,985206	96,6509	60	1,982298	96,0058	90	1,980840	95,6841

Les $lg m$ et les quantités m elles-mêmes sont consignés dans le tableau précédent, pour les degrés entiers successifs depuis l'équateur jusqu'au pôle, ou depuis $\varphi = 0^\circ$, jusqu'à $\varphi = 90^\circ$. Les chiffres de

ce tableau marchent aussi régulièrement, qu'ils admettent une interpolation facile pour les φ intermédiaires entre deux degrés entiers.

Désignons maintenant, dans un triangle du sphéroïde terrestre, par :

φ	χ	ψ	les latitudes des trois sommets du triangle,
A	B	C	les angles du triangle sur le sphéroïde,
a	b	c	les côtés de ce triangle, exprimés en toises;
A^*	B^*	C^*	les angles du triangle plan dont les côtés sont a, b, c ;
α	β	γ	les chiffres m du tableau préc., pour les lati- tudes φ, χ, ψ ;

$$\eta = \frac{1}{3} (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$a = A - A^* \quad b = B - B^* \quad c = C - C^* \quad \text{les trois excès spéciaux;}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \\ \sigma^* \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{la surface exprimée } \\ \text{en toises carrées} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{du triangle sphéroïde,} \\ \text{plan;} \end{array}$$

$$e = a + b + c \quad \text{l'excès total du triangle sur le sphéroïde.}$$

Avec ces dénominations nous avons:

$$a = \frac{1}{6} \sigma (3\eta + \alpha) = \frac{1}{3} e \left(1 + \frac{\alpha - \eta}{4\eta} \right) \quad (1)$$

$$b = \frac{1}{6} \sigma (3\eta + \beta) = \frac{1}{3} e \left(1 + \frac{\beta - \eta}{4\eta} \right) \quad (2)$$

$$c = \frac{1}{6} \sigma (3\eta + \gamma) = \frac{1}{3} e \left(1 + \frac{\gamma - \eta}{4\eta} \right) \quad (3)$$

$$\text{Somme} \quad e = 2 \sigma \eta = e \quad (4)$$

$$\sigma^* = \frac{1}{2} ab \sin(C - c) = \frac{1}{2} ac \sin(B - b) = \frac{1}{2} bc \sin(A - a) \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{\sin 1''}{60} = S \\ S - a^2 \frac{\sin 1''}{60} = \mathfrak{A} \\ S - b^2 \frac{\sin 1''}{60} = \mathfrak{B} \\ S - c^2 \frac{\sin 1''}{60} = \mathfrak{C} \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$1 + \alpha \mathfrak{A} + \beta \mathfrak{B} + \gamma \mathfrak{C} = u \quad (7)$$

$$\sigma = u \sigma^* \quad (8)$$

$$e = 2 u \sigma^* \eta$$

ou

$$e = u \cdot ab \cdot \eta \sin(C - c) = u \cdot ac \cdot \eta \sin(B - b) = u \cdot bc \cdot \eta \sin(A - a) \quad (9)$$

On voit que l'application de ces formules réclame certains préparatifs, car pour prendre α, β, γ , dans notre table, p. 78, il faut connaître les trois latitudes φ, χ, ψ ; et pour calculer u , les trois côtés a, b, c doivent être connus. Pour la plupart des cas, il suffit de prendre ces quantités dans la représentation graphique des triangles; et si ce moyen ne suffit pas, un calcul préalable est toujours assez facile.

Le calcul de u se simplifie extrêmement par la considération que voici. Le chiffre u ne diffère de l'unité que d'une très-petite fraction. Dans la formule (7) nous pouvons donc remplacer α, β, γ par la moyenne η ; et nous avons $u = 1 + \eta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, avec une exactitude plus que suffisante, même pour les plus grands triangles dont il est question dans les calculs géodésiques. Mais $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = 2\frac{1}{2} S = (a^2 + b^2 + c^2) \frac{\sin 1''}{12}$. D'où suit :

$$u = 1 + (a^2 + b^2 + c^2) \frac{\sin 1''}{12} \eta. \quad (10)$$

Soit n la valeur de m pour $\varphi = 45^\circ$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \lg n &= 1,9837529 - 10 \\ \frac{\eta}{n} &= \lambda, \quad \frac{\sin 1''}{12} n = N, \quad \lg N = -14,4098534. \end{aligned}$$

$$u = 1 + (a^2 N + b^2 N + c^2 N) \lambda$$

$$\lg u = (\pi + \pi' + \pi'') \lambda = \Pi. \quad (11)$$

Les π, π', π'' peuvent être directement trouvés à l'aide des tables qui fournissent le logarithme de la somme de deux nombres donnés par leurs logarithmes. Soit $a = 200000$ toises, $\lg a = 5,30103$; $\lg a^2 = 10,60206$, il faut prendre $14,40985 - 10,60206 = 3,8078$. Entrons avec cet argument dans les tables de Zech, p. 679, nous y trouvons, à coup d'oeil, le chiffre correspondant $\pi = 0,0000676$. Dans la table ci-jointe les π correspondants aux arguments $\lg a, \lg b, \lg c$, se trouvent pour les logarithmes depuis 4,00 jusqu'à 5,52, ou pour des côtés depuis 10000 toises jusqu'à 356500 toises = $6^\circ 25'$. Les $\lambda = \text{num. nat.} (\lg \eta - \lg n)$ sont donnés dans la même table, pour les degrés entiers de latitude. Prenons, afin de montrer la facilité du calcul de u à l'aide de notre table, le plus grand triangle à calculer de notre arc méridional, ayant $\lg a = 4,9333$, $\lg b = 4,9993$, $\lg c = 5,1192$; latitude moyenne $48^\circ 41'$; nous trouverons :

avec l'argument	4,9333	$\pi = 124$	
»	4,9993	$\pi' = 168$	$\lambda = 1 - 0,00074$
»	5,1192	$\pi'' = 293$	
	Somme	585	$\Pi = 584,6$
	$\lg u = 0,000585$	$u = 1,0001347.$	

Les formules (6) et (7) conduisent au chiffre identique $\lg u = 0,0000585$. Les π sont donnés dans la table en unités de la septième décimale. On rejette la septième place de Π , pour avoir six décimales exactes.

Table des π et des λ .

$\lg a$ $\lg b$ $\lg c$	π π' π''	$\lg a$ $\lg b$ $\lg c$	π π' π''	$\lg a$ $\lg b$ $\lg c$	π π' π''	$\lg a$ $\lg b$ $\lg c$	π π' π''	Latitude moyenne du triangle.	$\lambda =$
4,0	2	4,72	47	4,99	161	5,26	559	$\varphi' = 0^\circ$	1 + 0,00671
4,1	3	4,73	49	5,00	169	5,27	586	5	+ 0,00661
4,2	4							10	+ 0,00630
4,3	7	4,74	51	5,01	177	5,28	613		
4,4	11	4,75	53	5,02	185	5,29	642	15	+ 0,00581
4,5	17	4,76	56	5,03	194	5,30	673	20	+ 0,00514
								25	+ 0,00431
4,50	17	4,77	59	5,04	203	5,31	704		
4,51	18	4,78	61	5,05	213	5,32	737	30	+ 0,00335
4,52	19	4,79	64	5,06	223	5,33	773	35	+ 0,00229
								40	1 + 0,00116
4,53	19	4,80	67	5,07	233	5,34	809		
4,54	20	4,81	70	5,08	244	5,35	847	45	1,00000
4,55	21	4,82	74	5,09	256	5,36	887		
								50	1 - 0,00116
4,56	22	4,83	77	5,10	268	5,37	928	55	- 0,00227
4,57	23	4,84	81	5,11	280	5,38	972	60	- 0,00335
4,58	24	4,85	85	5,12	294	5,39	1018		
								65	- 0,00430
4,59	26	4,86	89	5,13	307	5,40	1066	70	- 0,00512
4,60	27	4,87	93	5,14	322	5,41	1116	75	- 0,00579
4,61	28	4,88	97	5,15	337	5,42	1169		
								80	- 0,00628
4,62	29	4,89	102	5,16	353	5,43	1224	85	- 0,00658
4,63	31	4,90	107	5,17	370	5,44	1282	90	1 - 0,00669
4,64	32	4,91	112	5,18	387	5,45	1342		
4,65	34	4,92	117	5,19	405	5,46	1405		
4,66	35	4,93	122	5,20	424	5,47	1471		
4,67	37	4,94	128	5,21	444	5,48	1541		
4,68	39	4,95	134	5,22	465	5,49	1613		
4,69	41	4,96	141	5,23	487	5,50	1690		
4,70	42	4,97	147	5,24	510				
4,71	44	4,98	154	5,25	534	5,51	1770		
4,72	47	4,99	161	5,26	559	5,52	1853		

En regardant à présent b , c et A comme quantités de départ, nous avons la formule finale :

$$\lg e = \lg b + \lg c + \lg \eta + \Pi + \lg \sin A^*. \quad (12)$$

Dans le calcul on fait usage de $A^* = A - \frac{1}{3}e$, en prenant pour e la valeur approximative donnée par le calcul préalable; en outre on peut remplacer $\eta = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$ par $\eta' =$ le chiffre m , correspondant à la latitude moyenne du triangle $\varphi' = \frac{1}{3}(\varphi + \chi + \psi)$.

Il est aisément prouvé, que la plus grande erreur, commise en calculant l'excès e à l'aide des deux tables auxiliaires, n'atteint jamais $\frac{1}{400000}e$. Ce serait cependant une illusion, que d'attribuer aux e calculés ce degré d'exactitude absolue; car l'imperfection de nos connaissances sur la forme et les dimensions de la Terre, influence essentiellement les e calculés. L'excès e s'exprime par $\frac{p}{r'}$, p étant une quantité constante. En désignant le carré de l'excentricité ou $1 - \frac{b^2}{a^2}$ par E , on a

$$r = \frac{a(1-E)}{(1-E \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \quad r' = \frac{a}{(1-E \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \quad rr' = \frac{a^2(1-E)}{(1-E \sin^2 \varphi)^2}$$

$$e = p \cdot \frac{(1-E \sin^2 \varphi)^2}{a^2(1-E)}$$

$$\frac{de}{e} = -2 \frac{da}{a} + \cos 2\varphi \cdot dE;$$

ou, dE étant $= -2d\left(\frac{b}{a}\right)$, et en mettant $\frac{b}{a} = \rho$,

$$\frac{de}{e} = -2 \frac{da}{a} - 2 \cos 2\varphi \cdot d\rho.$$

En désignant encore par g la longueur moyenne d'un degré du méridien, il y a :

$$\frac{da}{a} = \frac{dg}{g} + \frac{1}{4}dE = \frac{dg}{g} - \frac{1}{2}d\rho;$$

enfin

$$\frac{de}{e} = -2 \frac{dg}{g} + (1 - 2 \cos 2\varphi) d\rho. \quad (13)$$

Si maintenant, au lieu des corrections effectives de , dg , $d\rho$, nous introduisons les erreurs probables δe , δg , $\delta \rho$, nous parvenons à :

$$\frac{\delta e}{e} = \sqrt{\left\{ \left(\frac{2\delta g}{g} \right)^2 + \left((1 - 2 \cos 2\varphi) \delta \rho \right)^2 \right\}}. \quad (14)$$

On voit que $\frac{\delta e}{e}$ devient un minimum pour $\varphi = 30^\circ$, et qu'il a son maximum pour $\varphi = 90^\circ$.

Bessel donne, dans les *Astron. Nachrichten* No. 438, $g = 57043,109$ toises avec l'erreur probable $\delta g = \mp 1,916$ toises, donc $\frac{\delta g}{g} = \mp 0,0000336$. Le $\frac{b}{a} = \rho$ qu'il trouve $= \frac{298,1528}{299,1528}$, est sujet à une

erreur probable de $\mp 3,148$ unités identiques dans les deux chiffres; d'où se déduit $\rho = 0,9966572$ et $b\rho = \mp 0,0000352$. En mettant ces chiffres dans l'expression (14), nous avons:

$$\frac{be}{c} = \mp \sqrt{0,0000672^2 + 0,0000352^2 (1 - 2 \cos 2\varphi)^2}.$$

Cette expression fournit

pour $\varphi = 0^\circ$,	$\frac{be}{c} = \mp 0,0000759$
» 15 »	0720
» 30 »	0672
» 45 »	0759
» 60 »	0973
» 75 »	1174
» 90 »	1251.

En moyenne nous aurions $be = \mp 0,0000901e = \frac{1}{11000}e$, incertitude qui est au-delà de 9 fois plus forte que la plus grande inexactitude que peut produire l'usage de nos tables.

Or il paraît que l'incertitude, dans les dimensions de la Terre données par Bessel, est considérablement plus grande, que ne l'annoncent les erreurs probables $\frac{bg}{g}$ et $b\rho$ susmentionnées. Pour parvenir à des vues plus précises sur ce point, j'ai exécuté un calcul provisoire de notre arc total de $25^\circ 20' 8,5$, entre les latitudes $45^\circ 20' 2,8$ et $70^\circ 40' 11,3$, et j'ai trouvé la distance mesurée des deux parallèles = 1447792 toises. Ce chiffre, quoiqu'il ne soit qu'approximatif, ne peut s'éloigner de la valeur définitive pas même de 10 toises. Puis, j'ai comparé cet arc avec l'arc total des Indes Orientales, prolongé par le colonel Everest à une étendue de $21^\circ 21' 17,0$, depuis $8^\circ 9' 31,1$ jusqu'à $29^\circ 30' 48,1$ de latitude. La distance des deux parallèles est 1212880 toises. La combinaison de ces deux arcs conduit à:

$$g' = 57023,52 \mp 1,44 \text{ toises } ^*), \text{ avec } \frac{bg'}{g} = \mp 0,0000253$$

$$\rho' = \frac{291,97}{291,97} \mp 2,42 \text{ unités} = 0,9965750, \text{ avec } b\rho' = \mp 0,0000283.$$

Si nous comparons ces quantités avec les chiffres de Bessel,

$$g = 57013,11 \quad , \text{ avec } \frac{bg}{g} = \mp 0,0000336$$

$$\rho = 0,9966572, \text{ avec } b\rho = \mp 0,0000352,$$

*) Les erreurs probables des g' et ρ' ont été trouvées en supposant, selon Bessel l. c., pour une latitude quelconque l'erreur probable, produite en majeure portion par les irrégularités de la pesanteur, égale à $\mp 1,78$.

il est évident que ces deux grands arcs combinés ont donné, par suite de leur étendue, des valeurs plus précises des dimensions de la Terre, que n'ont fournies les 10 arcs sur lesquels Bessel a pu baser ses calculs. En combinant \bar{g} et \bar{g}' , $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$, eu égard aux erreurs probables respectives, nous trouvons :

$$\bar{g} = 57019,75 \mp 1,15 \text{ toises}, \quad \text{avec } \frac{b\bar{g}}{\bar{g}} = \mp 0,0000202$$

$$\bar{\rho} = \frac{293,73}{294,73} \mp 1,72 \text{ unités} = 0,9966071, \quad \text{et } \frac{b\bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \mp 0,0000197$$

$$\lg \bar{\rho} = 9,9985240 = -0,0014760.$$

Quoique cette combinaison ne soit pas rigoureuse, parce que $\frac{2}{3}$ de l'arc total des Indes et $\frac{1}{3}$ du nôtre ont été employés par Bessel, les \bar{g} et $\bar{\rho}$ ainsi trouvés sont cependant propres à servir de fondement dans les calculs de l'excès. En comparant \bar{g} avec g , et $\bar{\rho}$ avec ρ , nous avons

$$dg = + 6,64 \text{ toises}, \quad d\rho = - 0,0000499, \quad \frac{dg}{g} = + 0,0001165;$$

et par la formule (13) :

$$\frac{dc}{c} = - 0,0002330 + 0,0000499 \cos 2\varphi.$$

Les quantités trouvées fournissent encore :

$$\text{le demi grand-axe de la Terre } a = 3272539 \text{ toises}; \quad \lg a = 6,5148849$$

$$\text{le carré de l'excentricité } E = 0,00677436; \quad \lg E = 7,8308683.$$

Désignons maintenant l'excès qui correspond aux quantités \bar{g} et $\bar{\rho}$, par \bar{e} , en réservant e pour la valeur de l'excès que donnent les chiffres Besseliens g et ρ ; nous aurons :

$$\bar{e} = e + dc = e \left(1 + \frac{dc}{c} \right) = e(1 - 0,0002330 + 0,0000499 \cos 2\varphi).$$

Voici une petite table des $\frac{dc}{c}$ et des $\lg \left(1 + \frac{dc}{c} \right)$ pour chaque cinquième degré de latitude. Elle donne les unités de la septième décimale.

φ	$\frac{dc}{c}$	$\lg \left(1 + \frac{dc}{c} \right)$	φ	$\frac{dc}{c}$	$\lg \left(1 + \frac{dc}{c} \right)$
0°	- 0,0001831	- 795 ⁴	45°	- 0,0002330	- 1012 ³⁷
5	1839	- 799 ⁹	50	2417	- 1049 ³⁷
10	1861	- 808 ¹⁶	55	2501	- 1086 ³⁴
15	1898	- 824 ²²	60	2579	- 1120 ³¹
20	1948	- 846 ²⁷	65	2651	- 1151 ²⁷
25	2009	- 873 ³¹	70	2712	- 1178 ²¹
30	2081	- 904 ³⁴	75	2762	- 1199 ¹⁷
35	2159	- 938 ³⁶	80	2799	- 1216 ⁹
40	2243	- 974 ³⁸	85	2821	- 1225 ⁴
45	2330	- 1012	90	2829	- 1229

§ 28. Application des formules et des tables.

Dans le courant de nos calculs nous ferons un triple usage de l'excès, savoir :

1. pour la résolution des triangles primitifs;
2. pour le calcul des coordonnées polaires, dans les arcs partiels situés entre deux points astronomiques voisins;
3. dans le calcul des triangles rectangles sur le sphéroïde terrestre, qui seront employés pour déterminer les distances des parallèles qui coupent les différents points astronomiques.

1. Calcul de l'excès dans les triangles primitifs.

Pour ces triangles l'excès se trouve avec une exactitude plus que suffisante par

$$e = b c \eta' \sin A^*, \quad (15)$$

η' étant encore le m de notre table p. 78, correspondant à la latitude moyenne ϕ' du triangle, prise dans la carte générale pl. I. Dans tous les triangles primitifs A^* est connu; car si $q = (A + B + C) - 180^\circ$, nous avons $A^* = A - \frac{1}{3}q$. Voyez p. 2. Le plus grand triangle de notre arc méridional, § 48, No. 155, est formé par les trois stations.

MÄKI-PÄÄLYS,	$\phi = 60^\circ 4'$, $A^* = 16^\circ 20' 15'' 51$,	$\lg a = 4,077189$
HALLJALL,	$\chi = 59 27$	$\lg b = 4,583877$
HOHENKNEUTZ,	$\psi = 59 26$	$\lg c = 4,622570$.
	$\phi' = 59 39$.	

Nous trouvons	$e = 4''34452$	$\bar{e} = 4''34340$	par la formule (15)
	$a = 1,44817$	$\bar{a} = 1,44779$	}
	$b = 1,44821$	$\bar{b} = 1,44784$	
	$c = 1,44821$	$\bar{c} = 1,44784$	
Somme	$e = 4,34459$	$\bar{e} = 4,34347$	
	$\frac{1}{3}e = 1,44820$	$\frac{1}{3}\bar{e} = 1,44782$	

par les formules (1)...(9).

La formule (15) donne l'excès trop faible de 0,000008. Les a , b , c et les \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} ne s'écartent que de 0,000001 à 0,000003 de $\frac{1}{3}e$ et $\frac{1}{3}\bar{e}$; $e - \bar{e}$ est = 0,00112.

2. Calcul de l'excès dans les triangles qui fournissent les coordonnées polaires.

Dans ces triangles polaires, deux côtés peuvent être très-grands, vis-à-vis du troisième qui est un côté d'un triangle de continuation. Dans ces cas, la formule (15) ne suffit pas toujours, et il faut employer

la formule (12) pour le calcul de l'excès total. Le plus grand triangle de cette espèce, § 58, triangle V. 29, est entre les stations

KONRADI,	$\varphi = 54^{\circ} 42'$, $A = 71^{\circ} 33' 45''$,	$\lg a = 5,172744$
NEMESCH.	$\chi = 54 \quad 39$	$\lg b = 5,184487$
BELIN,	$\psi = 52 \quad 3$	$\lg c = 4,178263$
	$\varphi' = 53 \quad 48.$	

Un premier calcul à 3 décimales fait $e = 21''$, donc $A^* = 71^{\circ} 33' 38''$. En employant cet angle, nous avons :

$e = 21,0249$	$\bar{e} = 21,0196$	par la formule (15);
$e = 21,0286$	$\bar{e} = 21,0234$	» » (12).

Le calcul des excès spéciaux, par les formules (1) à (9), donne :

$\alpha = 7,0092$	$\bar{\alpha} = 7,0074$
$b = 7,0092$	$\bar{b} = 7,0075$
$c = 7,0102$	$\bar{c} = 7,0085$
$e = 21,0286$	$\bar{e} = 21,0234$
$\frac{1}{3}e = 7,0095$	$\frac{1}{3}\bar{e} = 7,0078.$

3. Calcul de l'excès dans des triangles rectangles sur le sphéroïde terrestre.

Les triangles dont il est question ici, et qui ont des aires plus considérables que celles des deux espèces précédentes, sont des triangles rectangles dans lesquels l'hypoténuse et un angle adjacent sont donnés. Un calcul préalable plus soigné doit fournir ici les valeurs approximées des quantités requises pour le calcul. Prenons encore pour exemple le triangle qui a la plus grande aire, parmi tous les triangles de cette espèce que présente notre arc total. La ligne géodésique entre WODOLUI-WODY et SSUPRUNKOWZI est l'hypoténuse c , donnée par $\lg c = 5,1192468$. Elle fait à son extrémité méridionale un azimut $A = 40^{\circ} 40' 10,0''$ avec le méridien, sous $\varphi = 47^{\circ} 1' 25,2''$. De ces données le calcul préalable a fourni $e = 82,5$; puis

$\varphi = 47^{\circ} 1' 25''$,	$A^* = 40^{\circ} 39' 42,5''$,	$\lg a = 5,119247$
$\chi = 48 \quad 45 \quad 5$		$\lg b = 4,999291$
$\psi = 48 \quad 46 \quad 26$		$\lg c = 4,933223.$

Avec ces données nous trouvons :

$$e = 82,4032 \qquad \bar{e} = 82,3831 \qquad \text{par la formule (15);}$$

$$e = 82,4142 \qquad \bar{e} = 82,3941 \qquad \text{» \qquad \qquad (12).}$$

Le calcul des excès spéciaux à l'aide des formules (1) à (9) conduit à :

$$\begin{array}{ll} a = 27,4734 & \bar{a} = 27,4669 \\ b = 27,4706 & \bar{b} = 27,4640 \\ \underline{c = 27,4705} & \underline{\bar{c} = 27,4640} \\ e = 82,4145 & \bar{e} = 82,3949 \\ \frac{1}{3}e = 27,4715 & \frac{1}{3}\bar{e} = 27,4650. \end{array}$$

CHAPITRE IX.

TRIANGLES PRIMITIFS, DÉDUITS DES JOURNAUX D'OBSERVATION.

§ 29. Marche des opérations géodésiques par de simples triangles, sans diagonales. Classification et terminologie des triangles etc.

Notre arc méridional présente, comme nous l'avons indiqué dans les articles précédents, un terrain en majeure partie fort boisé et qui manque partout d'élévations considérables au-dessus du sol environnant. C'est la raison qui a forcé les géomètres russes à faire marcher leurs opérations par de simples triangles contigus l'un à l'autre. Il n'aurait été possible que très-exceptionnellement d'ajouter, aux trois angles d'un triangle, l'observation d'une diagonale tirée d'une des stations à un point appartenant à un triangle plus éloigné. Aussi ne trouvons-nous, sur les différentes stations de la série des triangles qui produisent la jonction directe entre l'île de Hogland et le Danube, pas une seule diagonale observée. Dans mes opérations de l'arc Baltique, un petit nombre de diagonales auraient été possibles, mais j'ai cru devoir les omettre, pour l'uniformité de l'opération et pour économiser le temps. En effet, les objets très-éloignés auraient exigé pour l'observation, soit une transparence extraordinaire de l'air, soit l'envoi et l'établissement d'un héliotrope avec son dirigeant, et un soleil brillant. Quant aux opérations de M. de Tenner, depuis la Duna jusqu'au Pruth, la continuation des triangles n'ayant été praticable que par l'érection d'échafauds élevés, les diagonales y ont été à peu près impossibles. En Bessarabie, peut-être, quelques diagonales auraient été praticables, mais elles n'ont pas été observées, pour maintenir le caractère général des opérations.

Les mesures faites, sous la direction de M. de Tenner, à l'aide des cercles répéteurs donnent directement les angles détachés que requiert la formation des triangles. Dans les mesures exécutées sans répétition, et dans lesquelles on observe successivement les directions des différents objets visibles, chaque angle requis pour la formation des triangles a été déduit des deux directions observées qui

le renferment. Ce procédé produit l'uniformité dans les opérations faites avec et sans répétition. En outre, il se recommande par deux circonstances. En l'employant, les mises, dans lesquelles l'un ou l'autre des objets n'a pas été observé par suite de circonstances atmosphériques, sont aisément complétées à l'aide d'observations supplémentaires pour ces objets. Puis, l'angle entre deux objets voisins, pointés dans l'espace de peu de minutes, jouit nécessairement d'une plus grande exactitude que l'angle formé par deux directions dont l'observation est séparée par un plus long intervalle de temps.

Il paraît indispensable d'introduire dès à présent des dénominations distinctes pour les différentes espèces soit de triangles, soit d'angles et de côtés. En partie ces noms ont été déjà employés dans ces sens précis dans les pages précédentes.

Les 180 triangles qui se trouvent sur notre arc méridional, peuvent être divisés en 4 classes :

1. *Triangles de continuation.* C'est la série des 153 triangles établis en continuation régulière entre les deux points extrêmes MÄKI-PÄÄLYS sur l'île de Hogland et STARO-NEKRASSOWKA sur le Danube. Ces triangles et les deux triangles auxiliaires en 3. sont numérotés dans nos planches par les chiffres successifs 1 à 155.
2. *Triangles de rattachement.* Ces triangles conduisent d'une base mesurée jusqu'au côté le plus proche d'un triangle de continuation, et rattachent ainsi les triangles de continuation à cette base. Il y a trois triangles de rattachement entre la base de SIMONIS et le côté EDDAFER-TAMMIK, appartenant aux triangles No. 149 et 150. La base de PONEDELI forme elle-même un côté du triangle No. 117. Pour parvenir des bases d'OSSOWNITZA, de STARO-KONSTANTINOW, de ROMANKAUTZI et de TASCIBUNAR aux triangles de continuation, il y a 2, 6, 4 et 2 triangles de rattachement. Nous avons donc en tout 17 triangles de cette classe.
3. *Triangles auxiliaires.* Il n'y en a que deux. No. 145 fait la jonction entre l'Observatoire de DORPAT et le triangle de continuation No. 144. L'autre No. 126 sert à annexer le point astronomique JACONSTADT au triangle de continuation No. 127.
4. Enfin nous avons 8 *triangles surnuméraires*, parce qu'ils n'étaient point indispensables pour la jonction régulière. Présentant un contrôle spécial en trois occasions, en formant, avec les triangles de continuation reçus, des polygones autour des stations centrales, DÄDORS-KALNS, DOKUDOWO et BRONNA, ces triangles surnuméraires doivent être soumis à un calcul spécial de compensation.

Sur la nomenclature adoptée pour les angles et les côtés de chaque triangle à part voyez le § 1 p. 1. Nous distinguons les deux *angles de continuation* C et B et l'*angle intermédiaire* A , opposés aux deux *côtés transversaux* c et b , et au *côté latéral* a . Choisissons maintenant le nom de *côtés fon-*

damentaux = L , pour les 6 côtés de triangles de continuation, auxquels aboutissent les triangles de rattachement, et qui par leurs différentes jonctions directes avec les bases, fournissent les longueurs linéaires qui servent de départ pour le calcul des longueurs des côtés de tous les triangles de continuation. Les 6 côtés fondamentaux, indiqués sur nos planches par des traits plus gros, sont :

			déduit de la base de	Planche
L^I	TAMMIK — ERDAFER,	côté transversal des tr. No. 149 et 150	SIMONIS	X
L^{II}	PONEDELI — JAKSCHTI,	» latéral du » No. 117	(mesuré)	VIII
L^{III}	OSSOWNITZA — LESKOWITSCHI,	» » » » No. 79	OSSOWNITZA	VI
L^{IV}	MONTSCHINZI — KATERINOWKA,	» » » » No. 53	STARO-KONSTANTINOW	IV
L^V	GWOSDAUTZI — BRITSCHANI,	» transversal des » No. 40 et 41	ROMANKAUTZI	IV
L^{VI}	TASCHBUNAR II — KATLABUCH,	» latéral du » No. 6	TASCHBUNAR	II.

Maintenant nous pouvons encore distinguer deux catégories de nos triangles de continuation.

- a. Triangles, situés entre les différents côtés fondamentaux et que j'appellerai par préférence *triangles principaux*. Évidemment chacun de ces triangles est en dépendance des six côtés fondamentaux, et ces triangles réclament un calcul de compensation dans lequel cette dépendance a été dûment considérée. Il y a en tout 142 de ces triangles principaux.
- b. Nommons enfin *triangles de continuation excédants*, les 6 triangles No. 150 à 155 situés au nord du côté fondamental le plus septentrional, TAMMIK — ERDAFER, et les 5 triangles No. 5 à 1 qui se trouvent au sud du côté fondamental le plus méridional, TASCHBUNAR II — KATLABUCH. Le calcul d'une telle suite de triangles sera plus simple, vu qu'ils dépendent de la valeur définitive du côté fondamental voisin, sans être sujets à une autre compensation des angles que celle qui produit, dans chaque triangle à part, la somme des trois angles égale à $180^\circ +$ l'excès.

§ 30. Résumé des tableaux à former. Déduction des angles primitifs, des journaux d'observation.

Il s'agit maintenant de composer les tableaux numériques des triangles des différentes classes, savoir :

- A. des triangles de *rattachement* ;
- B. des *polygones* formés autour des trois stations
centrales indiquées p. 89. 4 ;
- C. des triangles de continuation *principaux* ;
- D. des triangles de continuation *excédants* ;
- E. des triangles *auxiliaires*.

Ces tableaux doivent contenir en premier lieu, les valeurs primitives des angles, c. à d. les angles tels qu'ils se déduisent des journaux d'observation, après avoir appliqué les différentes réductions au centre.

Dans la mesure des angles de l'arc Baltique, l'instrument a eu toujours une position excentrique, le plus souvent de quelques toises. Par ce moyen, l'observation se faisait sans être gênée par la charpente du signal, et l'instrument une fois établi pouvait rester en place, sous sa tente à double toit, pendant un séjour même prolongé sur la station. La mesure excentrique présentait encore un autre avantage précieux, c'est que, par suite des réductions considérables pour toutes les directions observées, elle mettait à l'abri de toute préoccupation sur l'accord des trois angles obtenus. Je dois mentionner ici exprès, que l'opération géodésique, depuis HOGLAND jusqu'à JACONSTADT, a été achevée, sans qu'un seul triangle ait été calculé. N'ayant jamais observé que par de bonnes images des objets à pointer, et ayant évalué les distances et les directions qui servent à trouver les réductions au centre, relatives soit au lieu de l'instrument, soit à la position de l'objet pointé: j'eus la parfaite conviction que l'accord de la somme des trois angles avec 180° + l'excès, devait devenir celui qu'admettait et la perfection de l'instrument et la nature de l'opération, et que cet accord conduirait à une connaissance incontestable du degré de précision, atteint dans la mesure des angles. Sur le petit nombre d'édifices qui servaient de station, p. 9, la distance de l'instrument I au centre de la station C n'était qu'une fraction de toise. Dans les stations désignées par des signaux, l'excentricité de l'instrument variait d'ordinaire de 2 à 4 toises, mais elle a été quelquefois de 10 à 20 toises, et même une fois, à KENSEL, de près de 90 toises *). Une excentricité IC de 3 toises, dans une direction perpendiculaire à celle de l'objet et pour une longueur moyenne du côté de 14400 toises, p. 9, produit une réduction de $43''$. Les angles directement mesurés sont par conséquent sujets à des corrections de cet ordre, et à KENSEL une des corrections s'élevait même à $9' 55''78$. Il est clair que pour calculer de telles corrections avec une exactitude suffisante, la distance IC et l'angle de position en I , entre C et l'objet, devaient être très-exactement déterminés. Aussi ai-je porté sur cette partie de l'opération un soin tellement scrupuleux, qu'il me mettait à l'abri de toute incertitude. Le second volume de mon ouvrage, *Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen*, publié en 1831, contient le journal complet des mesures angulaires, exécutées sur les différentes stations, avec tous les éléments relatifs aux différents calculs de réduction au centre. Le vol. I présente p. 118 à 137 les chiffres de réduction pour toutes les stations, et les angles réduits au centre, obtenus dans les différentes mises, enfin

*) Un groupe de sapins très-élevés et qui était inaccessible parce qu'il se trouvait au milieu d'une vaste forêt, coupait la ligne de KENSEL à ANKONOF. J'aurais pu gagner la vue libre en élevant l'instrument à la hauteur de 4 toises du sol. Mais je préférerais tourner le groupe en éloignant l'instrument jusqu'à la dite distance de 90 toises du centre du signal.

la valeur moyenne de chaque angle. Ces moyennes ont servi à la composition du tableau des triangles, p. 140 à 146 de l'ouvrage cité, dans lequel la colonne qui porte l'inscription *angles observés (beobachtete Winkel)* présente les éléments angulaires primitifs de mes 33 triangles. Dans les tableaux que je donnerai ci-après, ces angles ont été retenus sans aucun changement.

Quant aux angles déterminés sous la direction de M. de Tenner, ils ont été observés, en majeure partie, du centre de la station; mais un soin minutieux a été employé soit pour contrôler la position de l'instrument, dans la verticale du centre couché dans le terrain, soit pour déterminer la petite déviation de l'instrument, si elle avait lieu, et celle qui se trouvait quelquefois dans la position du sommet du signal qui formait le point de mire. Les petites corrections à appliquer, dans ces cas exceptionnels, aux angles directement observés ont été calculées, par M. de Tenner, avec le plus grand soin, et sont par conséquent parfaitement exactes. Les détails des mesures angulaires de M. de Tenner se trouvent consignés, pour les triangles de Lithuanie, *Zanucku* vol. VIII p. 401 à 524. Le vol. XII des *Zanucku*, section II, contient la relation complète des opérations géodésiques de Volynie et de Podolie, mais sans contenir les détails de la base de STARO-KONSTANTINOW et des mesures angulaires. J'ai cependant pu consulter ces détails dans les manuscrits complètement rédigés des dites opérations et qui sont conservés à l'archive du Dépôt-topographique de l'État-major Impérial, en deux volumes in-folio cotés numéro 41795. Les mêmes détails se trouvent, pour les opérations de Bessarabie, dans deux autres volumes manuscrits in-fol., lesquels seront incessamment publiés dans le prochain volume des *Zanucku*. M. de Tenner a désigné les différents triangles de ses travaux géodésiques par des numéros successifs. Les triangles T. 1 à 61 présentent les triangles de Lithuanie, *Zanucku* VIII p. 541 à 558. Les T. 252 à 291, *Zanucku* XII, sect. II, p. 44 à 57, contiennent les triangles de Volynie et de Podolie qui appartiennent à la mesure de l'arc du méridien. Enfin les T. 453 à 505 appartiennent à l'arc de Bessarabie.

Le calcul des observations originales, pour parvenir aux différents tableaux de triangles, a été fait par M. de Tenner avec un tel soin et une si parfaite circonspection, que j'ai directement adopté les valeurs des angles primitifs qu'il a consignées dans ses tableaux, à l'exception d'un très-petit nombre d'angles dans lesquels les chiffres que j'ai choisis, diffèrent tant soit peu de ceux que contiennent les tableaux de M. de Tenner.

Il y a quelques angles, mesurés en différentes années chaque fois par un grand nombre de répétitions. Dans ces cas, M. de Tenner a réuni les deux valeurs à une moyenne, eu égard aux nombres de répétitions. J'ai préféré de prendre la moyenne des deux valeurs trouvées, sans considérer le nombre relatif des répétitions, vu que les circonstances extérieures agissent d'avantage sur chaque valeur que le nombre

des répétitions. Voici la comparaison des quatre angles, donnés par Tenner, avec les valeurs que j'ai adoptées. Je ne donne que les secondes :

Triangle.	Station.	Angle du tableau de Tenner.	Angle adopté par Struve.	Nombre des répétitions des deux années.	Différence.
T. 29	LOITZI . . .	42,06	41,98	40 et 60	— 0,08
T. 30	MEDNIKI . .	15,92	15,96	40 44	+ 0,04
T. 271	SSIWKI . . .	42,38	42,36	40 60	— 0,02
T. 273	SSIWKI . . .	10,59	10,56	80 100	— 0,03

Les différences sont toutes en dedans de 0,1, donc entièrement insignifiantes.

Les six angles suivants présentent des différences plus considérables, par une raison tout à fait autre que dans les angles précédents.

Triangle.	Station.	Angle Tenner.	Angle adopté par Struve.	Différence.
T. 503	BORSKA	8,99	8,66	— 0,33
T. 504	ISMAIL	58,84	58,21	— 0,63
	SSOFIANOWKA	40,28	38,34	— 1,94
	BORSKA	21,38	20,64	— 0,74
T. 505	ISMAIL	16,14	15,42	— 0,72
	SSOFIANOWKA	35,85	34,97	— 0,88

Ces angles appartiennent aux trois triangles de Bessarabie les plus méridionaux. Les angles de Bessarabie ont été mesurés à l'aide de l'excellent théodolite de Reichenbach, par l'observation régulière de 12 mises distantes de 7,5 sur le limbe. Or l'inspection des journaux m'indiquait que pour les angles cités ici, l'observateur M. Dorofejew s'était écarté de la stricte règle des 12 mises et qu'il avait ajouté un nombre considérable de mises supplémentaires, sans indiquer la raison qui l'avait engagé à cette irrégularité. J'ai aisément compris cette raison. L'observateur ayant fait la somme des trois angles et remarquant que, dans deux des triangles, T. 504 et T. 505, elle s'écartait de 180° + l'excès plus fortement que dans les autres triangles, crut devoir ajouter de nouvelles suites d'observations, afin de produire un meilleur accord.

Un tel accord forcé étant entièrement illusoire et au détriment de l'opération, j'ai rejeté toutes ces mises supplémentaires, et j'ai adopté les angles tels qu'ils se déduisent des 12 mises primitives, observées sans préoccupation. Aussi les erreurs dans la somme des trois angles, que présentent les angles que j'ai adoptés, savoir 2",98 et 2",62, n'ont-elles rien d'extraordinaire, quoiqu'elles fussent bien plus fortes que celles du tableau de M. Tenner, 0",33 et 1",02.

Les angles primitifs et les valeurs définitives des différentes bases, p. 76, présentent les données de départ complètes, pour la résolution numérique des triangles, l'excès sphérique de chaque triangle étant donné.

Dans le calcul des triangles, les tables trigon.-logar. à sept places décimales de Bagay et de Taylor ont été employées, en contrôlant chaque chiffre tiré d'une de ces tables par l'inspection de l'autre table *). Dans le courant du calcul, la huitième décimale de chaque chiffre a été retenue telle qu'elle se trouvait par l'interpolation, ce qui augmente considérablement l'exactitude du calcul continué par une suite de triangles. L'emploi de tables de plus de 7 décimales m'a paru inutile, par la considération suivante. L'erreur probable d'un logarithme donné immédiatement dans les tables est 0,25 de la septième décimale, l'erreur probable d'un log. déduit par l'interpolation entre deux chiffres tabulaires n'est que $\sqrt{\frac{1}{3}}$ de l'autre erreur ou de 0,20 unité de la septième décimale. A cette incertitude correspond une erreur probable du nombre naturel de $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \mu = 0,046 \mu$ ou d'un vingt-deux-millionième. Mais nos bases ne sont exactes que tout au plus à un millionième, p. 76. Pour un angle primitif de 60° , l'erreur probable, dans les triangles Baltiques qui sont les plus exacts, étant $\omega = 0",387$, § 42, nous avons, avec $\gamma = 12,15$, p. 2, l'erreur probable du $\log. \sin 60^\circ = 4,70$ unités de la septième décimale, qui est 23 fois plus forte que l'erreur engendrée par les tables. Les tables à sept décimales, en donnant ainsi des éléments de calcul entre 20 et 30 fois plus certains, que les autres éléments de calcul tirés des observations, sont par conséquent entièrement suffisantes pour la résolution des triangles. Une objection contre ce raisonnement, puisée dans l'accumulation des erreurs, n'est point valable, vu que les erreurs produites par les chiffres données par l'observation s'accumulent, dans le progrès du calcul, d'une manière analogue, mais toujours à un montant bien des fois plus fort que celui des erreurs tabulaires.

Le calcul des côtés a été fait partout à l'aide du théorème de Legendre.

*) Dans ces comparaisons j'ai rencontré, parmi près de 550 différents $\lg \sin$, 6 fois une différence d'une unité de la dernière place dans les tables des deux auteurs. Un examen fait à l'aide des tables à 10 décimales de Vega a montré que la dernière place qu'avait donnée Taylor était exacte, celle de Bagay étant en défaut.

§ 31. Tableau A. Triangles de rattachement entre les bases et les côtés fondamentaux des triangles de continuation. Valeurs des 6 côtés fondamentaux.

Il y aura ici 6 systèmes partiels, relatifs aux 6 bases mesurées. A la tête de chaque système seront placés : la valeur numérique K de la base et le $\log K$, avec leurs erreurs probables, enfin le carré E de l'erreur moyenne du $\log K$.

Voici l'explication des 6 colonnes verticales du tableau.

1. *La première colonne* porte l'inscription *Renvoi*. Elle indique comment ce triangle a été désigné et où il se trouve dans les ouvrages, publiés antérieurement, qui contiennent les matériaux de nos opérations. C'est ainsi que le premier des triangles *A. I* a le renvoi *St. 1 Gr. I. p. 140*, ce qui signifie que c'est le premier des triangles de Struve, publiés dans l'ouvrage *Gradmessung*, où il se trouve Vol. I. p. 140. Le premier des triangles *A. II* est indiqué comme *T. 1, c. à d.* il porte le numero 1 de Tenner, et se trouve dans le Volume VIII des *Zanucku* p. 541. Les triangles *T. 453* et suivants, faisant partie des opérations de Bessarabie, dont la relation détaillée n'est pas encore imprimée, sont cités par le renvoi *Bess. man., c. à d.*, manuscrit des opérations de Bessarabie.
2. *La seconde colonne* donne les noms des trois stations du triangle. L'ordre des trois stations est de sorte que la première station est opposée au côté donné, soit comme base mesurée, soit par le triangle précédent, et que la troisième est opposée au côté qui fait le côté de départ dans le triangle suivant.
3. *La troisième colonne* présente les angles observés aux stations qui sont sur la même ligne. Ce sont des angles corrigés déjà pour les différentes réductions au centre. Cette même colonne donne la somme des trois angles, et la correction de cette somme pour devenir égale à $180^\circ +$ l'excès.
4. *La quatrième colonne* contient les angles du triangle plan correspondant, ou les angles réduits à la somme de $180^\circ 0' 0''$, et qui ont été obtenus en retranchant de chaque angle observé un tiers de la somme des trois angles observés moins $180^\circ 0' 0''$. Ces angles plans servent au calcul des côtés à l'aide du théorème de Legendre. Dans cette colonne l'excès est placé.
5. *La cinquième colonne* donne les logarithmes des côtés opposés aux angles qui sont placés sur la même ligne horizontale. Ce sont les logarithmes des côtés exprimés en toises.
6. *La sixième colonne*, avec l'inscription *quantités auxiliaires*, contient les $\mathfrak{S} = \frac{1}{3}(\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2)$; voir p. 4, puis le Ω de chaque triangle, Ω désignant le carré de l'erreur moyenne d'un

angle primitif. Voyez l'article sur l'exactitude des mesures angulaires, § 42. Elle donne enfin

$\epsilon = \Omega = \mathfrak{I}$, ou le carré de l'erreur moyenne que produit ce triangle dans la valeur de son $\lg \frac{b}{c}$.

Dans les triangles T 453, 454 du système V et T 496 et 497 du système VI, les colonnes ont, en partie, changé de contenu, mais ce changement se comprend par les inscriptions données.

Système I du tableau A.

TRIANGLES QUI RATTACHENT LA BASE DE SIMONIS AU CÔTÉ FONDAMENTAL TAMMIK-ËDDAFER. PLANCHE X.

La longueur définitive de la base de SIMONIS, entre ses termes KATKO et WOIBIFER, et réduite au niveau de la mer est, p. 76 :

$$K' = 2315,13307 \mp 0,00187 \text{ toises; } \lg K' = 3,3645759.6 \mp 3.5; E' = 26,9.$$

Renvoi.	Stations.	Angles		Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
		observés.	réduits à 180° 0' 0".		
St. 1. <i>Gradm. I. p. 140.</i>	TAMMIK	34° 50' 10,75	10,89	3,3645759.6	$\epsilon = 816,7$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 268,7$
	WOIBIFER	76 8 8,51	8,65	3,5949208.6	
	KATKO	69 1 40,32	40,46	3,5779943.8	
	Somme	180 0 — 0,42	0,00		
	Corr. + 0,50	0,082	Excès.		
St. 2. <i>Gradm. I. p. 140.</i>	RAKKE	45 6 42,15	41,67	3,5779943.8	Pour la diagonale des tr. St. 2 et 3. $\epsilon = 528,1$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 173,7$
	WOIBIFER	27 29 29,92	29,44	3,3919472.7	
	TAMMIK	107 23 49,38	48,89	3,7073304.0	
	Somme	180 0 1,45	0,00		
	Corr. — 1,36	0,086	Excès.		
St. 3. <i>Gradm. I. p. 140.</i>	ËDDAFER	43 34 48,07	47,83	3,7073304.0	$\epsilon = 528,1$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 173,7$
	RAKKE	35 54 11,99	11,75	3,6370881.3	
	WOIBIFER	100 31 0,65	0,42	3,8615229.9	
	Somme	180 0 0,71	0,00		
	Corr. — 0,50	0,209	Excès.		

La diagonale du quadrilatère formé par les deux triangles St. 2 et 3 est le côté fondamental cherché. Cette diagonale fait deux triangles avec les stations WOIBIFER et RAKKE, dans lesquels l'excès sphérique est

0,124 et 0,170. Avec ces données, ces deux triangles conduisent, chacun par deux côtés et l'angle compris, à la valeur identique

$$\begin{aligned} \text{TAMMIK — EDDAFER, } L' &= 7302,7975 \mp 0,0246 \text{ toises} \\ \lg L' &= 3,8634892.6 \mp 14.6. \end{aligned}$$

La somme des trois carrés partiels, $E' = 26,9$ pour la mesure de la base, et des deux $\mathfrak{I} = 268,7$ et $\mathfrak{I} = 173,7$ pour la mesure des angles, donne le carré de l'err. moy. en $\lg L'$, $F' = 469,3$.

NB. La base de PONEDELI étant elle-même un côté d'un triangle de continuation, il n'y a point de triangles de rattachement pour cette base.

Système III du tableau A.

TRIANGLES DE RATTACHEMENT ENTRE LA BASE D'OSSOWNITZA ET LE CÔTÉ FONDAMENTAL

OSSOWNITZA — LESKOWITSCHI. PLANCHE VI.

La longueur définitive de la base d'Ossownitza entre ses termes Ossownitza et Tschekuzk. réduite au niveau de la mer est, p. 76 :

$$K''' = 5719,64316 \mp 0,01773 \text{ toises; } \lg K''' = 3,7573689.3 \mp 13.5; \quad E''' = 396.6.$$

Renvoi.	Stations.	Angles		Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
		observés	réduits à 180° 0' 0".		
T. 1. <i>Jan. VIII. p. 541.</i>	OPOL	43° 45' 58,91	58,64	3,7573689.3	$\mathfrak{E} = 439,6$ $\Omega = 1,335$ $\mathfrak{I} = 586,9$
	OSSOWNITZA	62 43 7,19	6,92	3,8662270.3	
	TSCHEKUZK	73 30 54,72	54,44	3,8992105.3	
	Somme	180 0 0,82	0,00		
		Corr. — 0,43	0,387 Exc.		
T. 2. <i>Jan. VIII. p. 541.</i>	LESKOWITSCHI	51 41 29,58	28,61	3,8992105.3	$\mathfrak{E} = 568,2$ $\Omega = 1,335$ $\mathfrak{I} = 758,5$
	OSSOWNITZA	77 21 12,02	11,06	3,9938499.3	
	OPOL	50 57 21,30	20,33	3,8947469.5	
	Somme	180 0 2,90	0,00		
		Corr. — 2,32	0,584 Exc.		

Le dernier logarithme du triangle T. 2 donne le côté fondamental

$$\text{OSSOWNITZA — LESKOWITSCHI, } L''' = 7847,7824 \mp 0,0509 \text{ toises}$$

$$\lg L''' = 3,8947469.5 \mp 28.2.$$

$$\text{Carré de l'err. moy. en } \lg L''': \quad F''' = 396,6 + 586,9 + 758,5 = 1742,0.$$

Système IV du tableau A.

TRIANGLES DE RATTACHEMENT ENTRE LA BASE DE STARO-KONSTANTINOW ET LE CÔTÉ FONDAMENTAL

MONTSCHINZI—KATERINOWKA. PLANCHE IV.

La longueur définitive de la base de STARO-KONSTANTINOW, entre ses termes KUSMIN et POGARELAJA, réduite au niveau de la mer est, p. 76 :

$$K''' = 4563,97153 \mp 0,01438 \text{ toises; } \lg K''' = 3,6593429.3 \mp 13.7; \quad E''' = 410,4.$$

Renvoi.	Stations.	Angles		Log. des côtés.	Quantités auxiliaires
		observés.	réduits à 180° 0' 0".		
T. 276. <i>Jan. XII. p. 354.</i>	STARO-KONSTANTINOW	49° 37' 38,72	38,58	3,6593429.3	$\mathcal{S} = 195,3$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 309,1$
	KUSMIN.....	35 46 22,61	22,47	3,5443141.5	
	POGARELAJA.....	94 35 59,10	58,95	3,7760736.0	
	Somme	180 0 0,43	0,00		
	Corr. — 0,28	0,153	Exc.		
T. 277. <i>Jan. XII. p. 355.</i>	WOLIZAKEREKESCHINA.	45 55 32,99	33,36	3,7760736.0	$\mathcal{S} = 269,6$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 426,8$
	KUSMIN.....	42 31 56,58	56,95	3,7496342.6	
	STARO-KONSTANTINOW	91 32 29,32	29,69	3,9195251.8	
	Somme	180 0 — 1,11	0,00		
	Corr. + 1,43	0,323	Exc.		
T. 278. <i>Jan. XII. p. 355.</i>	WERBORODINZI.....	49 46 33,16	32,70	3,9195251.8	$\mathcal{S} = 279,8$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 442,9$
	WOLIZAKEREKESCHINA.	52 28 49,15	48,69	3,9360546.2	
	KUSMIN.....	77 44 39,08	38,61	4,0266907.2	
	Somme	180 0 1,39	0,00		
	Corr. — 0,72	0,674	Exc.		
T. 279. <i>Jan. XII. p. 355.</i>	SAPADINZI.....	49 19 39,98	39,51	4,0266907.2	$\mathcal{S} = 298,0$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 471,7$
	WOLIZAKEREKESCHINA.	54 23 53,99	53,52	4,0568989.8	
	WERBORODINZI.....	76 16 27,43	26,97	4,1341813.8	
	Somme	180 0 1,40	0,00		
	Corr. — 0,27	1,133	Exc.		
T. 280. <i>Jan. XII. p. 355.</i>	MONTSCHINZI.....	64 56 47,07	46,61	4,1341813.8	$\mathcal{S} = 396,1$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 627,1$
	SAPADINZI.....	65 26 37,58	37,12	4,1359237.8	
	WOLIZAKEREKESCHINA.	49 36 36,73	36,27	4,0588525.3	
	Somme	180 0 1,38	0,00		
	Corr. — 0,01	1,366	Exc.		
T. 281. <i>Jan. XII. p. 356.</i>	KATERINOWKA.....	67 13 4,34	4,39	4,0588525.3	$\mathcal{S} = 359,3$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 568,8$
	MONTSCHINZI.....	62 29 59,59	59,63	4,0420575.7	
	SAPADINZI.....	50 16 55,94	55,98	3,9801690.5	
	Somme	180 0 — 0,13	0,00		
	Corr. + 1,06	0,934	Exc.		

Le dernier logarithme du triangle T. 281 donne le côté fondamental

MONTSCHINZI — KATERINOWKA, $L'' = 9553,6440 \mp 0,0844$ toises.

$\lg L'' = 3,9801690,5 \mp 38,5$.

Carré de l'err. moy. en $\lg L''$: $F'' = 410,4 + 309,1 + 426,8 + 442,9 + 471,7 + 627,1 + 568,8 = 3256,8$.

Système V du tableau A.

TRIANGLES DE RATTACHEMENT ENTRE LA BASE DE ROMANKAUTZI ET LE CÔTÉ FONDAMENTAL

GWOSDAUTZI — BRITSCHANI. PLANCHE IV.

Dans les triangles de continuation de M. de Tenner, il n'existe point de diagonales observées. Mais nous rencontrons de ces diagonales, dans les deux opérations de rattachement entre les deux bases mesurées en Bessarabie et les triangles de continuation. Chacune de ces deux bases est la diagonale d'un quadrilatère dont l'autre diagonale donne le côté c du triangle suivant. Sur chacune des 4 stations du quadrilatère, les directions des trois autres signaux ayant été observées, nous avons plus de données que le nombre des angles indispensables pour la résolution de la figure. Or il est clair que toutes les directions observées doivent être regardées comme données primitives pour le calcul de compensation à faire sur le quadrilatère plus que déterminé. Les méthodes du calcul de compensation, d'après le principe des moindres carrés, étant connues par les préceptes qu'ont donnés Gauss et Bessel, je donnerai d'abord les directions primitivement observées que j'ai puisées dans les journaux des opérations de Bessarabie, et puis les résultats du calcul de compensation.

Directions observées et corrections.

A côté des directions observées se trouvent les corrections, à porter sur les directions primitives. qu'à fournies le calcul de compensation.

1. ROMANKAUTZI.				2. SSELISCHTSCHIE.			
	Obs.		Corr.		Obs.		Corr.
GRUBNI	0° 0' 0,000		+ 0,365	TSCHUBUTINZI	0° 0' 0,000		+ 0,293
SSELISCHTSCHIE	58 32 26,290		— 0,080	ROMANKAUTZI	33 57 3,189		— 0,136
TSCHUBUTINZI	132 29 5,148		— 0,285	GRUBNI	102 40 5,070		— 0,158
3. TSCHUBUTINZI.				4. GRUBNI.			
ROMANKAUTZI	0 0 0,000		+ 0,431	SSELISCHTSCHIE	0 0 0,000		+ 0,290
GRUBNI	32 4 36,121		— 0,346	TSCHUBUTINZI	37 18 12,720		— 0,253
SSELISCHTSCHIE	72 6 19,150		— 0,085	ROMANKAUTZI	52 44 32,704		— 0,037

La longueur définitive de la base de ROMANKAUTZI, entre ses termes ROMANKAUTZI et SSELISCHTSCHÉ, réduite au niveau de la mer est, p. 76 :

$$K' = 2910,09451 \mp 0,00309 \text{ toises ; } \lg K' = 3,4639070.9 \mp 4.6 ; E' = 47,1.$$

Les deux triangles suivants se forment à l'aide des directions soit primitives soit corrigées.

Revoi.	Stations.	Angles observés.	Angles sphériques compensés.	Angles plans compensés.	Log. des côtés.
T. 453. Manusc. Bess.	TSCHUBUTINZI	72° 6' 19,15	18,634	18,618	3,4639070.9
	SSELISCHTSCHÉ	33 57 3,19	2,760	2,745	3,2324503.7
	ROMANKAUTZI	73 56 38,86	38,653	38,637	3,4681624.4
	Somme	180 0 1,20	0,047	0,000	
		Corr. — 1,15	0,046	Exc.	
T. 454. Manusc. Bess.	GRUBNI	52 44 32,70	32,377	32,350	3,4639070.9
	SSELISCHTSCHÉ	68 43 1,88	1,859	1,832	3,5323600.0
	ROMANKAUTZI	58 32 26,29	25,845	25,818	3,4939909.9
	Somme	180 0 0,87	0,081	0,000	
		Corr. — 0,79	0,082	Exc.	

La diagonale du quadrilatère formé par les deux triangles T. 453 et 454 est le côté c = GRUBNI—TSCHUBUTINZI du triangle voisin. Cette diagonale fait avec les deux stations SSELISCHTSCHÉ et ROMANKAUTZI deux triangles, dans lesquels l'excès sphérique est 0,086 et 0,042. Avec ces données les deux triangles conduisent, chacun par deux côtés et l'angle compris, à la valeur identique

$$\lg \text{GRUBNI—TSCHUBUTINZI} = 3,6749618.5 = \lg c.$$

L'opération de compensation conduit en même temps à la connaissance de l'exactitude de ce logarithme, en tant qu'il dépend de l'exactitude des mesures angulaires. En désignant par σ l'erreur moyenne d'une direction, le carré de l'erreur moyenne en $\lg c$ se trouve = $337,5\sigma^2$, = $\frac{337,5}{2}\Omega$. Pour les triangles de Bessarabie Ω étant = 1,050, § 42, nous obtenons

$$\mathfrak{E} = 177,2 \text{ pour le } \lg c = 3,6749618.5.$$

Renvoi.	Stations.	Angles		Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
		observés.	réduits à 180° 0' 0".		
T. 457. Manusc. Bess.	GWOSDAUTZI	37° 23' 0",64	0",31	3,6749618.5	$\sigma = 491,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{L} = 515,8$
	GRUBNI	50 17 16,94	16,61	3,7777448.2	
	TSCHURUTINZI	92 19 43,42	43,08	3,8913099.7	
	Somme	180 0 1,00	0,00		
		Corr. — 0,73	0,273 Exc.		
T. 458. Manusc. Bess.	BRITSCHANI	58 33 11,79	11,74	3,8913099.7	$\sigma = 187,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{L} = 196,6$
	GWOSDAUTZI	47 32 55,52	55,47	3,8282661.5	
	GRUBNI	73 53 52,83	52,79	3,9429161.8	
	Somme	180 0 0,14	0,00		
		Corr. + 0,34	0,485 Exc.		

Le dernier logarithme du triangle T. 458 donne le côté fondamental

$$\text{GWOSDAUTZI} - \text{BRITSCHANI}, L'' = 8768,3158 \mp 0,0417 \text{ toises}$$

$$\lg L'' = 3,9429161.8 \mp 20.6.$$

$$\text{Carré de l'err. moy. en } \lg L'' : F'' = 47,1 + 177,2 + 515,8 + 196,6 = 936,7.$$

Système VI du tableau A.

TRIANGLES DE RATTACHEMENT ENTRE LA BASE DE TASCHEUNAR ET LE CÔTÉ FONDAMENTAL

TASCHEUNAR II — KATLABUCH. PLANCHE II.

Directions observées et corrections.

1. TASCHEUNAR I.

	Obs.	Corr.
TASCHEUNAR II	0° 0' 0",000	— 0",025
WAISSAL	58 35 44,192	+ 0,024
KATLABUCH	124 40 30,770	+ 0,001

2. WAISSAL.

	Obs.	Corr.
KATLABUCH	0° 0' 0",000	— 0",195
TASCHEUNAR I	61 8 55,885	+ 0,036
TASCHEUNAR II	107 24 51,031	+ 0,159

3. TASCHEUNAR II.

WAISSAL	0 0 0,000	— 0,208
KATLABUCH	41 45 57,214	+ 0,233
TASCHEUNAR I	75 8 20,354	— 0,025

4. KATLABUCH.

TASCHEUNAR I	0 0 0,000	— 0,070
TASCHEUNAR II	21 57 6,375	— 0,071
WAISSAL	52 46 17,192	+ 0,142

La longueur définitive de la base de TASCHEUNAR, entre ses termes TASCHEUNAR I et WAISSAL, réduite au niveau de la mer est, p. 76 :

$$K'' = 2770,24614 \mp 0,00274 \text{ toises; } \lg K'' = 3,4425183.6 \mp 4.3; E'' = 40,6.$$

Les directions donnent les triangles suivants.

Renoi.	Stations.	Angles observés.	Angles sphériques compensés.	Angles plans compensés.	Log. des côtés.
T. 496. Manusc. Bess.	TASCHEUNAR II	75° 8' 20,35	20,537	20,521	3,4425183.6
	WAISSAL	46 15 55,15	55,269	55,254	3,3161609.6
	TASCHEUNAR I	58 35 44,19	44,241	44,225	3,3885026.4
	Somme	180 0—0,31	0,047	0,000	
		Corr. +0,36	0,047 Exc.		
T. 497. Manusc. Bess.	KATLABUCH	52 46 17,19	17,404	17,379	3,4425183.6
	WAISSAL	61 8 55,89	56,116	56,091	3,4839233.6
	TASCHEUNAR I	66 4 46,58	46,555	46,530	3,5034786.3
	Somme	180 0—0,34	0,075	0,000	
		Corr. +0,42	0,075 Exc.		

La diagonale du quadrilatère formé par les triangles T. 496 et 497 est le côté fondamental cherché. Cette diagonale fait deux triangles avec les stations WAISSAL et TASCHEUNAR I, dans lesquels les excès sont 0,072 et 0,050. Avec cela ces deux triangles conduisent, chacun par deux côtés et l'angle compris, à la valeur identique

$$\text{TASCHEUNAR II — KATLABUCH, } L'' = 4555,8509 \mp 0,0107 \text{ toises}$$

$$\lg L'' = 3,6585695.0 \mp 10.2.$$

Le carré de l'erreur moyenne dans la diagonale ayant été trouvé, par le calcul de compensation, $= 352,7 \text{ m}^2 = 176,35 \Omega = 185,2$, Ω étant $= 1,050$, § 42, nous avons :

le carré de l'err. moy. en $\lg L''$:

$$E'' = 40,6 + 185,2 = 225,8.$$

Valeurs définitives des six côtés fondamentaux des triangles de continuation.

Triangles.	Côtés fondamentaux.	Toises.	Err. pr.	Err. pr.	Carré de l'erreur moyenne en lg L.
No. 149 et 150	{ TAMMIK EDNAFER	$L' = 7302,7975 \mp 0,0246$	$\lg L' = 3,8634892.6 \mp 14.6$	$F' = 469,3$	
No. 117.	{ PONEDELI JAKSICITI	$L'' = 6055,1623 \mp 0,0192$	$\lg L'' = 3,7821257.9 \mp 13.8$	$F'' = 418,7$	
No. 79.	{ OSSOWNITZA LESKOWITSCHI	$L''' = 7847,7824 \mp 0,0509$	$\lg L''' = 3,8947469.5 \mp 28.2$	$F''' = 1742,0$	
No. 53.	{ MONTSCHINZI KATERINOWKA	$L'' = 9553,6440 \mp 0,0844$	$\lg L'' = 3,9801690.5 \mp 38.5$	$F'' = 3256,8$	
No. 40 et 41.	{ GWOSDAUTZI DRITSCHANI	$L' = 8768,3158 \mp 0,0417$	$\lg L' = 3,9429161.8 \mp 20.6$	$F' = 936,7$	
No. 6.	{ TASCHUNAR II KATLADUCH	$L'' = 4555,8509 \mp 0,0107$	$\lg L'' = 3,6585695.0 \mp 10.2$	$F'' = 225,8$	

§ 32. Analyse de la compensation des angles dans un polygone formé autour d'un point central.

Désignons dans un tel polygone sphérique, composé de n triangles dont les excès $\epsilon', \epsilon'', \dots, \epsilon^n$ sont connus, les angles sphériques observés :

avec les poids

centraux par A' A'' h' h''

de la périphérie par $B' C'$ $B'' C''$ i', k' i'', k''

Mettons : $A' = A' - \frac{1}{3}\epsilon'$, $B' = B' - \frac{1}{3}\epsilon'$, $C' = C' - \frac{1}{3}\epsilon'$; $A'' = A'' - \frac{1}{3}\epsilon''$,

$180^\circ - (A' + B' + C') = f'$; $180^\circ - (A'' + B'' + C'') = f'', \dots$

En employant les crochets [] pour indiquer la somme des quantités analogues, désignées par les différents indices i, ii, \dots , soit

$$[A] - 360^\circ = v$$

$$[\lg \sin C] - [\lg \sin B] = t.$$

Nommons enfin :

pour les angles A', B', C' ; A'', B'', C'' ;
 les corrections cherchées x', y', z' ; x'', y'', z'' ;
 avec $x' + y' + z' = f'$; $x'' + y'' + z'' = f''$;
 les changements des
 lg sin pour $+ 1''$: α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$;

Avec ces dénominations nous aurons à satisfaire dans notre problème aux trois conditions :

$$[\beta y - \gamma z] = t ; [x] = -v ; [hx^2 + iy^2 + kz^2] = \text{minimum.}$$

Pour le cas de poids égaux nous aurons, en remplaçant encore x par $f - (y + z)$:

$$[\beta y - \gamma z] = t \tag{1}$$

$$[y + z] = [f] + v \tag{2}$$

$$[y^2 + z^2 + (y + z - f)^2] = \text{minimum ;} \tag{3}$$

et en prenant les différentielles de (1) et (2) :

$$\beta' dy' - \gamma' dz' + \beta'' dy'' - \gamma'' dz'' + \dots = 0 \tag{4}$$

$$dy' + dz' + dy'' + dz'' + \dots = 0. \tag{5}$$

En multipliant maintenant (4) par le coefficient $3P$, et (5) par $3Q$, et en additionnant les deux produits, nous trouvons :

$$(3Q + 3\beta'P) dy' + (3Q - 3\gamma'P) dz' + \dots = 0. \tag{6}$$

Mais (3) nous donne :

$$(2y' + z' - f') dy' + (y' + 2z' - f'') dz' + \dots = 0. \tag{7}$$

La comparaison des expressions (6) et (7) conduit aux équations que voici :

$$2y' + z' - f' = 3Q + 3\beta'P ; 2y'' + z'' - f'' = 3Q + 3\beta''P ; \dots$$

$$y' + 2z' - f' = 3Q - 3\gamma'P ; y'' + 2z'' - f'' = 3Q - 3\gamma''P ; \dots$$

d'où se déduit :

$$y' = \frac{1}{3}f' + Q + (2\beta' + \gamma')P ; y'' = \frac{1}{3}f'' + Q + (2\beta'' + \gamma'')P ; \dots \tag{8}$$

$$z' = \frac{1}{3}f' + Q - (\beta' + 2\gamma')P ; z'' = \frac{1}{3}f'' + Q - (\beta'' + 2\gamma'')P ; \dots \tag{9}$$

$$\text{donc : } x' = \frac{1}{3}f' - 2Q - (\beta' - \gamma')P ; x'' = \frac{1}{3}f'' - 2Q - (\beta'' - \gamma'')P ; \dots \tag{10}$$

La substitution des valeurs (8) et (9) dans (1) et (2) change ces deux équations en :

$$[\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2]P + [\beta - \gamma]Q = t - \frac{1}{3}[(\beta - \gamma)f] \tag{11}$$

$$[\beta - \gamma]P + 2nQ = \frac{1}{3}[f] + v. \tag{12}$$

Les valeurs de P et Q que donnent ces équations, après avoir été introduites dans les expressions (8) (9) (10), conduisent aux déterminations finales de tous les x, y, z .

On parvient à une simplification du procédé, en partant non pas des angles observés mais des angles corrigés chacun du $\frac{1}{3}f$ de son triangle. En effet en mettant :

$$\bar{A} = A + \frac{1}{3}f, \quad \bar{B} = B + \frac{1}{3}f, \quad \bar{C} = C + \frac{1}{3}f$$

$$\bar{A} = A + \frac{1}{3}f, \quad \bar{B} = B + \frac{1}{3}f, \quad \bar{C} = C + \frac{1}{3}f$$

et en désignant pour

$$\bar{A} \quad \bar{B} \quad \bar{C}$$

les corrections cherchées par

$$a \quad b \quad c, \quad \text{avec } a + b + c = 0,$$

nous aurons :

$$a = x - \frac{1}{3}f, \quad b = y - \frac{1}{3}f, \quad c = z - \frac{1}{3}f.$$

Ces a, b, c se déterminent directement par les équations (8) (9) (10), à l'aide des coefficients P et Q qui se déduisent des équations (11) et (12). Mais dès que nous mettons :

$$[\bar{A}] - 360^\circ = w \quad [\lg \sin \bar{C}] - [\lg \sin \bar{B}] = u, \quad (13)$$

ayant

$$[A] - 360^\circ = v \quad [\lg \sin C] - [\lg \sin B] = t;$$

nous trouvons :

$$w = v + \frac{1}{3}[f] \quad u = t - \frac{1}{3}[(\beta - \gamma)f]$$

Voilà donc :

$$a' = -2Q - (\beta' - \gamma')P; \quad a'' = -2Q - (\beta'' - \gamma'')P \text{ etc.}$$

$$b' = +Q + (2\beta' + \gamma')P; \quad b'' = +Q + (2\beta'' + \gamma'')P \text{ »}$$

$$c' = +Q - (\beta' + 2\gamma')P; \quad c'' = +Q - (\beta'' + 2\gamma'')P \text{ » ;}$$

et pour Q et P :

$$[\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2]P + [\beta - \gamma]Q = u$$

$$[\beta - \gamma]P + 2nQ = w.$$

Mettons à présent :

$$[\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2] = p, \quad [\beta - \gamma] = q, \quad \frac{q}{2n} = \pi, \quad \frac{w}{2n} = \mu; \quad (14)$$

nous aurons :

$$P = \frac{u - \pi w}{p - 2n\pi^2} \quad Q = \mu - \pi P \quad (15)$$

et finalement

$$\left. \begin{aligned} a' &= -2\mu + (\gamma' - \beta' + 2\pi)P; & a'' &= -2\mu + (\gamma'' - \beta'' + 2\pi)P; \text{ etc. } \\ b' &= \mu + (2\beta' + \gamma' - \pi)P; & b'' &= \mu + (2\beta'' + \gamma'' - \pi)P; \text{ etc. } \\ c' &= \mu - (\beta' + 2\gamma' + \pi)P; & c'' &= \mu - (\beta'' + 2\gamma'' + \pi)P; \text{ etc. } \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\text{Somme: } a' + b' + c' = 0 \quad a'' + b'' + c'' = 0 \text{ etc.}$$

Les corrections respectives α, β, γ , ajoutées aux angles $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, fournissent maintenant les angles sphériques définitifs du polygone. Ces angles doivent jouir, par suite de leur compensation, d'une exactitude plus haute, que celle des angles compensés, dans un triangle isolé, à $180^\circ +$ l'excès. Pour ces derniers angles, Ω étant le carré de l'erreur moyenne d'un angle observé, le carré de l'erreur moyenne de l'angle compensé devient $\frac{2}{3}\Omega$. Pour les angles définitifs du polygone il se trouve :

$$\begin{array}{l} \text{pour un angle } \bar{A} + \alpha \\ \text{» » » } \bar{B} + \beta \\ \text{» » » } \bar{C} + \gamma \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{le carré de l'erreur moyenne} \\ \frac{1}{3} \left(2 - \frac{2}{n} - \frac{(2\pi + \beta - \gamma)^2}{p - \pi} \right) \Omega \\ \frac{1}{3} \left(2 - \frac{4}{2n} - \frac{(\pi + 2\beta + \gamma)^2}{p - \pi} \right) \Omega \\ \frac{1}{3} \left(2 - \frac{4}{2n} - \frac{(\pi - \beta - 2\gamma)^2}{p - \pi} \right) \Omega \end{array} \right\} (17) =$$

Dans ces expressions n, p, π, Ω restent les mêmes pour tous les triangles du polygone, tandis que β et γ se rapportent au triangle dont il y a question.

Si on calcule maintenant dans un des triangles du polygone compensé, en prenant un des trois côtés pour connu, les valeurs des deux autres côtés, nous aurons également le rapport, entre le côté donné et un côté calculé, avec plus de précision que dans un triangle isolé. Dans ce dernier, en désignant encore :

$$\frac{1}{3}(\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2) \text{ par } \mathfrak{S}, \quad \frac{1}{3}(\alpha^2 + \gamma^2 + (\alpha + \gamma)^2) \text{ par } \mathfrak{S}', \quad \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2) \text{ par } \mathfrak{S}''$$

$$\text{se trouve pour } \lg b - \lg c, \text{ le carré de l'err. moy.} = \frac{1}{3}(\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2) \Omega = \mathfrak{S} \Omega = \mathfrak{I}$$

$$\text{» » » } \lg a - \lg c \text{ » » » » » } \frac{1}{3}(\alpha^2 + \gamma^2 + (\alpha + \gamma)^2) \Omega = \mathfrak{S}' \Omega = \mathfrak{I}'$$

$$\text{» » » } \lg a - \lg b \text{ » » » » » } \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2) \Omega = \mathfrak{S}'' \Omega = \mathfrak{I}'';$$

tandis que, dans un polygone compensé, il sera :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } \lg b - \lg c, \text{ le carré de l'err. moy.} \left\{ \mathfrak{S} - \frac{(\gamma - \beta)^2}{6n} - \frac{\left(\mathfrak{S} - \frac{q}{6n}(\gamma - \beta) \right)^2}{p - \pi} \right\} \Omega = \mathfrak{U} \\ \text{» } \lg a - \lg c \text{ » » » » » } \left\{ \mathfrak{S}' - \frac{(2\alpha + \gamma)^2}{6n} - \frac{\left(\gamma^2 - \frac{1}{3}(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha) - \frac{q}{6n}(2\alpha + \gamma) \right)^2}{p - \pi} \right\} \Omega = \mathfrak{U}' \\ \text{» } \lg a - \lg b \text{ » » » » » } \left\{ \mathfrak{S}'' - \frac{(2\alpha + \beta)^2}{6n} - \frac{\left(\beta^2 - \frac{1}{3}(\gamma - \beta)(\alpha - \beta) + \frac{q}{6n}(2\alpha + \beta) \right)^2}{p - \pi} \right\} \Omega = \mathfrak{U}'' \end{array} \right\} (18)$$

Nos opérations ne présentent aucun exemple d'un polygone avec des angles de différents poids. Pour ce cas l'équation différentielle (7) se changerait en :

$$\left((i' + h')y' + h'z' - h'f' \right) dy' + \left(h'y' + (k' + h')z' - h'f' \right) dz' + \left((i'' + h'')y'' + \dots \right) dy'' + \dots = 0$$

et l'analyse continuerait comme dans l'autre cas des poids égaux.

§ 33. Tableau B. Polygones autour de stations centrales.

I. PENTAGONE ATOUR DE DABORS-KALNS. PLANCHE VIII.

(Le premier angle de chaque triangle est l'angle central ou A, le second est B, le troisième C. Voir § 32.
Pour l'explication des colonnes consultez p. 95.)

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles corrigés à 180° + l'excès.	Angles réduits à 180° 0' 0".	Angles sphériques com- pensés ou dé- finitifs.	Carres des err. moy. des angles com- pensés.
T. 59. Jan. VIII p. 557.	DABORS-KALNS.....	70° 39' 36,66	36,57	36,44	36,58	0,712
	ARHIDĀNI.....	58 24 27,76	27,67	27,55	27,60	0,796
	KREUTZBURG.....	50 55 56,22	56,13	56,01	56,19	0,785
	Somme	180 0 0,64	0,37	0,00	0,37	
		Corr. — 0,27	0,372	Exc.		
T. 60. Jan. VIII p. 558.	DABORS-KALNS.....	101 11 55,64	55,50	55,11	55,44	0,641
	KREUTZBURG.....	60 18 45,67	45,53	45,14	45,39	0,641
	GAISSA-KALNS.....	18 29 20,28	20,14	19,75	20,33	0,284
	Somme	180 0 1,59	1,17	0,000	1,16	
		Corr. — 0,43	1,161	Exc.		
T. 61. Jan. VIII p. 558.	DABORS-KALNS.....	33 49 48,15	47,93	47,45	47,98	0,705
	GAISSA-KALNS.....	53 11 5,76	5,54	5,06	5,49	0,821
	SESTU-KALNS.....	92 59 8,19	7,97	7,49	7,98	0,840
	Somme	180 0 2,10	1,44	0,00	1,45	
		Corr. — 0,65	1,446	Exc.		
T. 58. Jan. VIII p. 557.	DABORS-KALNS.....	84 0 35,33	35,27	34,77	35,31	0,706
	SESTU-KALNS.....	37 24 16,65	16,58	16,09	16,47	0,721
	BRISTEN.....	58 35 9,70	9,63	9,14	9,70	0,768
	Somme	180 0 1,68	1,48	0,00	1,48	
		Corr. — 0,20	1,483	Exc.		
T. 57. Jan. VIII p. 557.	DABORS-KALNS.....	70 18 4,47	4,63	4,43	4,69	0,704
	BRISTEN.....	34 20 41,42	41,58	41,39	41,47	0,736
	ARHIDĀNI.....	75 21 14,21	14,37	14,18	14,42	0,797
	Somme	180 0 0,10	0,58	0,00	0,58	
		Corr. + 0,48	0,579	Exc.		

Le calcul des corrections part ici des données suivantes :

$$2n = 10 ; [\bar{A}] = 359^{\circ} 59' 59,90, \text{ donc } w = -0,10, \mu = -0,010$$

$$u = [\log \sin(\bar{C}) - \log \sin(\bar{B})] = -24,7 \text{ unités de la } 7^{\text{me}} \text{ décimale,}$$

$$p = [\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2] = 16405, \quad q = [\beta - \gamma] = +1,77, \quad \pi = +0,18$$

$$P = \frac{-24,7 + 0,02}{16405 - 0,3} = -0,001505.$$

Avec ces données nous avons pour le premier triangle, où $\beta' = +12,95$, $\gamma' = +17,10$,

$$\gamma' - \beta' + 2\pi = +4,51 ; 2\beta' + \gamma' - \pi = +42,82 ; -(\beta' + 2\gamma' + \pi) = +47,33 ;$$

donc :

$$a' = +0,020 - 4,51 \cdot 0,001505 = +0,013$$

$$b' = -0,010 - 42,82 \cdot 0,001505 = -0,074$$

$$c' = -0,010 + 47,33 \cdot 0,001505 = +0,061.$$

Ces corrections ajoutées aux angles corrigés à $180^{\circ} +$ l'excès, conduisent aux angles sphériques compensés de l'avant-dernière colonne. Les formules (17) p. 106 ont donné les chiffres de la dernière colonne, en prenant $\Omega = 1,335$, § 42.

Le pentagone de DABORS-KALNS fait la jonction des opérations de Lithuanie et des provinces Baltiques, opérations qui ont les quatre stations communes, KREUTZBURG, DABORS-KALNS, SESTU-KALNS, et GAISSA-KALNS. La jonction effective ne peut cependant se faire que par le côté DABORS-KALNS—KREUTZBURG, parce que l'identité parfaite des centres de station n'existe que pour ces deux stations. Aussi ce ne sont que les triangles T. 59 et T. 57, qui entreront, avec les angles compensés ici, dans le tableau C, § 34, des triangles de continuation. Ils s'y trouvent désignés par I. 23 et I. 24, avec l'indication des carrés partiels \mathfrak{E} de l'erreur moyenne en $\lg b - \lg c$, et qui sont les 11 calculés à l'aide des formules (18) p. 106. Le vrai mérite du pentagone de DABORS-KALNS est d'avoir augmenté l'exactitude du dit côté DABORS-KALNS—KREUTZBURG déterminé par les opérations de Tenner.

II. HEXAGONE AUTOUR DE DOKUDOWO. PLANCHE VII.

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles corrigés à $180^{\circ} +$ l'excès.	Angles réduits à $180^{\circ} 0' 0''$.	Angles sphériques compensés.	Carrés des err. moy. des angles compensés.
T. 25. Jan. VIII. p. 547.	DOKUDOWO.....	50° 11' 6,37	6,60	6,20	6,85	0,740
	DAFKAL.....	57 56 39,87	40,10	39,70	40,16	0,796
	HWJE.....	71 52 14,28	14,51	14,10	14,20	0,818
	Somme	180 0 0,52	1,21	0,00	1,21	
		Corr. + 0,69	1,207 Exc.			3

Revoi.	Stations.	Angles observés.	Angles corrigés à 180°+l'excès.	Angles réduits à 180° 0' 0".	Angles sphé- riques com- pensés.	Carrés des err. moy. des angles com- pensés.
T. 24. <i>Jan. VIII. p. 546.</i>	DOKUDOWO	74° 54' 16,31	15,83	15,34	16,14	0,741
	IWJE	55 36 22,71	22,22	21,73	22,37	0,740
	AMALIENHOF	49 29 23,91	23,42	22,93	22,96	0,729
	Somme	180 0 2,93	1,47	0,00	1,47	
		Corr. — 1,46	1,469 Exc.			
T. 23. <i>Jan. VIII. p. 546.</i>	DOKUDOWO	28 2 55,42	54,81	54,51	55,18	0,736
	AMALIENHOF	91 18 8,93	8,32	8,03	8,24	0,845
	PUTZEWITSCHI	60 38 58,37	57,76	57,46	57,47	0,828
	Somme	180 0 2,72	0,89	0,00	0,89	
		Corr. — 1,83	0,890 Exc.			
T. 20. <i>Jan. VIII. p. 545.</i>	DOKUDOWO	98 40 43,00	43,39	42,94	43,55	0,718
	PUTZEWITSCHI	29 28 4,37	4,76	4,31	5,19	0,431
	FALKOWTSCHISNA	51 51 12,81	13,20	12,75	12,61	0,609
	Somme	180 0 0,18	1,35	0,00	1,35	
		Corr. + 1,17	1,345 Exc.			
T. 21. <i>Jan. VIII. p. 545.</i>	DOKUDOWO	66 55 30,30	30,13	29,78	30,51	0,734
	FALKOWTSCHISNA	68 51 54,68	54,51	54,16	54,60	0,778
	TSCHERNIKI	44 12 36,58	36,41	36,06	35,94	0,724
	Somme	180 0 1,56	1,05	0,00	1,05	
		Corr. — 0,51	1,046 Exc.			
T. 22. <i>Jan. VIII. p. 546.</i>	DOKUDOWO	41 15 27,71	27,44	27,08	27,77	0,741
	TSCHERNIKI	74 57 40,03	39,77	39,41	39,75	0,828
	DAUKNI	63 46 54,14	53,87	53,51	53,56	0,820
	Somme	180 0 1,88	1,08	0,00	1,08	
		Corr. — 0,80	1,080 Exc.			

La somme des angles centraux corrigés à 180° + l'excès est ici: $[\bar{A}] = 359^\circ 59' 58,20$, donc $w = -1,80$. Les angles de la périphérie donnent $u = +79,0$ unités de la septième déc. etc. Ce sont

les quatre triangles T. 25, 24, 23 et 20 qui entreront, avec les angles compensés ici, dans le tableau C, § 34, où ils fournissent les triangles II. 25, 24, 25 et 26.

III. HEXAGONE AUTOUR DE BRONNA. PLANCHE VI.

Renvoi:	Stations.	Angles observés.	Angles corrigés à 180°+l'excès.	Angles réduits à 180° 0' 0''.	Angles sphé- riques com- pensés.	Carrés des err. moy. des angles com- pensés.
T. 11 <i>Jan. VIII p. 543.</i>	BRONNA	53° 43' 43,25	42,69	42,40	42,51	0,742
	SCHOMEIZÄKI	65 32 50,91	50,35	50,06	50,57	0,798
	IWATSCHEWITSCHI	60 43 28,39	27,83	27,54	27,79	0,793
	Somme	180 0 2,55	0,87	0,00	0,87	
		Corr. — 1,68	0,870	Exc.		
T. 10 <i>Jan. VIII p. 542.</i>	BRONNA	46 38 4,83	4,24	3,77	4,18	0,684
	IWATSCHEWITSCHI	98 19 28,80	28,22	27,75	28,41	0,821
	GATH	35 2 29,54	28,95	28,48	28,82	0,676
	Somme	180 0 3,17	1,41	0,00	1,41	
		Corr. — 1,76	1,410	Exc.		
T. 6 <i>Jan. VIII p. 542.</i>	BRONNA	60 42 14,04	13,63	12,74	13,42	0,741
	GATH	55 30 41,96	41,55	40,66	41,81	0,766
	BESDESCH	63 47 7,91	7,50	6,60	7,46	0,786
	Somme	180 0 3,91	2,68	0,00	2,69	
		Corr. — 1,23	2,678	Exc.		
T. 7 <i>Jan. VIII p. 542.</i>	BRONNA	66 24 45,06	45,09	44,52	44,82	0,720
	BESDESCH	39 23 55,81	55,84	55,27	56,17	0,670
	WININ	74 11 20,74	20,77	20,21	20,72	0,777
	Somme	180 0 1,61	1,70	0,00	1,71	
		Corr. + 0,09	1,706	Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles corrigés à 18° → l'excès.	Angles réduits à 180° 0' 0''.	Angles sphé- riques com- pensés.	Carrés des err. moy. des angles com- pensés.
T. 8. <i>Jan. VIII p. 542.</i>	BRONNA.....	48° 6' 28",28	28",06	27",83	27",81	0,728
	WININ.....	49 0 8,35	8,13	7,90	8,38	0,766
	SSOSCHITZA.....	82 53 24,73	24,51	24,27	24,51	0,824
	Somme	180 0 1,36	0,70	0,00	0,70	
		Corr. — 0,66	0,695	Exc.		
T. 9. <i>Jan. VIII p. 542.</i>	BRONNA.....	84 24 46,69	47,41	47,12	47,25	0,738
	SSOSCHITZA.....	53 40 42,13	42,85	42,57	43,17	0,688
	SCHOMEIZÄKI.....	41 54 29,87	30,59	30,31	30,44	0,639
	Somme	180 0—1,31	0,85	0,00	0,86	
		Corr. + 2,16	0,853	Exc.		

La somme des angles centraux corrigés à 180° + l'excès est ici $[\bar{A}] = 360^\circ 0' 1",12$, donc $\omega = + 1",12$. Les angles de la périphérie donnent $u = + 42,0$ unités de la sept. déc. etc. Ce sont les triangles T. 11, 10 et 6 qui entreront, avec les angles compensés ici, dans le tableau C, § 34, où ils donnent les triangles II. 35, 36 et 37.

§ 34. Tableau C. Triangles de continuation principaux.

Les 142 triangles de ce tableau se subdivisent en 5 groupes, situés entre les couples de côtés fondamentaux successifs.

Groupe I. 31 triangles, entre $L' = \text{EDBAFER} - \text{TAMMIK}$ et $L'' = \text{PONEDELI} - \text{JAKSCHTI}$.

Groupe II. 39 » » $L'' = \text{PONEDELI} - \text{JAKSCHTI}$ et $L''' = \text{OSSOWNITZA} - \text{LESKOWITSCH}$.

Groupe III. 27 » » $L''' = \text{OSSOWNITZA} - \text{LESKOWITSCH}$ et $L'''' = \text{MONTSCHINZI} - \text{KATERINOWKA}$.

Groupe IV. 13 » » $L'''' = \text{MONTSCHINZI} - \text{KATERINOWKA}$ et $L' = \text{GWOSDAUTZI} - \text{BRITSCHANI}$.

Groupe V. 35 » » $L' = \text{GWOSDAUTZI} - \text{BRITSCHANI}$ et $L'' = \text{TASCHDUNAR II} - \text{KATLABUCH}$.

La somme des triangles des cinq groupes est $145 = 142 + 3$, parce que le triangle I. 31 est identique avec II. 1, II. 39 avec III. 1, et III. 27 avec IV. 1, les côtés fondamentaux L'' , L''' et L'''' étant des côtés latéraux, tandis que L' est un côté transversal.

A la tête de chaque groupe se trouve la valeur effective de son premier côté fondamental, prise du tableau p. 103. C'est le côté initial du groupe, car les côtés des triangles successifs du groupe sont calculés en partant de ce chiffre. Les logarithmes des côtés ainsi calculés se trouvent dans le tableau C.

Le dernier côté d'un groupe étant le côté initial du groupe suivant, j'ai placé à la fin de chaque groupe la comparaison entre ce côté calculé et sa valeur effective. Au bas de cette comparaison se trouve encore la somme Σ des différents carrés de l'erreur moyenne, qui appartient soit aux deux côtés fondamentaux de ce groupe, soit à la série de triangles qui effectuent la jonction de ces deux côtés.

L'arrangement et le contenu des 6 colonnes verticales du tableau C, sont les mêmes que pour le tableau A; voyez l'explication p. 95. Il faut cependant remarquer, que les 9 triangles qui appartiennent au trois polygones déjà compensés, p. 107 à 111, et qui entrent dans la série des triangles principaux, savoir deux triangles du pentagone de DABORS-KALNS, 4 triangles de l'hexagone de DOKUDOWO, et 2 triangles de l'hexagone de BRONNA, sont désignés, dans la colonne du renvoi, comme triangles compensés, avec l'indication de la page de notre ouvrage, où chaque triangle a été discuté. Dans ces triangles compensés la somme des trois angles sphériques est toujours $= 180^\circ +$ l'excès; la somme des angles observés et la correction de la somme ont été données dans le tableau B. Le carré de l'erreur moyenne Ω , attribué aux trois angles de chacun de ces triangles, est celui, qui produit pour le $\lg b - \lg c$ de son triangle le chiffre $\mathfrak{S} \Omega = \mathfrak{T}$, la valeur de \mathfrak{T} étant donnée $= 11$, quantité relative à la compensation dans le polygone et qui se calcule à l'aide de la première des formules (18) p. 106. Voyez aussi p. 108.

Groupe I du tableau C.

TRIANGLES PRINCIPAUX ENTRE L' ET L'' .

$L' = \text{TAMMIK} - \text{EDBAFER} = 7302,7975 \mp 0,0246$ loises, p. 103.

$\lg L' = 3,8634892.6$, avec le carré de son erreur moyenne $F' = 469,3$.

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
I. 1. St. 10. <i>Gradm. I. p. 142.</i>	MARIEN-MAGD.....	45° 4' 41,55	41,24	3,8634892.6	$\odot = 427,9$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 140,7$
	EDBAFER.....	63 40 14,97	14,66	3,9658469.4	
	TAMMIK.....	71 15 4,42	4,10	3,9897337.9	
	Somme	180 0 0,94	0,00		
		Corr. — 0,33	0,614 Exc.		
I. 2. St. 11. <i>Gradm. I. p. 142.</i>	SALL.....	56 0 43,50	43,01	3,9897337.9	$\odot = 340,3$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 112,0$
	MARIEN-MAGD.....	63 21 51,71	51,22	4,0223750.6	
	EDBAFER.....	60 37 26,26	25,77	4,0113249.6	
	Somme	180 0 1,47	0,00		
		Corr. — 0,61	0,860 Exc.		
I. 3. St. 12. <i>Gradm. I. p. 142.</i>	ODERPAHLEN.....	30 34 54,20	53,44	4,0113249.6	$\odot = 867,9$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 285,5$
	SALL.....	61 47 59,33	58,57	4,2499327.5	
	MARIEN-MAGD.....	87 37 8,74	7,99	4,3044337.5	
	Somme	180 0 2,27	0,00		
		Corr. — 0,52	1,751 Exc.		
I. 4. St. 13. <i>Gradm. I. p. 142.</i>	KERSEL.....	77 43 10,03	9,24	4,3044337.5	$\odot = 276,6$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 91,0$
	ODERPAHLEN.....	52 19 50,43	49,63	4,2129646.8	
	SALL.....	49 57 1,93	1,13	4,1984248.5	
	Somme	180 0 2,39	0,00		
		Corr. + 0,03	2,419 Exc.		
I. 5. St. 14. <i>Gradm. I. p. 143.</i>	ARROHOF.....	39 6 19,45	18,31	4,1984248.5	$\odot = 524,5$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 172,6$
	ODERPAHLEN.....	61 21 48,13	46,99	4,3419045.3	
	KERSEL.....	79 31 55,84	54,70	4,3912820.5	
	Somme	180 0 3,42	0,00		
		Corr. — 0,14	3,276 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
I. 6. St. 16. <i>Gradm. I. p. 143.</i>	HOLSTFERSHOF ARROHOF OBERPAHLEN Somme	72° 26' 18,91 58 6 20,06 49 27 22,17 180 0 1,14	18,53 19,68 21,79 0,00	4,3912820.5 4,3409288.5 4,2927706.4	$\odot = 325,9$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 107,2$
		Corr. + 2,80	3,940 Exc.		
I. 7. St. 17. <i>Gradm. I. p. 143.</i>	ANNIKATZ ARROHOF HOLSTFERSHOF Somme	73 16 31,57 25 4 3,46 81 39 27,62 180 0 2,65	30,69 2,58 26,73 0,00	4,2927706.4 3,9385839.6 4,3069219.9	$\odot = 46,1$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 15,2$
		Corr. — 1,03	1,619 Exc.		
I. 8. St. 18. <i>Gradm. I. p. 143.</i>	ARROL ANNIKATZ ARROHOF Somme	79 8 1,34 39 55 35,74 60 56 25,31 180 0 2,39	0,55 34,94 24,51 0,00	4,3069219.9 4,1221814.9 4,2563474.1	$\odot = 133,7$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 44,0$
		Corr. — 0,13	2,255 Exc.		
I. 9. St. 19. <i>Gradm. I. p. 144.</i>	HELMET ARROL ANNIKATZ Somme	101 15 58,74 30 4 1,27 48 40 1,01 180 0 1,02	58,40 0,93 0,67 0,00	4,2563474.1 3,9646454.1 4,1403697.5	$\odot = 188,4$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 62,0$
		Corr. + 0,18	1,200 Exc.		
I. 10. St. 20. <i>Gradm. I. p. 144.</i>	LENARD HELMET ARROL Somme	73 21 15,19 15 41 30,28 90 57 13,96 180 0—0,57	15,38 30,47 14,15 0,00	4,1403697.5 3,5910687.6 4,1589013.2	$\odot = 25,0$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 8,2$
		Corr. + 1,09	0,517 Exc.		
I. 11. St. 21. <i>Gradm. I. p. 144.</i>	HUMMELSHOF LENARD HELMET Somme	93 6 40,16 31 51 12,81 55 2 8,45 180 0 1,42	39,68 12,34 7,98 0,00	4,1589013.2 3,8819684.8 4,0730949.0	$\odot = 134,3$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{I} = 44,2$
		Corr. — 0,55	0,865 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
I. 12. St. 22. <i>Gradn.</i> I. p. 144.	MARIO-MÄGGI.....	36° 2' 43,71	42,65	4,0730949.0	$\odot = 643,7$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{A} = 211,8$
	LENARD.....	64 27 2,68	1,62	4,2587141.5	
	HUMMELSHOF.....	79 30 16,79	15,73	4,2960775.1	
	Somme	180 0 3,18	0,00		
		Corr. — 1,15	2,028	Exc.	
I. 13. St. 23. <i>Gradn.</i> I. p. 144.	OPPEKALN.....	38 6 34,84	34,21	4,2960775.1	$\odot = 1943,8$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{A} = 639,5$
	MARIO-MÄGGI.....	111 4 47,24	46,62	4,4755948.4	
	LENARD.....	30 48 39,80	39,17	4,2151198.9	
	Somme	180 0 1,88	0,00		
		Corr. + 1,03	2,908	Exc.	
I. 14. St. 24. <i>Gradn.</i> I. p. 145.	PALZMAR.....	46 20 54,97	53,98	4,2151198.9	$\odot = 221,7$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{A} = 73,0$
	OPPEKALN.....	31 22 57,90	56,91	4,0722796.1	
	MARIO-MÄGGI.....	102 16 10,10	9,11	4,3456172.2	
	Somme	180 0 2,97	0,00		
		Corr. — 1,15	1,819	Exc.	
I. 15. St. 25. <i>Gradn.</i> I. p. 145.	KORTENHOF.....	75 13 17,46	16,00	4,3456172.2	$\odot = 145,6$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{A} = 47,9$
	PALZMAR.....	42 46 59,39	57,94	4,1922386.1	
	OPPEKALN.....	61 59 47,51	46,06	4,3061471.4	
	Somme	180 0 4,36	0,00		
		Corr. — 1,43	2,926	Exc.	
I. 16. St. 26. <i>Gradn.</i> I. p. 145.	RAMKAU.....	65 38 22,94	21,87	4,3061471.4	$\odot = 171,5$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{A} = 56,4$
	KORTENHOF.....	47 28 47,03	45,96	4,2141322.0	
	PALZMAR.....	66 52 53,24	52,17	4,3102868.3	
	Somme	180 0 3,21	0,00		
		Corr. — 0,28	2,927	Exc.	
I. 17. St. 27. <i>Gradn.</i> I. p. 145.	NESSAULE-KALNS...	49 28 47,42	47,11	4,3102868.3	$\odot = 1835,3$ $\Omega = 0,329$ $\mathfrak{A} = 603,8$
	RAMKAU.....	103 23 59,86	59,54	4,4173854.6	
	KORTENHOF.....	27 7 13,66	13,35	4,0882053.0	
	Somme	180 0 0,94	0,00		
		Corr. + 1,40	2,339	Exc.	

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
I. 18. St. 28. <i>Gradm. I. p. 145.</i>	ELKAS-KALNS	37° 22' 55,59	54,84	4,0882053.0	$\odot = 594,7$ $\Omega = 0,329$ $\mathcal{I} = 195,7$
	NESSAULE-KALNS.	63 47 33,80	33,05	4,2578168.8	
	RAMKAU.	78 49 32,86	32,11	4,2966148.0	
	Somme	180 0 2,25	0,00		
		Corr. — 0,16	2,090 Exc.		
I. 19. St. 29. <i>Gradm. I. p. 146.</i>	GAISSA-KALNS	96 53 37,28	36,72	4,2966148.0	$\odot = 104,5$ $\Omega = 0,329$ $\mathcal{I} = 34,4$
	ELKAS-KALNS.	25 57 51,34	50,79	3,9410494.7	
	NESSAULE-KALNS.	57 8 33,04	32,49	4,2240560.0	
	Somme	180 0 1,66	0,00		
		Corr. — 0,26	1,395 Exc.		
I. 20. St. 30. <i>Gradm. I. p. 146.</i>	SESTU-KALNS	86 5 15,63	14,99	4,2240560.0	$\odot = 526,8$ $\Omega = 0,329$ $\mathcal{I} = 173,3$
	GAISSA-KALNS.	56 19 51,96	51,32	4,1453249.5	
	ELKAS-KALNS.	37 34 54,33	53,69	4,0103211.6	
	Somme	180 0 1,92	0,00		
		Corr. — 0,55	1,371 Exc.		
I. 21. St. 31. <i>Gradm. I. p. 146.</i>	DABORS-KALNS	33 49 46,72	46,17	4,0103211.6	$\odot = 635,9$ $\Omega = 0,329$ $\mathcal{I} = 209,2$
	GAISSA-KALNS	53 11 6,66	6,11	4,1680837.2	
	SESTU-KALNS.	92 59 8,26	7,72	4,2640919.4	
	Somme	180 0 1,64	0,00		
		Corr. — 0,19	1,446 Exc.		
I. 22. St. 32. <i>Gradm. I. p. 146.</i>	KREITZBURG	60 18 44,21	44,55	4,2640919.4	$\odot = 3242,9$ $\Omega = 0,329$ $\mathcal{I} = 1066,9$
	DABORS-KALNS	101 11 56,39	56,73	4,3168533.8	
	GAISSA-KALNS	18 29 18,38	18,72	3,8264194.6	
	Somme	180 0—1,02	0,00		
		Corr. + 2,18	1,161 Exc.		
I. 23. Triangle compensé p. 107.	ARMIDÄNI	58 24 27,60	27,48	3,8264194.6	$\odot = 454,4$ $\Omega = 1,221$ $\mathcal{I} = 555,4$
	DABORS-KALNS	70 39 36,58	36,45	3,8708580.0	
	KREITZBURG	50 55 56,19	56,07	3,7861697.6	
	Somme	180 0 0,37	0,00		
			0,372 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.	
I. 24. Triangle compensé p. 107.	DRISTEN	34° 20' 41",47	41",28	3,7861697.6	$\sigma = 826,1$ $\Omega = 1,055$ $\mathcal{I} = 871,1$	
	ARBIDÄNI	75 21 14,42	14,23	4,0204121.9		
	DABORS-KALNS	70 18 4,69	4,49	4,0085685.2		
	Somme	180 0 0,58	0,00			
			0,579 Exc.			
I. 25. T. 56. Jan. VIII. p. 556.	DAU'DSEWAS	51 27 33,90	33,88	4,0085685.2	$\sigma = 176,1$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 235,1$	
	ARBIDÄNI	35 36 1,12	1,10	3,8802870.1		
	DRISTEN	92 56 25,04	25,02	4,1146969.2		
	Somme	180 0 0,06	0,00			
			Corr. + 0,68	0,743 Exc.		
I. 26. T. 55. Jan. VIII. p. 556.	URMEN	51 39 27,28	26,70	4,1146969.2	$\sigma = 265,5$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 354,4$	
	DAU'DSEWAS	52 54 5,56	4,97	4,1219904.8		
	ARBIDÄNI	75 26 28,92	28,33	4,2060322.3		
	Somme	180 0 1,76	0,00			
			Corr. — 0,16	1,604 Exc.		
I. 27. T. 54. Jan. VIII. p. 556.	PILKALN	66 39 29,71	29,07	4,2060322.3	$\sigma = 450,8$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 601,8$	
	URMEN	67 12 33,47	32,84	4,2078110.2		
	DAU'DSEWAS	46 7 58,73	58,09	4,1010193.5		
	Somme	180 0 1,91	0,00			
			Corr. — 0,11	1,797 Exc.		
I. 28. T. 53. Jan. VIII. p. 556.	CHANUSCHISCHKI	79 33 20,94	20,41	4,1010193.5	$\sigma = 64,0$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 85,4$	
	PILKALN	29 28 26,94	26,41	3,8002655.5		
	URMEN	70 58 13,71	13,18	4,0838677.7		
	Somme	180 0 1,59	0,00			
			Corr. — 0,87	0,724 Exc.		
I. 29. T. 52. Jan. VIII. p. 555.	PONEDELI	67 47 26,08	25,32	4,0838677.7	$\sigma = 171,4$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 228,8$	
	CHANUSCHISCHKI	47 23 38,02	37,26	3,9842383.7		
	PILKALN	64 48 58,18	57,42	4,0739697.0		
	Somme	180 0 2,28	0,00			
			Corr. — 1,26	1,017 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
I. 30.	KARISCHKI.	55° 21' 11,02	10,09	4,0739697.0	$\mathcal{S} = 683,9$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 913,0$
T. 51.	PONEDELI.	81 7 34,75	33,82	4,1535151.1	
Jan. VIII. p. 555.	CHANUSCHISCHKI.	43 31 17,01	16,09	3,9967259.6	
	Somme	180 0 2,78	0,00		
		Corr. — 1,66	1,117 Exc.		
I. 31.	JAKSCHTI.	75 59 40,15	39,77	3,9967259.6	$\mathcal{S} = 666,7$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 890,0$
T. 50.	PONEDELI.	67 42 31,29	30,91	3,9760993.1	
Jan. VIII. p. 554.	KARISCHKI.	36 17 49,69	49,32	3,7821332.1	
	Somme	180 0 1,13	0,00		
		Corr. — 0,60	0,534 Exc.		

COMPARAISON ENTRE LES CÔTÉS FONDAMENTAUX L' ET L'' .

La jonction de ces deux lignes a été effectuée par 31 triangles. Le dernier côté du triangle I. 31 est la valeur du côté L'' , calculée sur la valeur effective de L' . Nous avons :

Valeur calculée de $L'' = 6055,2658$ toises; $\lg = 3,7821332.1$

» effective » » = 6055,1623 » » = 3,7821257.9, avec $F'' = 418,7$.

Correction de la longueur calculée = $-0,1035$ » » $U' = -74.2$

$$(U')^2 = 5505,6.$$

Somme des carrés des erreurs moyennes :

$$\Sigma' = F' + (\mathcal{I}1 + \mathcal{I}2 + \dots + \mathcal{I}31) + F'' = 10017,5.$$

Groupe II du tableau C.

TRIANGLES PRINCIPAUX ENTRE L'' ET L''' .

$L'' = \text{PONEDELI} - \text{JAKSCHITI} = 6055,1623 \mp 0,0192$ toises, p. 103.

$\lg L'' = 3,7821257.9$, avec le carré de son erreur moyenne $F'' = 418.7$.

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
II. 1 = I. 31.	KARISCHKI.....	36° 17'	49,32	3,7821257.9	$\mathcal{S} = 762,6$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 1018,0$
	JAKSCHITI.....	75 59	39,77	3,9967185.4	
	PONEDELI.....	67 42	30,91	3,9760918.9	
	Somme		0,00		
II. 2. T. 49. Jan. VIII. p. 554.	KINDERTI.....	47 22 21,68	21,65	3,9760918.9	$\mathcal{S} = 262,2$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 350,0$
	KARISCHKI.....	44 59 16,63	16,60	3,9587408.5	
	JAKSCHITI.....	87 38 21,78	21,75	4,1089785.7	
	Somme	180 0 0,09	0,00		
		Corr. + 0,74	0,826	Exc.	
II. 3. T. 48. Jan. VIII. p. 554.	MARTINTSCHUNI....	49 32 55,25	54,87	4,1089785.7	$\mathcal{S} = 233,5$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 311,8$
	KINDERTI.....	44 20 58,92	58,54	4,0721175.3	
	KARISCHKI.....	86 6 6,98	6,59	4,2266129.6	
	Somme	180 0 1,15	0,00		
		Corr. + 0,30	1,454	Exc.	
II. 4. T. 47. Jan. VIII. p. 554.	LIPSK.....	69 21 50,42	49,40	4,2266129.6	$\mathcal{S} = 158,1$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 211,1$
	KINDERTI.....	45 38 46,63	45,62	4,1097397.8	
	MARTINTSCHUNI....	64 59 25,99	24,98	4,2126542.2	
	Somme	180 0 3,04	0,00		
		Corr. — 1,15	1,889	Exc.	
II. 5. T. 46. Jan. VIII. p. 553.	STWORÄNZI.....	74 36 54,50	53,70	4,2126542.2	$\mathcal{S} = 1040,7$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 1389,4$
	LIPSK.....	75 15 44,52	43,72	4,2139744.3	
	KINDERTI.....	30 7 23,38	22,58	3,9290831.5	
	Somme	180 0 2,40	0,00		
		Corr. — 1,11	1,288	Exc.	

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
II. 6. T. 45. Jan. VIII. p. 553.	TSCHWILI..... STWORÄNZI..... LIPSK..... Somme	36° 4' 38,26 63 0 57,80 80 54 24,43 180 0 0,49	38,10 57,64 24,26 0,00	3,9290831.5 4,1090023.6 4,1535670.4	$\sigma = 629,3$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 840,2$
		Corr. + 0,55	1,036	Exc.	
II. 7. T. 44. Jan. VIII. p. 553.	BOLNIKI..... TSCHWILI..... STWORÄNZI..... Somme	79 15 2,79 54 15 36,76 46 29 20,81 180 0 0,36	2,67 36,64 20,69 0,00	4,1535670.4 4,0706390.3 4,0217390.5	$\sigma = 330,2$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 440,8$
		Corr. + 0,81	1,168	Exc.	
II. 8. T. 43. Jan. VIII. p. 553.	AMBROSCHSCHKI.... BOLNIKI..... TSCHWILI..... Somme	59 3 9,90 69 45 36,40 51 11 15,64 180 0 1,94	9,25 35,76 14,99 0,00	4,0217390.5 4,0607534.6 3,9800838.3	$\sigma = 439,7$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 587,0$
		Corr. — 1,03	0,905	Exc.	
II. 9. T. 42. Jan. VIII. p. 552.	KONGEDI..... AMBROSCHSCHKI.... DOLNIKI..... Somme	33 14 16,29 64 19 30,61 82 26 14,41 180 0 1,31	15,85 30,17 13,98 0,00	3,9800838.3 4,1960660.8 4,2374185.0	$\sigma = 753,2$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 1005,5$
		Corr. + 0,12	1,429	Exc.	
II. 10. T. 41. Jan. VIII. p. 552.	MESCHKANZI..... KONGEDI..... AMBROSCHSCHKI.... Somme	58 10 19,33 36 0 8,32 85 49 35,98 180 0 3,63	18,12 7,11 34,77 0,00	4,2374185.0 4,0774267.6 4,3070341.9	$\sigma = 128,7$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 171,9$
		Corr. — 1,65	1,978	Exc.	
II. 11. T. 40. Jan. VIII. p. 552.	NADOROWTSCHISNA .. MESCHKANZI..... KONGEDI..... Somme	54 2 15,26 67 15 30,90 58 42 15,98 180 0 2,14	14,55 30,18 15,27 0,00	4,3070341.9 4,3637231.1 4,3305815.2	$\sigma = 394,9$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 527,2$
		Corr. + 1,71	3,848	Exc.	

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
II. 12. T. 39. <i>Jan. VIII. p. 551.</i>	NEMESCH.....	79° 36' 16,05	15,16	4,3305815.2	$\mathcal{G} = 309,3$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 413,0$
	MESCHKANZI.....	52 58 36,06	35,17	4,2399837.3	
	NABOROWTSCHISNA..	47 25 10,56	9,67	4,2048397.0	
	Somme	180 0 2,67	0,00		
		Corr. — 0,04	2,632 Exc.		
II. 13. T. 35. <i>Jan. VIII. p. 550.</i>	CHORUNSCHISCHKI...	70 30 31,25	30,50	4,2048397.0	$\mathcal{G} = 119,7$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 159,8$
	NEMESCH.....	40 21 16,09	15,34	4,0417180.5	
	MESCHKANZI.....	69 8 14,91	14,16	4,2010201.3	
	Somme	180 0 2,25	0,00		
		Corr. — 0,67	1,585 Exc.		
II. 14. T. 34. <i>Jan. VIII. p. 550.</i>	KONRADI.....	75 18 36,46	36,13	4,2010201.3	$\mathcal{G} = 601,3$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 802,8$
	CHORUNSCHISCHKI...	66 37 27,55	27,23	4,1782594.8	
	NEMESCH.....	38 3 56,96	56,64	4,0054324.0	
	Somme	180 0 0,97	0,00		
		Corr. + 0,45	1,420 Exc.		
II. 15. T. 33. <i>Jan. VIII. p. 549.</i>	BERESNÁKI.....	43 37 59,06	58,53	4,0054324.0	$\mathcal{G} = 725,9$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 969,0$
	KONRADI.....	83 19 7,67	7,15	4,1636013.8	
	CHORUNSCHISCHKI...	53 2 54,85	54,32	4,0691858.4	
	Somme	180 0 1,58	0,00		
		Corr. — 0,45	1,134 Exc.		
II. 16. T. 32. <i>Jan. VIII. p. 549.</i>	MEDNIKI.....	72 39 39,63	39,49	4,0691858.4	$\mathcal{G} = 168,5$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 224,9$
	KONRADI.....	46 4 34,90	34,77	3,9468755.4	
	BERESNÁKI.....	61 15 45,87	45,74	4,0323005.9	
	Somme	180 0 0,40	0,00		
		Corr. + 0,48	0,875 Exc.		
II. 17. T. 31. <i>Jan. VIII. p. 549.</i>	DEIBISSI.....	58 56 36,41	35,26	4,0323005.9	$\mathcal{G} = 392,9$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 524,5$
	MEDNIKI.....	67 5 1,32	0,17	4,0637881.3	
	KONRADI.....	53 58 25,72	24,57	4,0073058.4	
	Somme	180 0 3,45	0,00		
		Corr. — 2,48	0,970 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
II. 18. T. 30. <i>Jan. VIII. p. 549.</i>	LOITZI.....	43° 57' 20,81	20,27	4,0073058.4	$\sigma = 541,5$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 722,9$
	DEISSI.....	72 19 24,84	24,31	4,1448783.7	
	MEDNIKI.....	63 43 15,96	15,42	4,1185053.1	
	Somme	180 0 1,61	0,00		
		Corr. — 0,39	1,225 Exc.		
II. 19. T. 29. <i>Jan. VIII. p. 548.</i>	TUPISCHKI.....	67 34 34,29	34,18	4,1185053.1	$\sigma = 817,7$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 1091,7$
	LOITZI.....	77 13 41,98	41,88	4,1417711.1	
	DEISSI.....	35 11 44,05	43,94	3,9133516.9	
	Somme	180 0 0,32	0,00		
		Corr. + 0,69	1,009 Exc.		
II. 20. T. 28. <i>Jan. VIII. p. 548.</i>	WIDNOPOL.....	43 30 51,47	50,58	3,9133516.9	$\sigma = 529,4$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 706,8$
	LOITZI.....	70 49 39,40	38,51	4,0506445.7	
	TUPISCHKI.....	65 39 31,80	30,91	4,0349960.2	
	Somme	180 0 2,67	0,00		
		Corr. — 1,86	0,806 Exc.		
II. 21. T. 27. <i>Jan. VIII. p. 548.</i>	DAURNI.....	34 21 31,13	30,64	4,0349960.2	$\sigma = 1164,2$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 1554,2$
	WIDNOPOL.....	94 10 35,37	34,89	4,2822778.2	
	LOITZI.....	51 27 54,96	54,47	4,1767666.0	
	Somme	180 0 1,46	0,00		
		Corr. + 0,10	1,562 Exc.		
II. 22. T. 26. <i>Jan. VIII. p. 547.</i>	IWJE.....	94 5 45,58	45,50	4,1767666.0	$\sigma = 245,9$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 328,2$
	DAURNI.....	39 18 20,27	20,18	3,9795941.7	
	WIDNOPOL.....	46 35 54,41	54,32	4,0391462.4	
	Somme	180 0 0,26	0,00		
		Corr. + 0,74	1,001 Exc.		
II. 23. Triangle compensé <i>p. 108.</i>	DOKUDOWO.....	50 11 6,85	6,45	4,0391462.4	$\sigma = 475,7$ $\Omega = 1,118$ $\mathcal{I} = 531,7$
	IWJE.....	71 52 14,20	13,79	4,1316048.3	
	DAURNI.....	57 56 40,16	39,76	4,0818754.4	
	Somme	180 0 1,21	0,00		
			1,207 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
II. 24. Triangle compensé p. 109.	AMALIENOF.....	49° 29' 22,96	22,47	4,0818754. 4	$\sigma = 527,0$ $\Omega = 1,097$ $\mathcal{I} = 577,9$
	DOKUDOWO.....	74 54 16,14	15,65	4,1856462. 8	
	IWJE.....	55 36 22,37	21,88	4,1174426. 2	
	Somme	180 0 1,47	0,00		
1,469 Exc.					
II. 25. Triangle compensé p. 109.	PUTZEWITSCH.....	60 38 57,47	57,17	4,1174426. 2	$\sigma = 89,7$ $\Omega = 1,235$ $\mathcal{I} = 110,8$
	DOKUDOWO.....	28 2 55,18	54,88	3,8494090. 4	
	AMALIENOF.....	91 18 8,24	7,95	4,1769957. 3	
	Somme	180 0 0,89	0,00		
0,890 Exc.					
II. 26. Triangle compensé p. 109.	FALKOWTSCHISNA....	51 51 12,61	12,16	4,1769957. 3	$\sigma = 153,9$ $\Omega = 0,819$ $\mathcal{I} = 126,0$
	PUTZEWITSCH.....	29 28 5,19	4,74	3,9732437. 8	
	DOKUDOWO.....	98 40 43,55	43,10	4,2763329. 3	
	Somme	180 0 1,35	0,00		
1,345 Exc.					
II. 27. T. 19. Jan. VIII. p. 545.	TARASSOWZI.....	65 48 42,64	41,27	4,2763329. 3	$\sigma = 171,3$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 228,6$
	FALKOWTSCHISNA....	47 26 56,75	55,38	4,1835162. 2	
	PUTZEWITSCH.....	66 44 24,73	23,35	4,2794255. 8	
	Somme	180 0 4,12	0,00		
Corr. — 1,57 2,546 Exc.					
II. 28. T. 18. Jan. VIII. p. 545.	LOPATI.....	59 1 15,24	13,42	4,2794255. 8	$\sigma = 195,7$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 261,2$
	TARASSOWZI.....	49 1 17,34	15,52	4,2241851. 7	
	FALKOWTSCHISNA....	71 57 32,88	31,06	4,3243714. 7	
	Somme	180 0 5,46	0,00		
Corr. — 2,54 2,915 Exc.					
II. 29. T. 17. Jan. VIII. p. 545.	SOLOTEJEWO.....	63 12 10,52	9,01	4,3243714. 7	$\sigma = 188,0$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 251,0$
	TARASSOWZI.....	49 18 50,27	48,76	4,2535463. 3	
	LOPATI.....	67 29 3,73	2,23	4,3392767. 7	
	Somme	180 0 4,52	0,00		
Corr. — 1,16 3,360 Exc.					

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
II. 30. T. 16. <i>Jan. VIII. p. 544.</i>	RINKI	70° 0' 56",19	55",61	4,3392767.7	$\sigma = 733,5$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 979,3$
	SOLOTEJEWO	73 41 33,64	33,05	4,3484149.1	
	TARASSOWZI	36 17 31,92	31,34	4,1384975.7	
	Somme	180 0 1,75	0,00		
		Corr. + 1,02	2,772 Exc.		
II. 31. T. 15. <i>Jan. VIII. p. 544.</i>	DSENGELI	70 15 32,60	32,02	4,1384975.7	$\sigma = 120,3$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 160,6$
	RINKI	40 25 54,27	53,68	3,9767389.8	
	SOLOTEJEWO	69 18 34,89	34,30	4,1358476.6	
	Somme	180 0 1,76	0,00		
		Corr. — 0,59	1,173 Exc.		
II. 32. T. 14. <i>Jan. VIII. p. 544.</i>	SCHOMEIZÄKI	40 42 3,13	1,52	4,1358476.6	$\sigma = 808,1$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 1079,3$
	RINKI	85 27 38,07	36,45	4,3201660.5	
	DSENGELI	53 50 23,64	22,03	4,2286016.6	
	Somme	180 0 4,84	0,00		
		Corr. — 2,62	2,218 Exc.		
II. 33. T. 13. <i>Jan. VIII. p. 544.</i>	MARINUS	61 51 30,83	29,79	4,2286016.6	$\sigma = 188,5$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 251,7$
	SCHOMEIZÄKI	49 6 15,58	14,54	4,1617037.4	
	RINKI	69 2 16,70	15,67	4,2535008.5	
	Somme	180 0 3,11	0,00		
		Corr. — 0,90	2,205 Exc.		
II. 34. T. 12. <i>Jan. VIII. p. 543.</i>	IWAZEWITSCH	98 21 54,17	53,69	4,2535008.5	$\sigma = 697,9$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 931,7$
	SCHOMEIZÄKI	49 42 19,09	18,62	4,1405147.1	
	MARINUS	31 55 48,16	47,69	3,9815041.4	
	Somme	180 0 1,42	0,00		
		Corr. — 0,16	1,260 Exc.		
II. 35. Triangle compensé <i>p. 110.</i>	BRONNA	53 43 42,51	42,22	3,9815041.4	$\sigma = 319,0$ $\Omega = 1,130$ $\mathcal{I} = 360,6$
	IWAZEWITSCH	60 43 27,79	27,50	4,0157040.1	
	SCHOMEIZÄKI	65 32 50,57	50,28	4,0342358.6	
	Somme	180 0 0,87	0,00		
			0,870 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
II. 36. Triangle compensé p. 110.	GATH.....	35° 2' 28,82	28,35	4,0342358.6	$\mathcal{G} = 545,9$ $\Omega = 0,992$ $\mathcal{I} = 541,5$
	BRONNA.....	46 38 4,18	3,71	4,1367252.3	
	IWAZEWITSCH.....	98 19 28,41	27,94	4,2705988.3	
	Somme	180. 0 1,41	0,00		
1,410 Exc.					
II. 37. Triangle compensé p. 110.	BESDESCH.....	63 47 7,46	6,57	4,2705988.3	$\mathcal{G} = 246,1$ $\Omega = 1,142$ $\mathcal{I} = 281,1$
	GATH.....	55 30 41,81	40,91	4,2337895.3	
	BRONNA.....	60 42 13,42	12,52	4,2583024.3	
	Somme	180 0 2,69	0,00		
2,678 Exc.					
II. 38. T. 5. Jan. VIII. p. 542.	OSSOWNITZA.....	77 5 18,04	16,98	4,2583024.3	$\mathcal{G} = 403,1$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 538,2$
	BESDESCH.....	58 56 34,83	33,76	4,2022293.3	
	GATH.....	43 58 10,33	9,26	4,1109546.1	
	Somme	180 0 3,20	0,00		
Corr. — 1,27 1,928 Exc.					
II. 39. T. 3. Jan. VIII. p. 541.	LESKOWITSCH.....	67 9 59,72	58,69	4,1109546.1	$\mathcal{G} = 883,1$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 1178,9$
	OSSOWNITZA.....	78 45 52,98	51,96	4,1379912.7	
	BESDESCH.....	34 4 10,38	9,35	3,8947345.8	
	Somme	180 0 3,08	0,00		
Corr. — 2,12 0,955 Exc.					

COMPARAISON ENTRE LES CÔTÉS FONDAMENTAUX L'' ET L''' .

La jonction de ces deux lignes a été effectuée par 39 triangles. Le dernier côté du triangle II. 39 est la valeur du côté L''' , calculée sur la valeur effective de L'' . Nous avons :

Valeur calculée de $L''' = 7847,5590$ toises; $\lg = 3,8947345.8$

» effective » » = 7847,7824 » » = 3,8947469.5, avec $F''' = 1742,0$.

Correction de la longueur calculée = + 0,2234 » » $U'' = + 123,7$

$$(U''')^2 = 15301,7.$$

Somme des carrés des erreurs moyennes :

$$\Sigma'' = F'' + (\mathcal{I}^1 + \mathcal{I}^2 + \dots + \mathcal{I}^{39}) + F''' = 24901,5.$$

Groupe III du tableau C.

TRIANGLES PRINCIPAUX ENTRE L''' ET L'' . $L''' =$ OSSOWNITZA — LESKOWITSCHI = 7847,7824 \mp 0,0509 toises, p. 103. $\lg L''' = 3,8947469.5$, avec le carré de l'erreur moyenne $F''' = 1742,0$.

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
III. 1 = II. 39.	BESDESCH.....	34° 4'	9,35.	3,8947469.5	$\sigma = 745,2$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 994,8$
	LESKOWITSCHI.....	67 9	58,69	4,1109669.8	
	OSSOWNITZA.....	78 45	51,96	4,1380036.4	
	Somme		0,00		
III. 2. T. 4. Jan. VIII. p. 541.	DELIN.....	53 19 33,54	33,15	4,1380036.4	$\sigma = 455,4$ $\Omega = 1,335$ $\mathcal{I} = 608,0$
	LESKOWITSCHI.....	71 13 2,77	2,37	4,2100384.6	
	BESDESCH.....	55 27 24,87	24,48	4,1495731.7	
	Somme	180 0 1,18	0,00		
		Corr. + 0,58	1,765	Exc.	
III. 3. T. 252. Jan. XII. p. 349.	SCHLÄPAN.....	54 41 28,71	28,16	4,1495731.7	$\sigma = 529,3$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 838,1$
	DELIN.....	75 10 48,38	47,82	4,2231642.2	
	LESKOWITSCHI.....	50 7 44,57	44,02	4,1229291.6	
	Somme	180 0 1,66	0,00		
		Corr. + 0,08	1,741	Exc.	
III. 4. T. 253. Jan. XII. p. 350.	BOLSCHAJA-GLUSCHA..	50 15 0,57	0,38	4,1229291.6	$\sigma = 338,2$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 535,5$
	SCHLÄPAN.....	60 19 28,21	28,02	4,1760327.0	
	DELIN.....	69 25 31,80	31,60	4,2084673.6	
	Somme	180 0 0,58	0,00		
		Corr. + 1,21	1,792	Exc.	
III. 5. T. 254. Jan. XII. p. 350.	TSCHERWISCHITSCHÉ..	53 34 37,14	36,28	4,2084673.6	$\sigma = 283,2$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 448,4$
	BOLSCHAJA-GLUSCHA..	56 51 16,63	15,77	4,2257313.9	
	SCHLÄPAN.....	69 34 8,81	7,95	4,2746412.7	
	Somme	180 0 2,58	0,00		
		Corr. — 0,13	2,450	Exc.	

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
III. 6. T. 255. <i>Jan. XII. p. 350.</i>	GUTAKAMENSKAJA....	89° 31' 52,23	52,00	4,2746412.7	$\Sigma = 271,3$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 429,6$
	TSCHERWISCHITSCHJE ..	44 7 16,09	15,85	4,1173753.4	
	DOLSCHAJA-GLUSCHJA..	46 20 52,39	52,15	4,1344204.7	
	Somme	180 0 0,71	0,00		
		Corr. + 1,01	1,716	Exc.	
III. 7. T. 256. <i>Jan. XII. p. 350.</i>	TSCHEREMOSCHNA....	46 22 58,90	58,30	4,1344204.7	$\Sigma = 770,0$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 1218,9$
	GUTAKAMENSKAJA....	85 55 41,51	40,92	4,2733048.6	
	TSCHERWISCHITSCHJE..	47 41 21,38	20,78	4,1433425.5	
	Somme	180 0 1,79	0,00		
		Corr. + 0,03	1,818	Exc.	
III. 8. T. 257. <i>Jan. XII. p. 350.</i>	DATIN	57 3 58,90	58,86	4,1433425.5	$\Sigma = 177,7$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 281,2$
	TSCHEREMOSCHNA....	44 51 6,79	6,75	4,0677843.0	
	GUTAKAMENSKAJA....	78 4 54,44	54,39	4,2099606.5	
	Somme	180 0 0,13	0,00		
		Corr. + 1,40	1,530	Exc.	
III. 9. T. 258. <i>Jan. XII. p. 351.</i>	KOWEL.....	67 27 26,11	25,97	4,2099606.5	$\Sigma = 358,3$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 567,2$
	TSCHEREMOSCHNA....	62 20 15,30	15,15	4,1917654.4	
	DATIN	50 12 19,03	18,88	4,1300343.8	
	Somme	180 0 0,44	0,00		
		Corr. + 1,42	1,864	Exc.	
III. 10. T. 259. <i>Jan. XII. p. 351.</i>	GOLOBI.....	63 45 40,57	40,03	4,1300343.8	$\Sigma = 291,7$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 461,8$
	KOWEL.....	59 18 2,57	2,03	4,1116883.9	
	TSCHEREMOSCHNA....	56 56 18,48	17,94	4,1005494.7	
	Somme	180 0 1,62	0,00		
		Corr. — 0,21	1,406	Exc.	
III. 11. T. 260. <i>Jan. XII. p. 351.</i>	OSMIGOWITSCHJ.....	40 24 14,49	13,56	4,1005494.7	$\Sigma = 1007,1$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 1594,3$
	GOLOBI.....	93 13 26,97	26,05	4,2881726.7	
	KOWEL.....	46 22 21,32	20,39	4,1485023.5	
	Somme	180 0 2,78	0,00		
		Corr. — 1,08	1,704	Exc.	

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
III. 12. T. 261. Jan. XII. p. 351.	ROSCHISCHTSCHÉ.....	51° 1' 33,55	33,08	4,1485023.5	$\sigma = 266,9$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 422,4$
	OSMIGOWITSCHÉ.....	52 18 27,51	27,04	4,1561842.8	
	GOLOBI.....	76 39 60,35	59,88	4,2459739.5	
	Somme	180 0 1,41	0,00		
		Corr. + 0,48	1,888	Exc.	
III. 13. T. 262. Jan. XII. p. 351.	TORTSCHIN.....	79 9 17,41	16,71	4,2459739.5	$\sigma = 183,8$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 290,9$
	ROSCHISCHTSCHÉ.....	44 51 48,85	48,15	4,1022480.9	
	OSMIGOWITSCHÉ.....	55 58 55,84	55,14	4,1722832.7	
	Somme	180 0 2,10	0,00		
		Corr. — 0,32	1,777	Exc.	
III. 14. T. 263. Jan. XII. p. 352.	KRUPI.....	58 30 60,01	59,20	4,1722832.7	$\sigma = 285,1$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 451,3$
	TORTSCHIN.....	58 57 11,97	11,16	4,1742929.2	
	ROSCHISCHTSCHÉ.....	62 31 50,44	49,64	4,1894901.1	
	Somme	180 0 2,42	0,00		
		Corr. — 0,52	1,895	Exc.	
III. 15. T. 264. Jan. XII. p. 352.	SCHADTSCHA.....	56 40 10,23	10,12	4,1894901.1	$\sigma = 308,2$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 487,9$
	KRUPI.....	60 45 47,99	47,88	4,2083558.1	
	TORTSCHIN.....	62 34 2,12	2,00	4,2157297.4	
	Somme	180 0 0,34	0,00		
		Corr. + 1,79	2,134	Exc.	
III. 16. T. 265. Jan. XII. p. 352.	SMORDWA.....	66 28 51,09	50,42	4,2157297.4	$\sigma = 233,7$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 369,9$
	KRUPI.....	53 57 5,08	4,41	4,1610844.8	
	SCHADTSCHA.....	59 34 5,84	5,17	4,1890196.8	
	Somme	180 0 2,01	0,00		
		Corr. — 0,04	1,974	Exc.	
III. 17. T. 266. Jan. XII. p. 352.	BORBIN.....	63 21 12,18	11,76	4,1890196.8	$\sigma = 148,4$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 234,9$
	SMORDWA.....	43 49 2,02	1,60	4,0781159.4	
	KRUPI.....	72 49 47,06	46,64	4,2179842.0	
	Somme	180 0 1,26	0,00		
		Corr. + 0,44	1,700	Exc.	

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
III. 18. T. 267. <i>Jan. XII. p. 352.</i>	GURNIKI.....	67° 9' 22,03	21,24	4,2179842. 0	$\odot = 529,8$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{I} = 838,7$
	SMORDWA.....	69 59 14,93	14,15	4,2264090. 8	
	NORMIN.....	42 51 25,40	24,61	4,0860750. 8	
	Somme	180 0 2,36	0,00		
		Corr. — 0,54	1,820 Exc.		
III. 19. T. 268. <i>Jan. XII. p. 352.</i>	KREMETZ.....	37 39 20,45	18,72	4,0860750. 8	$\odot = 808,1$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{I} = 1279,2$
	GURNIKI.....	81 52 21,72	19,99	4,2957147. 4	
	SMORDWA.....	60 28 23,02	21,29	4,2396782. 9	
	Somme	180 0 5,19	0,00		
		Corr. — 3,17	2,016 Exc.		
III. 20. T. 269. <i>Jan. XII. p. 353.</i>	MOSTY.....	89 15 47,82	47,31	4,2396782. 9	$\odot = 272,2$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{I} = 430,9$
	KREMETZ.....	44 21 54,53	54,01	4,0843322. 1	
	GURNIKI.....	46 22 19,20	18,68	4,0993525. 5	
	Somme	180 0 1,55	0,00		
		Corr. — 0,08	1,467 Exc.		
III. 21. T. 270. <i>Jan. XII. p. 353.</i>	MATWEJEWZI.....	59 7 54,10	54,05	4,0993525. 5	$\odot = 282,1$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{I} = 446,6$
	MOSTY.....	58 46 57,32	57,27	4,0977598. 4	
	KREMETZ.....	62 5 8,74	8,68	4,1119686. 4	
	Somme	180 0 0,16	0,00		
		Corr. + 1,18	1,339 Exc.		
III. 22. T. 271. <i>Jan. XII. p. 353.</i>	SSIWKI.....	61 26 42,36	42,39	4,1119686. 4	$\odot = 457,3$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{I} = 724,0$
	MATWEJEWZI.....	69 52 21,72	21,75	4,1409297. 1	
	MOSTY.....	48 40 55,83	55,86	4,0439702. 6	
	Somme	180 0—0,09	0,00		
		Corr. + 1,38	1,294 Exc.		
III. 23. T. 272. <i>Jan. XII. p. 354.</i>	BELOSERKA.....	44 11 35,20	34,50	4,0439702. 6	$\odot = 504,7$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{I} = 798,9$
	SSIWKI.....	69 37 54,84	54,14	4,1726494. 6	
	MATWEJEWZI.....	66 10 32,06	31,36	4,1620094. 8	
	Somme	180 0 2,10	0,00		
		Corr. — 0,65	1,450 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
III. 24.	TUROWKA.....	73° 48' 46,23	46,67	4,1620094. 8	$\mathcal{S} = 277,5$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 439,2$
T. 273.	BELOSENKA.....	54 32 1,87	2,32	4,0904464. 6	
Jan. XII. p. 354.	SSIWKI.....	51 39 10,56	11,01	4,0740416. 0	
	Somme	180 0—1,34	0,00		
		Corr. + 2,69	1,350 Exc.		
III. 25.	BASALIA.....	68 28 22,16	22,32	4,0740416. 0	$\mathcal{S} = 234,9$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 371,8$
T. 274.	TUROWKA.....	53 34 2,09	2,26	4,0110004. 6	
Jan. XII. p. 354.	BELOSENKA.....	57 57 35,25	35,42	4,0336748. 9	
	Somme	180 0—0,50	0,00		
		Corr. + 1,49	0,992 Exc.		
III. 26.	MONTSCHINZI.....	48 43 22,01	21,33	4,0336748. 9	$\mathcal{S} = 507,1$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 802,7$
T. 275.	BASALIA.....	73 23 42,25	41,57	4,1392320. 0	
Jan. XII. p. 354.	TUROWKA.....	57 52 57,78	57,10	4,0855946. 9	
	Somme	180 0 2,04	0,00		
		Corr. — 0,83	1,213 Exc.		
III. 27.	KATERINOWKA.....	66 8 4,50	4,47	4,0855946. 9	$\mathcal{S} = 463,5$ $\Omega = 1,583$ $\mathcal{I} = 733,8$
T. 282.	MONTSCHINZI.....	68 1 24,60	24,57	4,0916495. 3	
Jan. XII. p. 356.	BASALIA.....	45 50 30,98	30,96	3,9801856. 9	
	Somme	180 0 0,08	0,00		
		Corr. + 0,96	1,039 Exc.		

COMPARAISON ENTRE LES CÔTÉS FONDAMENTAUX L''' ET L'' .

La jonction de ces deux lignes a été effectuée par 27 triangles. Le dernier côté du triangle III. 27 est la valeur de L'' , calculée sur la valeur effective de L''' .

Valeur calculée de $L'' = 9554,0100$ toises; $\lg = 3,9801856.9$

» effective » » = 9553,6440 » » = 3,9801690.5, avec $F'' = 3256,8$.

Correction de la longueur calculée = — 0,3660 » » $U''' = -166.4$

$$(U''')^2 = 27689,0.$$

Somme des carrés de l'erreur moyenne :

$$\Sigma''' = F''' + (\mathcal{I}1 + \mathcal{I}2 + \dots + \mathcal{I}27) + F'' = 22099,7.$$

Groupe IV du tableau C.

TRIANGLES PRINCIPAUX ENTRE L'' ET L' .

$L'' =$ MONTSCHINZI — KATERINOWKA = 9553,6440 \mp 0,0844 toises, p. 103.

$\lg L'' = 3,9801690,5$, avec le carré de l'erreur moyenne $F'' = 3256,8$.

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
IV. 1 = III. 27.	BASALIA	45° 50'	30,96	3,9801690.5	$\odot = 442,9$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{T} = 701,1$
	KATERINOWKA	66 8	4,47	4,0855780.5	
	MONTSCHINZI	68 1	24,57	4,0916328.9	
	Somme		0,00		
IV. 2. T. 283. Jan. XII. p. 356.	KRIWOTSCHINZI	62 53 48,12	47,73	4,0916328.9	$\odot = 268,4$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{T} = 424,9$
	KATERINOWKA	57 32 51,18	50,79	4,0684104.0	
	BASALIA	59 33 21,87	21,48	4,0777222.7	
	Somme	180 0 1,17	0,00		
		Corr. + 0,03	1,199 Exc.		
IV. 3. T. 284. Jan. XII. p. 356.	FELSCHTIN	54 40 17,91	17,83	4,0777222.7	$\odot = 427,5$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{T} = 676,8$
	KRIWOTSCHINZI	69 32 52,90	52,83	4,1378348.1	
	KATERINOWKA	55 46 49,42	49,34	4,0835580.1	
	Somme	180 0 0,23	0,00		
		Corr. + 1,08	1,307 Exc.		
IV. 4. T. 285. Jan. XII. p. 357.	ALEXANDROWKA	53 25 7,97	8,33	4,0835580.1	$\odot = 303,7$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{T} = 480,7$
	FELSCHTIN	59 2 46,21	46,57	4,1121105.2	
	KRIWOTSCHINZI	67 32 4,75	5,10	4,1445587.6	
	Somme	180 0—1,07	0,00		
		Corr. + 2,47	1,395 Exc.		
IV. 5. T. 286. Jan. XII. p. 357.	TSCHERNOWODY	64 27 14,06	13,44	4,1445587.6	$\odot = 457,6$ $\Omega = 1,583$ $\mathfrak{T} = 724,4$
	FELSCHTIN	68 36 10,03	9,42	4,1582214.0	
	ALEXANDROWKA	46 56 37,76	37,14	4,0529667.0	
	Somme	180 0 1,85	0,00		
		Corr. — 0,44	1,412 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
IV. 6. T. 287. <i>Jan. XII. p. 357.</i>	BARANOWKA.....	45° 12' 26,28	25,21	4,0529667.0	$\text{S} = 597,0$ $\text{Q} = 1,583$ $\text{T} = 945,1$
	TSCHERNOWODY.....	77 13 4,34	3,27	4,1910196.7	
	FELSCHTIN.....	57 34 32,59	31,52	4,1283111.4	
	Somme	180 0 3,21	0,00		
		Corr. — 1,79	1,422 Exc.		
IV. 7. T. 288. <i>Jan. XII. p. 357.</i>	HANOWKA.....	57 22 23,94	24,16	4,1283111.4	$\text{S} = 273,7$ $\text{Q} = 1,583$ $\text{T} = 433,2$
	TSCHERNOWODY.....	57 38 3,34	3,56	4,1295710.5	
	BARANOWKA.....	64 59 32,05	32,28	4,1601434.0	
	Somme	180 0—0,67	0,00		
		Corr. + 2,25	1,579 Exc.		
IV. 8. T. 289. <i>Jan. XII. p. 357.</i>	KARATSCHIKOWZI.....	67 36 39,19	39,61	4,1601434.0	$\text{S} = 373,7$ $\text{Q} = 1,583$ $\text{T} = 591,5$
	HANOWKA.....	63 4 41,58	42,00	4,1443634.1	
	TSCHERNOWODY.....	49 18 37,97	38,39	4,0739962.1	
	Somme	180 0—1,26	0,00		
		Corr. + 2,73	1,471 Exc.		
IV. 9. T. 290. <i>Jan. XII. p. 358.</i>	SSUPRUNKOWZI.....	61 9 42,81	42,22	4,0739962.1	$\text{S} = 425,2$ $\text{Q} = 1,583$ $\text{T} = 673,1$
	HANOWKA.....	68 21 36,47	35,87	4,0997579.7	
	KARATSCHIKOWZI.....	50 28 42,50	41,91	4,0187701.2	
	Somme	180 0 1,78	0,00		
		Corr. — 0,67	1,108 Exc.		
IV. 10. T. 291. <i>Jan. XII. p. 358.</i>	SAGORJANE.....	44 53 30,29	30,06	4,0187701.2	$\text{S} = 645,9$ $\text{Q} = 1,583$ $\text{T} = 1022,4$
	SSUPRUNKOWZI.....	79 51 5,02	4,79	4,1632589.3	
	HANOWKA.....	55 15 25,38	25,15	4,0848297.0	
	Somme	180 0 0,69	0,00		
		Corr. + 0,51	1,202 Exc.		
IV. 11. T. 461. <i>Manusc. Bess.</i>	WOLTSCHENETZ.....	41 49 11,83	11,68	4,0848297.0	$\text{S} = 511,9$ $\text{Q} = 2,780$ $\text{T} = 1423,0$
	SAGORJANE.....	66 36 42,63	42,48	4,2236048.7	
	SSUPRUNKOWZI.....	71 34 6,00	5,84	4,2379690.3	
	Somme	180 0 0,46	0,00		
		Corr. + 1,40	1,857 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
IV. 12.	GWOSDAUTZI	59° 0' 45,66	45,45	4,2379690. 3	$\ominus = 490,2$ $\Omega = 1,693$ $\mathfrak{I} = 829,9$
T. 460.	WOLTSCHENETZ	72 15 53,53	53,31	4,2836993. 4	
Manusc. Bess.	SAGORJANE	48 43 21,45	21,24	4,1807888. 1	
	Somme	180 0 0,64	0,00		
		Corr. + 1,76	2,405 Exc.		
IV. 13.	BRITSCHANI	103 37 48,32	48,45	4,1807888. 1	$\ominus = 552,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathfrak{I} = 579,9$
T. 459.	GWOSDAUTZI	42 10 32,20	32,34	4,0201802. 5	
Manusc. Bess.	WOLTSCHENETZ	34 11 39,07	39,21	3,9429315. 8	
	Somme	180. 0—0,41	0,00		
		Corr. + 1,27	0,859 Exc.		

COMPARAISON ENTRE LES CÔTÉS FONDAMENTAUX L'' ET L' .

La jonction de ces deux lignes a été effectuée par 13 triangles. Le dernier côté du triangle IV. 13 est la valeur de L' , calculée sur la valeur effective de L'' .

Valeur calculée de $L' = 8768,6266$ toises; $\lg = 3,9429315.8$

» effective » » = 8768,3158 » » = 3,9429161.8, avec $F'' = 936,7$.

Correction de la longueur calculée = - 0,3108 » » $U'' = - 154,0$

$$(U'')^2 = 23716,0.$$

Somme des carrés de l'erreur moyenne :

$$\Sigma'' = F'' + (\mathfrak{I}1 + \mathfrak{I}2 + \dots + \mathfrak{I}13) + F' = 13699,5.$$

Groupe V du tableau C.

TRIANGLES PRINCIPAUX ENTRE L' ET L'' .
 $L' = \text{GWOSDAUTZI} - \text{BRITSCHANI} = 8768,3158 \mp 0,0417 \text{ toises, p. 103.}$
 $\lg L' = 3,9429161.8, \text{ avec le carré de l'erreur moyenne } F' = 936,7.$

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log' des côtés.	Quantités auxiliaires.
V. 1. T. 462. Manusc. Bess.	ROTUNDA	50° 42' 55,66	55,21	3,9429161.8	$\mathcal{S} = 311,6$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 327,2$
	GWOSDAUTZI	57 44 9,44	8,99	3,9813325.1	
	BRITSCHANI	71 32 56,24	55,80	4,0312499.8	
	Somme	180 0 1,34	0,00		
		Corr. — 0,57	0,767 Exc.		
V. 2. T. 463. Manusc. Bess.	LIPNIK	68 15 9,38	9,77	4,0312499.8	$\mathcal{S} = 157,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 165,1$
	ROTUNDA	45 38 32,40	32,79	3,9176155.5	
	GWOSDAUTZI	66 6 17,05	17,44	4,0243981.9	
	Somme	180 0 —1,17	0,00		
		Corr. + 1,95	0,782 Exc.		
V. 3. T. 464. Manusc. Bess.	TYRNOWO	48 30 6,64	6,12	4,0243981.9	$\mathcal{S} = 420,1$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 441,1$
	LIPNIK	66 44 37,55	37,03	4,1131266.9	
	ROTUNDA	64 45 17,37	16,85	4,1063344.1	
	Somme	180 0 1,56	0,00		
		Corr. — 0,36	1,196 Exc.		
V. 4. T. 465. Manusc. Bess.	RUDY	56 52 22,16	21,51	4,1063344.1	$\mathcal{S} = 402,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 422,4$
	TYRNOWO	67 53 48,23	47,59	4,1502196.8	
	LIPNIK	55 13 51,55	50,90	4,0979557.1	
	Somme	180 0 1,94	0,00		
		Corr. — 0,51	1,428 Exc.		
V. 5. T. 466. Manusc. Bess.	BOKSANO	47 49 18,97	18,11	4,0979557.1	$\mathcal{S} = 303,5$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 318,6$
	TYRNOWO	52 49 22,69	21,83	4,1294358.3	
	RUDY	79 21 20,92	20,06	4,2205648.2	
	Somme	180 0 2,58	0,00		
		Corr. — 0,98	1,598 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
V. 6. T. 467. Manusc. Bess.	KETROS BOKSANO TYRNOWO..... Somme	85° 15' 22,72 47 44 55,44 46 59 45,30 180 0 3,46	21,56 54,29 44,15 0,00	4,2205648.2 4,0914039.9 4,0861515.1	$\sigma = 282,1$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 296,2$
		Corr. — 2,02	1,444	Exc.	
V. 7. T. 468. Manusc. Bess.	WODENI KETROS BOKSANO Somme	54 34 34,21 38 18 18,49 87 7 8,73 180 0 1,43	33,73 18,01 8,26 0,00	4,0861515.1 3,9673398.4 4,1745056.4	$\sigma = 160,9$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 168,9$
		Corr. — 0,34	1,087	Exc.	
V. 8. T. 469. Manusc. Bess.	BELZY WODENI..... KETROS Somme	77 35 56,85 40 38 31,19 61 45 33,18 180 0 1,22	56,45 30,78 32,77 0,00	4,1745056.4 3,9985588.9 4,1297175.4	$\sigma = 134,5$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 141,2$
		Corr. + 0,04	1,264	Exc.	
V. 9. T. 470. Manusc. Bess.	TSCHUTULESCHTI. WODENI..... DELZY Somme	54 44 6,50 66 43 2,68 58 32 52,73 180 0 1,91	5,86 2,05 52,09 0,00	4,1297175.4 4,1808766.9 4,1487542.7	$\sigma = 386,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 405,6$
		Corr. — 0,23	1,679	Exc.	
V. 10. T. 471. Manusc. Bess.	UNKITESCHTI. TSCHUTULESCHTI. WODENI..... Somme	77 10 35,11 56 51 27,36 45 57 58,80 180 0 1,27	34,68 26,94 58,38 0,00	4,1487542.7 4,0826119.2 4,0164106.6	$\sigma = 356,7$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 374,5$
		Corr. — 0,09	1,179	Exc.	
V. 11. T. 472. Manusc. Bess.	ROSPOPENI..... TSCHUTULESCHTI..... UNKITESCHTI..... Somme	52 35 8,64 58 38 30,51 68 46 22,01 180 0 1,16	8,25 30,12 21,63 0,00	4,0164106.6 4,0478689.2 4,0859331.6	$\sigma = 305,2$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 320,5$
		Corr. — 0,12	1,041	Exc.	

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
V. 12.	SAGAIKANI	45° 45' 1",18	0",72	4,0859331.6	$\sigma = 625,8$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 657,1$
T. 473.	ROPOPENI	79 11 29,89	29,43	4,2230618.2	
Manusc. Bess.	TSCHUTULESCHTI	55 3 30,31	29,85	4,1445091.3	
	Somme	180 0 1,38	0,00		
		Corr. + 0,23	1,608 Exc.		
V. 13.	BOLOGAN	54 33 10,23	10,28	4,1445091.3	$\sigma = 643,1$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 675,2$
T. 474.	SAGAIKANI	79 58 50,93	50,98	4,2268634.0	
Manusc. Bess.	ROPOPENI	45 27 58,69	58,74	4,0865285.9	
	Somme	180 0—0,15	0,00		
		Corr. + 1,76	1,614 Exc.		
V. 14.	ZIGANESCHTI	59 18 56,94	56,42	4,0865285.9	$\sigma = 169,1$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 177,6$
T. 475.	BOLOGAN	45 10 11,79	11,27	4,0028025.1	
Manusc. Bess.	SAGAIKANI	75 30 52,83	52,31	4,1380043.0	
	Somme	180 0 1,56	0,00		
		Corr. — 0,42	1,145 Exc.		
V. 15.	PERESSETSCHINO	80 19 31,27	30,32	4,1380043.0	$\sigma = 346,4$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 363,7$
T. 476.	ZIGANESCHTI	54 18 52,82	51,86	4,0539047.5	
Manusc. Bess.	BOLOGAN	45 21 38,78	37,82	3,9964260.1	
	Somme	180 0 2,87	0,00		
		Corr. — 1,80	1,066 Exc.		
V. 16.	SSURUTSCHENI	41 6 21,26	20,88	3,9964260.1	$\sigma = 759,9$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 797,9$
T. 477.	PERESSETSCHINO	83 21 2,32	1,93	4,1756309.9	
Manusc. Bess.	ZIGANESCHTI	55 32 37,57	37,19	4,0947832.8	
	Somme	180 0 1,15	0,00		
		Corr. + 0,03	1,180 Exc.		
V. 17.	WODOLUI	42 53 56,74	56,19	4,0947832.8	$\sigma = 578,5$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 607,5$
T. 478.	SSURUTSCHENI	73 54 14,84	14,30	4,2444551.2	
Manusc. Bess.	PERESSETSCHINO	63 11 50,06	49,51	4,2124616.5	
	Somme	180 0 1,64	0,00		
		Corr. + 0,23	1,873 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
V. 18.	RESENI.....	46° 40' 30,88	30,32	4,2124616.5	$\odot = 539,0$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 566,0$
T. 479.	WODOLUI.....	74 26 54,65	54,09	4,3344456.6	
Manusc. Bess.	SSCRUTSCHENI.....	58 52 36,15	35,59	4,2831458.8	
	Somme	180 0 1,68	0,00		
		Corr. + 1,22	2,903	Exc.	
V. 19.	DSCHAMANA.....	85 11 2,28	1,48	4,2831458.8	$\odot = 262,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 275,4$
T. 480.	WODOLUI.....	46 42 11,69	10,90	4,1466994.8	
Manusc. Bess.	RESENI.....	48 6 48,41	47,62	4,1565267.6	
	Somme	180 0 2,38	0,00		
		Corr. — 0,45	1,930	Exc.	
V. 20.	PLOSKA.....	38 7 44,69	43,98	4,1565267.6	$\odot = 693,1$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 727,7$
T. 481.	DSCHAMANA.....	74 52 24,96	24,25	4,3506228.3	
Manusc. Bess.	WODOLUI.....	66 59 52,48	51,77	4,3299560.0	
	Somme	180 0 2,13	0,00		
		Corr. + 0,72	2,850	Exc.	
V. 21.	NOWO-KAUSCHANI...	63 20 56,62	55,58	4,3299560.0	$\odot = 883,9$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 928,1$
T. 482.	DSCHAMANA.....	81 32 57,98	56,94	4,3739970.0	
Manusc. Bess.	PLOSKA.....	35 6 8,52	7,48	4,1384324.6	
	Somme	180 0 3,12	0,00		
		Corr. — 0,32	2,800	Exc.	
V. 22.	NESSELRODE.....	44 58 16,76	16,25	4,1384324.6	$\odot = 600,4$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 630,4$
T. 483.	NOWO-KAUSCHANI...	77 16 58,07	57,57	4,2783790.2	
Manusc. Bess.	DSCHAMANA.....	57 44 46,69	46,18	4,2163782.7	
	Somme	180 0 1,52	0,00		
		Corr. + 0,61	2,127	Exc.	
V. 23.	NIKOLAJEWKA.....	66 32 12,10	11,45	4,2163782.7	$\odot = 358,9$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 376,8$
T. 484.	NESSELRODE.....	62 46 13,62	12,98	4,2028495.5	
Manusc. Bess.	NOWO-KAUSCHANI...	50 41 36,21	35,57	4,1424694.4	
	Somme	180 0 1,93	0,00		
		Corr. + 0,03	1,956	Exc.	

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
V. 24. T. 485. Manusc. Bess.	KULMSKAJA NESSELRODE NIKOLAJEWKA	56° 22' 57,40 77 18 27,26 46 18 36,74	56,93 26,80 36,27	4,1424694 . 4 4,2112091 . 4 4,0811452 . 8	$\sigma = 588,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 617,7$
	Somme	180 0 1,40	0,00		
		Corr. + 0,17	1,572 Exc.		
V. 25. T. 486. Manusc. Bess.	BASCHKALIA KULMSKAJA NESSELRODE	56 57 21,59 83 43 37,85 39 19 0,06	21,76 38,02 0,22	4,0811452 . 8 4,1551625 . 2 3,9595901 . 9	$\sigma = 800,6$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 840,6$
	Somme	180 0—0,50	0,00		
		Corr. + 1,55	1,051 Exc.		
V. 26. T. 487. Manusc. Bess.	DAURTSCHI KULMSKAJA BASCHKALIA	37 8 43,47 56 16 20,80 86 34 56,78	43,12 20,45 56,43	3,9595901 . 9 4,0986288 . 8 4,1778962 . 9	$\sigma = 539,7$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 566,7$
	Somme	180 0 1,05	0,00		
		Corr. + 0,05	1,099 Exc.		
V. 27. T. 488. Manusc. Bess.	MALOJAROSLAWETZKAJA DAURTSCHI KULMSKAJA	91 38 1,06 41 35 54,50 46 46 5,80	0,60 54,05 5,35	4,1778962 . 9 4,0001785 . 1 4,0405547 . 9	$\sigma = 253,5$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 266,1$
	Somme	180 0 1,36	0,00		
		Corr. — 0,30	1,057 Exc.		
V. 28. T. 489. Manusc. Bess.	TARAKLIA DAURTSCHI MALOJAROSLAWETZKAJA	52 8 12,05 70 46 20,65 57 5 29,34	11,37 19,97 28,66	4,0405547 . 9 4,1182879 . 8 4,0672563 . 2	$\sigma = 451,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 473,8$
	Somme	180 0 2,04	0,00		
		Corr. — 0,88	1,165 Exc.		
V. 29. T. 490. Manusc. Bess.	KAMBOLI TARAKLIA DAURTSCHI	67 46 31,99 58 46 39,96 53 26 47,95	32,03 39,99 47,98	4,0672563 . 2 4,0328306 . 8 4,0056609 . 6	$\sigma = 301,2$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 316,3$
	Somme	180 0—0,10	0,00		
		Corr. + 1,07	0,974 Exc.		

Ren voi.	Stations.	Angles observés.	Angles plans.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
V. 30.	BOLGRAD	58° 10' 25,31	25,44	4,0056609 . 6	$\sigma = 639,3$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 671,2$
T. 491.	TARAKLIA	78 27 33,32	33,45	4,0673502 . 1	
Manusc. Bess.	KAMDOLI	43 22 0,98	1,11	3,9131675 . 4	
	Somme	180 0—0,39	0,00		
		Corr. + 1,17	0,782	Exc.	
V. 31.	PANDAKLIA	47 24 45,97	46,25	3,9131675 . 4	$\sigma = 381,0$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 400,0$
T. 492.	BOLGRAD	61 51 15,19	15,47	3,9914888 . 6	
Manusc. Bess.	TARAKLIA	70 43 57,99	58,28	4,0211104 . 6	
	Somme	180 0—0,85	0,00		
		Corr. + 1,58	0,730	Exc.	
V. 32.	KARAKURT	58 53 32,93	32,21	4,0211104 . 6	$\sigma = 225,7$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 237,0$
T. 493.	PANDAKLIA	52 49 52,50	51,78	3,9899171 . 4	
Manusc. Bess.	BOLGRAD	68 16 36,74	36,01	4,0565438 . 0	
	Somme	180 0 2,17	0,00		
		Corr. — 1,25	0,917	Exc.	
V. 33.	KATLABUCH	77 52 13,56	13,24	4,0565438 . 0	$\sigma = 363,1$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 381,3$
T. 494.	KARAKURT	56 42 38,15	37,84	3,9885079 . 7	
Manusc. Bess.	PANDAKLIA	45 25 9,23	8,92	3,9189884 . 1	
	Somme	180 0 0,94	0,00		
		Corr. — 0,18	0,761	Exc.	
V. 34.	KATLABUCH-SSUCHOI..	49 27 13,10	12,70	3,9189884 . 1	$\sigma = 986,0$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 1035,3$
T. 495.	KATLABUCH	91 42 26,38	25,97	4,0380511 . 5	
Manusc. Bess.	KARAKURT	38 50 21,73	21,33	3,8356068 . 1	
	Somme	180 0 1,21	0,00		
		Corr. — 0,66	0,547	Exc.	
V. 35.	TASCHBUNAR II	89 50 41,85	41,66	3,8356068 . 1	$\sigma = 373,5$ $\Omega = 1,050$ $\mathcal{I} = 392,2$
T. 500.	KATLABUCH	48 27 21,01	20,83	3,7097678 . 0	
Manusc. Bess.	KATLABUCH-SSUCHOI..	41 41 57,69	57,51	3,6585745 . 8	
	Somme	180 0 0,55	0,00		
		Corr. — 0,33	0,225	Exc.	

COMPARAISON ENTRE LES CÔTÉS FONDAMENTAUX L' ET L'' .

La jonction de ces deux lignes a été effectuée par 35 triangles. Le dernier côté du triangle V. 35 est la valeur du côté L'' , calculée sur la valeur effective de L' . Nous avons :

Valeur calculée de $L'' = 4555,9041$ toises; $\lg = 3,6585745.8$

» effective » » = 4555,8509 » » = 3,6585695.0, avec $F'' = 225,8$.

Correction de la longueur calculée = $-0,0532$ » » $U'' = -50.8$

$(U'')^2 = 2580,6$.

Somme des carrés des erreurs moyennes :

$$\Sigma'' = F'' + (\mathfrak{I}1 + \mathfrak{I}2 + \dots + \mathfrak{I}35) + F'' = 17525,4.$$

§ 35. Tableau D. Triangles de continuation excédants. Voyez p. 90.

I. TRIANGLES DE CONTINUATION EXCÉDANTS AU NORD DU CÔTÉ FONDAMENTAL L' JUSQU'À
MÄKI-PÄÄLYS SUR L'ÎLE DE HOGLAND.

Le côté de départ est ici le côté TAMMIK — EDDAFER = L' , donné p. 103, $\lg = 3,8634892.6$.

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles réduits à 180° 0' 0''.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
1*. St. 4. <i>Gradm. I. p. 141.</i>	RAEKÜLL	49° 26' 29,27	29,29	3,8634892.6	$\mathfrak{S} = 1230,6$
	EDDAFER	96 23 29,13	29,16	3,9801153.0	$\Omega = 0,329$
	TAMMIK	34 10 1,53	1,55	3,7322565.9	$\mathfrak{I} = 404,9$
	Somme	180 0—0,07	0,00		
		Corr. + 0,45	0,376 Exc.		
2*. St. 5. <i>Gradm. I. p. 141.</i>	LEWALA	34 17 24,70	24,74	3,7322565.9	$\mathfrak{S} = 1462,3$
	RAEKÜLL	103 14 59,41	59,46	3,9697338.0	$\Omega = 0,329$
	EDDAFER	42 27 35,76	35,80	3,8108032.2	$\mathfrak{I} = 481,1$
	Somme	180 0—0,13	0,00		
		Corr. + 0,46	0,326 Exc.		

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles réduits à 180° 0' 0".	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
3*. St. 6. <i>Gradm.</i> I. p. 141.	WARRES-MÄGGI..... LEWALA..... RAEKÜLL.....	38° 50' 50,85 87 6 48,50 54 2 20,95	50,75 48,40 20,85	3,8108032 . 2 4,0128120 . 4 3,9215363 . 8	⊖ = 877,1 Ω = 0,329 ℑ = 288,5
	Somme	180 0 0,30	0,00		
		Corr. + 0,22	0,518 Exc.		
4*. St. 7. <i>Gradm.</i> I. p. 141.	HALLJALL..... WARRES-MÄGGI..... LEWALA.....	47 4 18,62 57 48 12,41 75 7 30,18	18,22 12,01 29,77	3,9215363 . 8 3,9843879 . 9 4,0420989 . 8	⊖ = 349,3 Ω = 0,329 ℑ = 114,9
	Somme	180 0 1,21	0,00		
		Corr. — 0,46	0,747 Exc.		
5*. St. 8. <i>Gradm.</i> I. p. 141.	HOHENKREUTZ..... HALLJALL..... WARRES-MÄGGI.....	64 56 24,67 35 55 4,99 79 8 31,23	24,37 4,69 30,94	4,0420989 . 8 3,8533968 . 6 4,0771895 . 7	⊖ = 101,9 Ω = 0,329 ℑ = 33,5
	Somme	180 0 0,89	0,00		
		Corr. — 0,15	0,741 Exc.		
6*. St. 9. <i>Gradm.</i> I. p. 142.	MÄKI-PÄÄLYS..... HALLJALL..... HOHENKREUTZ.....	16 20 16,58 64 36 4,13 99 3 41,74	15,51 3,82 40,67	4,0771895 . 7 4,5838769 . 7 4,6225702 . 5	
	Somme	180 0 2,45	0,00		
		Corr. + 1,89	4,344 Exc.		

L'angle HALLJAL n'a été observé que par deux mises, voyez *Gradm.* I. p. 134; les deux autres angles par 6 mises. Par cette cause, la correction + 1,89 de la somme des triangles a été distribuée, d'après les poids relatifs des angles 1, $\frac{1}{3}$ et 1, ou en raison de 1, 3, 1. Les angles sphériques ainsi corrigés ont les secondes 16,96, 5,27, 42,12. De ces chiffres un tiers de l'excès = 4,544, ou 1,848, a été ôté pour parvenir aux angles réduits à 180° 0' 0" du tableau. C'est l'unique cas d'une distribution inégale de l'erreur d'un triangle dans notre arc méridional, distribution non pas arbitraire, mais dictée par les règles du calcul de probabilité. Sur les quantités auxiliaires du triangle 6* voyez la *Note additionnelle* 1.

II. TRIANGLES DE CONTINUATION EXCÉDANTS AU SUD DU CÔTÉ FONDAMENTAL L'' JUSQU'À
STARO-NEKRASSOWKA SUR LE DANUBE.

Les triangles suivants partent du côté KATLABUCH-SSUCHOI — TASCHEUNAR II du triangle V. 35 p. 139;
 $\log = 3,7097678.0$.

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles réduits à 180° 0' 0".	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
7*. T. 501. Manusc. Bess.	KAIRAKLIA	54° 42' 31,87	31,62	3,7097678.0	$\mathcal{S} = 331,8$
	KATLABUCH-SSUCHOI..	62 19 30,52	30,28	3,7451933.8	$\Omega = 1,050$
	TASCHEUNAR II.....	62 57 58,35	58,10	3,7477072.8	$\mathcal{L} = 348,4$
	Somme	180 0 0,74	0,00		
		Corr. — 0,50	0,245 Exc.		
8*. T. 502. Manusc. Bess.	SSAFIANOWKA.....	63 24 44,24	43,80	3,7477072.8	$\mathcal{S} = 223,9$
	KAIRAKLIA	53 20 27,80	27,36	3,7005326.6	$\Omega = 1,050$
	KATLABUCH-SSUCHOI..	63 14 49,28	48,84	3,7470780.2	$\mathcal{L} = 235,1$
	Somme	180 0 1,32	0,00		
		Corr. — 1,08	0,241 Exc.		
9*. T. 503. Manusc. Bess.	DORSKA	58 38 8,66	8,51	3,7470780.2	$\mathcal{S} = 451,6$
	SSAFIANOWKA.....	70 28 21,51	21,37	3,7899565.7	$\Omega = 1,050$
	KAIRAKLIA	50 53 30,27	30,12	3,7055202.1	$\mathcal{L} = 474,2$
	Somme	180 0 0,44	0,00		
		Corr. — 0,18	0,257 Exc.		
10*. T. 504. Manusc. Bess.	ISMAÏL.....	72 37 58,21	59,14	3,7055202.1	$\mathcal{S} = 199,4$
	SSAFIANOWKA.....	49 6 38,34	39,28	3,6042931.4	$\Omega = 1,050$
	DORSKA	58 15 20,64	21,58	3,6554108.6	$\mathcal{L} = 209,4$
	Somme	180 0—2,81	0,00		
		Corr. + 2,98	0,167 Exc.		
11*. T. 505. Manusc. Bess.	STARO-NEKRASSOWKA.	63 6 7,13	7,96	3,6554108.6	$\mathcal{S} = 618,1$
	ISMAÏL.....	75 14 15,42	16,24	3,6905589.4	$\Omega = 1,050$
	SSAFIANOWKA.....	41 39 34,97	35,80	3,5277671.4	$\mathcal{L} = 649,0$
	Somme	180 0—2,48	0,00		
		Corr. + 2,62	0,142 Exc.		

§ 36. Tableau E des deux triangles auxiliaires.

I. TRIANGLE AUXILIAIRE POUR LA JONCTION DE L'OBSERVATOIRE DE DORPAT.

La distance KENSEL — ARROUOF du triangle C. I. 5, p. 113, $\log = 4,3419045.3$, est le côté de départ pour ce triangle.

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles réduits à $180^{\circ} 0' 0''$.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
12*.	DORPAT	95° 58' 26,34	26,30	4,3419045.3	$\mathcal{S} = 692,8$
St. 15.	ARROUOF	51 41 50,79	50,74	4,2390000.1	$\Omega = 0,329$
<i>Gradm.</i> I. p. 143.	KENSEL	32 19 43,01	42,96	4,0724399.5	$\mathcal{T} = 227,9$
	Somme	180 0 0,14	0,00		
		Corr. + 1,82	1,956 Exc.		

II. TRIANGLE AUXILIAIRE POUR LA JONCTION DU POINT ASTRONOMIQUE JACOBSTADT.

La distance DABORS-KALNS — KREUTZBURG du triangle C. I. 22, p. 116, $\log = 3,8264194.6$, est le côté de départ pour ce triangle.

Renvoi.	Stations.	Angles observés.	Angles réduits à $180^{\circ} 0' 0''$.	Log. des côtés.	Quantités auxiliaires.
13*.	JACOBSTADT	53° 53' 24,47	24,46	3,8264194.6	
St. 33.	KREUTZBURG	(122 10 33,19)	33,18	3,8466526.9	
<i>Gradm.</i> I. p. 146.	DABORS-KALNS	3 56 2,37	2,36	2,7554373.2	
	Somme	180 0 0,03	0,00		
			0,031 Exc.		

Dans ce triangle, il n'y a que deux angles mesurés à l'aide de l'instrument universel avec lequel toutes les autres mesures des angles de l'arc Baltique ont été faites. L'angle à KREUTZBURG est conclu des deux autres et placé pour cela en parenthèses. Pour avoir cependant un contrôle des degrés et des minutes, ce troisième angle a été mesuré avec un théodolite de petites dimensions, = $122^{\circ} 10' 26,2$, chiffre qui ne diffère que de 7,0 de l'angle conclu, en tout cas préférable. Aussi ne s'agissait il que de la petite distance de 569,4 toises, entre KREUTZBURG et JACOBSTADT. Voyez *Gradm.* I. p. 146 et la *Note additionnelle* 1.

CHAPITRE X.

EXACTITUDE DES MESURES ANGULAIRES.

§ 37. Principes de recherche.

L'appréciation de l'exactitude d'un résultat numérique quelconque, déduit d'une opération géodésique, réclame la connaissance du degré de précision, avec lequel la mesure des bases et celle des angles ont été effectuées. Les distances linéaires entre les différents points où l'observation des latitudes a été faite, sont le vrai but de nos opérations géodésiques; car ce sont ces distances qui, combinées avec les azimuts observés, donnent finalement les distances des parallèles. Dans un article précédent, nous avons discuté l'exactitude de nos bases. Examinons maintenant l'exactitude des angles de nos opérations. Les erreurs probables des bases et des angles une fois connues, la considération de la forme des triangles et de leur enchaînement, combinée avec celle de l'exactitude des azimuts observés, conduit à une appréciation de l'exactitude des distances trouvées entre les parallèles.

L'exactitude des angles observés se prononce le plus directement par les écarts qui ont lieu, dans les différents triangles, entre les sommes des trois angles et 180° + l'excès. Les écarts de nos triangles sont donnés dans les différents tableaux de triangles primitifs, p. 96 à p. 143. En retenant la division de notre opération en quatre régions, p. 4, qui forment, par la diversité des instruments et des méthodes d'observation employés, autant de sections distinctes, nous parvenons à l'aide de la totalité des écarts aux chiffres suivants.

Triangles.	Carré de l'erreur moy. d'un angle.	Erreur moyenne d'un angle.	Erreur probable d'un angle.
1. de l'arc Baltique	0,329	0,574	0,387
2. » » de Lithuanie	0,470	0,685	0,461
3. » » » Volynie	0,539	0,734	0,495
4. » » » Bessarabie	0,373	0,611	0,412

Il y a cependant de très-graves motifs qui nous engagent à ne point regarder ces chiffres sans exception comme de vraies expressions de l'exactitude moyenne des angles de nos différents arcs. En effet, les écarts ne donnent une juste mesure des erreurs probables que sous condition, que l'observation ait été faite sans la moindre préoccupation, et sans que quelques unes des mesures aient été rejetées ou remplacées par de nouvelles, pour obtenir un accord plus satisfaisant dans les sommes des angles. Certes l'histoire de la géodésie nous offre plusieurs exemples d'opérations dans lesquelles l'accord des sommes indique une exactitude presque impossible à atteindre, à l'aide des moyens employés pour la mesure des angles.

Dans les triangles dont les angles se mesurent aux centres des stations, il paraît très-difficile de se garantir entièrement contre l'influence d'une préoccupation, surtout si c'est le même individu qui observe sur les trois stations. Mais abstraction faite de cet argument, il y a, dans les angles des sections 2, 3, 4, une circonstance qui nous oblige à ne point fonder la recherche de l'exactitude des angles sur l'accord des triangles avec 180° + l'excès. M. de Tenner dit expressément, *Zanucku* vol. VIII. p. 399: «si la somme des erreurs des observations dépassait 3 secondes, les triangles ont été remesurés». Nous voyons bien que ce cas n'a été qu'exceptionnel, car il n'a eu lieu que pour trois triangles de Lithuanie. Combien de fois une nouvelle mesure a été employée pour l'arc de Volynie, je n'ai point trouvé indiqué. Certainement ces nouvelles mesures ont eu le mérite indubitable d'augmenter l'exactitude de l'opération totale. Mais en revanche, les mesures antérieures ayant été rejetées, une recherche des erreurs probables, par la voie des écarts entre la somme des trois angles et 180° + l'excès, est devenue inadmissible. Voilà pourquoi j'ai cru indispensable de faire cette recherche, pour les trois sections des opérations entre la Duna et le Danube, en abandonnant les écarts des sommes, par une voie tout-à-fait différente, et qui avait encore le mérite de se baser sur des données qui se dérobaient en quelque sorte à l'attention des observateurs. C'est uniquement pour les angles de l'arc Baltique que j'ai pu me servir sans aucune hésitation des écarts observés, comme le prouvera l'exposition suivante.

§ 38. Exactitude des angles de l'arc Baltique.

La manière d'après laquelle les angles de Livonie ont été mesurés et réunis pour la formation des triangles, met ces angles hors de toute objection tirée d'une préoccupation quelconque de la part de l'observateur. Voyez p. 91. Les écarts entre la somme des trois angles et 180° + l'excès, se trouvent *Gradmessung I.* p. 148, et dans nos tableaux p. 96, 113 à 116 et 140, 141, 143. La somme des carrés de ces écarts, dans les 31 triangles complets, étant 30,59, nous avons :

le carré de l'erreur moyenne d'un triangle	=	0,987
» » » » d'un angle	=	0,329
l'erreur moyenne » »	=	0,574
» probable » »	=	0,387.

La justesse de ces résultats, déduits des écarts des triangles, est contrôlée par la comparaison faite, entre les valeurs du même angle, obtenues dans les différentes mises, et leur moyenne. Voyez *Gradmessung I.* p. 137 et 138. Les 104 angles observés, depuis 1823 à 1827, par 607 mises, ce qui donne en moyenne 5,84 mises pour un angle*), accusent les chiffres suivants :

carré de l'erreur moyenne d'un angle observé dans une seule mise	÷	1,971
erreur moyenne » » » » » » » »	=	1,404
erreur probable » » » » » » » »	=	0,948
carré de l'erreur moyenne d'un angle déterminé par 5,84 mises	=	0,337
erreur moyenne » » » » » » » »	=	0,581
erreur probable » » » » » » » »	=	0,392.

Cette erreur probable d'un angle moyen, $\lambda = 0,392$, ne diffère que de 0,005 de l'autre, qu'a offerte l'accord des triangles. Aussi ce chiffre 0,392 doit-il être un peu trop fort, étant trouvé dans la supposition, qu'il n'y a, dans les différentes valeurs données par les mises, que des erreurs accidentelles. Cependant les erreurs régulières de division y ont eu leur part, et ces erreurs ont dû se détruire, pour la moyenne, par l'arrangement symétrique des mises. Voyez p. 28. Il s'en suit que les moyennes de toutes les mises de chaque angle sont plus exactes qu'elles ne le paraissent par la voie indiquée. La considération suivante jette une grande lumière sur ce point.

Choisissons les angles observés par 6 mises, en 1824 à 1827. Les points de départ de ces mises étant éloignés successivement de 15° , il est évident, qu'en combinant les mises I et IV, II et V, III et VI, éloignées dans chaque couple de 45° , nous obtiendrons trois moyennes dans lesquelles les corrections régulières de division, c. à d. celles qui sont des fonctions des arcs multiples, se détruisent chaque fois. Donc :

2. en comparant, pour chaque angle, les valeurs isolées des six mises à la moyenne générale, nous parvenons à des erreurs probables qui comprennent les effets des corrections régulières de division;

*) Les angles de 1823 ont été observés par cinq mises distantes de 18° . Depuis 1824 il y a eu 6 mises de 15° à 15° .

ℑ. en combinant les mises I et IV, II et V, III et VI à des moyennes partielles, et en comparant celles-ci à la moyenne générale, nous pourrions trouver des erreurs probables dans lesquelles les effets des corrections régulières de division n'agissent plus. Les erreurs probables ℑ doivent être plus petites que les ℔.

Il y a 69 angles observés par 6 mises, donc en tout 414 mises. J'ai trouvé :

d'après ℔,

la somme $[v^2] = 691,51$ pour 414 mises comparées à 69 moyennes; donc
pour une mise isolée :

$$\text{le carré de l'erreur moyenne d'un angle} = \frac{691,51}{414-69} = 2,004$$

$$\text{l'erreur moyenne } \gg \gg = 1,415$$

$$\text{l'erreur probable } \gg \gg = 0,955,$$

pour la moyenne des six mises :

$$\text{le carré de l'erreur moyenne d'un angle} = 0,334$$

$$\text{l'erreur moyenne } \gg \gg = 0,578$$

$$\text{l'erreur probable } \gg \gg = 0,390;$$

d'après ℑ,

la somme $[v^2] = 101,24$ pour 207 mises conjuguées, comparées à 69 moyennes; donc
pour un couple de deux mises conjuguées :

$$\text{le carré de l'erreur moyenne d'un angle} = \frac{101,24}{207-69} = 0,734$$

$$\text{l'erreur moyenne } \gg \gg = 0,856$$

$$\text{l'erreur probable } \gg \gg = 0,578,$$

pour la moyenne des trois couples conjugués :

$$\text{le carré de l'erreur moyenne d'un angle} = 0,244$$

$$\text{l'erreur moyenne } \gg \gg = 0,495$$

$$\text{l'erreur probable } \gg \gg = 0,334.$$

Voilà donc, ce qui a dû provenir, l'erreur probable en ℔, d'un angle moyen de six mises, 0,390, essentiellement plus fort que 0,334 en ℑ. Aussi le second chiffre donne-t-il la vraie valeur de l'erreur probable de l'angle déduit de l'accord des six mises, savoir celui qui est délivrée de l'influence des corrections régulières de division, détruites dans la moyenne.

Les angles de nos triangles étant déterminés en moyenne par 5,84 mises et non par 6 mises, il faut multiplier en ℑ le carré de l'erreur moyenne par $6,00 : 5,84 = 1,0274$, et nous aurons :

d'après B,

pour un angle obtenu par 5,84 mises :

$$\text{le carré de l'erreur moyenne} = 0,2512$$

$$\text{l'erreur moyenne} = 0,501$$

$$\text{l'erreur probable} = 0,3375.$$

Cette erreur probable $\kappa = 0,338$ est donc plus petite que celle qui a été trouvée par les écarts des triangles $\lambda = 0,392$. La différence est tout à fait légitime. Il est des circonstances extérieures, en dehors de l'instrument et de l'observateur, qui agissent sur les angles mesurés. Les effets de ces perturbations ne se prononcent qu'en partie minime dans les mesures répétées du même angle, attendu qu'ils sont à peu près les mêmes pour les différentes mesures, faites sous des conditions presque identiques. Mais ces perturbations doivent se prononcer dans la somme des trois angles; et nous trouvons que le carré de l'erreur moyenne d'un angle a éprouvé, par cet effet, une augmentation de $0,3375 - 0,2512 = 0,0863$. Mettons

$$\sqrt{\lambda^2 - \kappa^2} = \sqrt{0,392^2 - 0,338^2} = 0,198 = \mu;$$

ce μ nous indique l'effet probable des perturbations extérieures pour un angle moyen de 5,84 mises. En prenant $\chi = \mu : \sqrt{2} = 0,140$, ce chiffre χ donne l'effet probable des perturbations extérieures, pour chacune des deux directions qui forment un angle, pointé à peu près 12 fois. Parmi les causes des perturbations extérieures, il faut placer en premier lieu les phases des signaux, produites par une illumination latérale, puis la réfraction latérale, si elle existe. On voit par notre résultat que l'effet des phases a été réduit à un *minimum*, par suite de la forme et la figure exacte des signaux employés. Voyez p. 14. Quant aux réfractions latérales nous osons dire, que les opérations de l'arc Baltique n'en donnent pas le moindre indice.

§ 39. Exactitude des angles de l'arc de Lithuanie.

Les angles de cette opération ont été mesurés par trois différents instruments. Voyez p. 19. En général, il y a eu pour chaque angle deux séries, chacune de 20 répétitions. La comparaison des deux valeurs du même angle conduit à une évaluation de l'erreur probable de l'angle définitif qui est la moyenne des deux valeurs isolées. A partir de 1827, les répétitions ont été faites par les deux mouvements opposés, voyez p. 34, et une certaine différence s'est prononcée entre les angles *P*, observés par un mouvement positif, et les angles *N* du mouvement négatif, différence qui est en moyenne, pour l'arc de Lithuanie $m = - 0,61$, p. 23. En comparant maintenant les différents *N—P* avec cet *m* nous trouvons

les $(N - P - m)^2 = v^2$. La somme de ces v^2 divisée par $n - 1$, n étant le nombre des angles, fournit le carré de l'erreur moyenne d'un $N - P$, ou $\xi^2 = [v^2] : n - 1$; d'où se déduit ensuite le carré de l'erreur moyenne en $\frac{N+P}{2} = \frac{1}{4} \xi^2 = \theta^2$. Ce calcul ayant été fait séparément pour les trois instruments, j'ai trouvé les chiffres suivants :

Instrument.	ξ^2	θ^2	Pour un angle déf. = $\frac{N+P}{2}$	
			erreur moyenne.	erreur probable.
Cercle répéiteur de Troughton <i>T</i>	4,42	1,104	1,051	0,709
» » Baumann <i>B</i>	3,46	0,865	0,930	0,628
Théodolite de Reichenbach <i>R</i>	3,11	0,778	0,882	0,595

Nous avons indiqué, p. 20, qu'il y a eu 131 angles mesurés uniquement par *T*, 9 angles par *B*, 12 angles par *R*, et que 22 angles ont été mesurés par deux instruments, 6 par *T* et *B* et 16 par *T* et *R*, le nombre complet de répétitions ayant été fait pour chaque instrument. Pour un $\frac{T+B}{2}$ le θ^2 devient $(1,104 + 0,865) : 4 = 0,492$, pour un $\frac{T+R}{2}$ nous avons $\theta^2 = 0,471$. Avec ces données, il y a par conséquent :

pour 131 angles <i>T</i> ,	le carré de l'erreur moyenne	1,104
9 » <i>B</i> » » » » » »		0,865
12 » <i>R</i> » » » » » »		0,778
6 » $\frac{T+B}{2}$ » » » » » »		0,492
16 » $\frac{T+R}{2}$ » » » » » »		0,471.

Somme 174 angles.

Nous réunirons ces carrés en une moyenne, eu égard au nombre des angles de chaque espèce; ce qui nous fournit :

pour les 174 angles primitifs de l'arc de Lithuanie,

le carré de l'erreur moyenne d'un angle = 0,990

l'erreur moyenne » » = 0,995

l'erreur probable » » = 0,672.

§ 40. Exactitude des angles de l'arc de Volynie et de Podolie.

Il y a ici 40 triangles, observés à l'aide de quatre instruments *T*, *e*, *U*, *M*. Voyez p. 20. Pour l'exactitude des 90 angles, mesurés par répétition, savoir 53 angles *T*, 7 angles *e*, et 30 angles *M*, la recherche des erreurs probables a été faite exactement d'après la méthode indiquée pour l'arc de Lithuanie. Mais 35 angles *e*, 8 angles *U* et 5 angles *M* ont été mesurés, en employant la réitération par un nombre d'environ 40 mises. Dans ces 48 angles, la comparaison des chiffres obtenus, pour chaque angle, avec leur moyenne a servi de base de calcul. C'est ainsi que les chiffres suivants sont provenus :

Instrument.	ξ^2	σ^2	Pour un angle définitif	
			erreur moyenne.	erreur probable.
Cercle répéteur de Troughton <i>T</i>	7,45	1,862	1",365	0",921
Petit théodolite d'Ertel <i>e</i>	3,27	0,818	0,904	0,610
Instrument universel d'Ertel <i>U</i>	1,44	0,359	0,599	0,404
Théodolite No. 17. <i>M</i>	4,98	1,244	1,115	0,753

Les angles définitifs se subdivisent ici en 7 classes avec des σ^2 différents, savoir :

43 angles <i>T</i> avec le carré de l'erreur moyenne	=	1,862
21 » <i>e</i> » » » » » » »	=	0,818
7 » <i>U</i> » » » » » » »	=	0,359
31 » <i>M</i> » » » » » » »	=	1,244
8 » $\frac{e+e'}{2}$ » » » » » » »	=	0,409
6 » $\frac{T+e}{2}$ » » » » » » »	=	0,670
3 » $\frac{T+M}{2}$ » » » » » » »	=	0,777
1 » $\frac{T+U}{2}$ » » » » » » »	=	0,555.

Somme 120 angles.

En cherchant de nouveau le carré moyen pour tous les angles, nous aurons :

pour les 120 angles de l'arc de Volynie et de Podolie,

le carré de l'erreur moyenne d'un angle = 1,238

l'erreur moyenne » » = 1",113

l'erreur probable » » = 0",751.

§ 41. Exactitude des angles de l'arc de Bessarabie.

Les angles de Bessarabie ont été mesurés par deux instruments très-parfaits de Munich. Le théodolite de 12 pouces a été employé sur 46 stations, le grand instrument universel, de 13 pouces de diamètre, sur 5 stations. La répétition n'existe plus dans ces opérations. Les angles ont été mesurés par répétition à l'aide de 12 mises, distantes de $7^{\circ}5$, à un petit nombre d'exceptions près dans lesquelles le nombre des mises a été plus grand. Dans chaque mise, chaque objet a été pointé dans les deux positions renversés I et II de l'instrument, le cercle vertical se trouvant soit à droite soit à gauche. Si A et B désignent les chiffres obtenus pour une direction quelconque dans les positions I et II, nous aurons $c = \frac{A - (B + 180^{\circ})}{2}$ pour la valeur de la collimation de l'axe optique, trouvée par l'observation de cet objet. C'est la comparaison des différents c , de la même mise, trouvés par les différents objets, qui conduit à la connaissance de l'exactitude des mesures; car, si l'observation avait été d'une exactitude absolue, tous les c auraient dû être identiques. Je n'entrerai pas ici dans les détails du calcul, au reste très-simple, mais long, à cause du grand nombre de plus de deux mille c à comparer avec leur moyennes respectives. Il faut encore remarquer que les c et les erreurs probables, ainsi trouvés, sont exemptes de l'influence des corrections régulières de division, la lecture tombant dans les deux positions I et II sur les mêmes endroits du limbe. En outre, dans les angles obtenus à l'aide de 12 mises symétriquement distribuées sur le limbe, toutes les corrections de division évanouissent vis-à-vis des autres sources d'inexactitude. En laissant de côté les deux triangles T. 460 et T. 461, par des raisons que j'expliquerai après, voici le résultat de mes calculs :

pour 151 angles de Bessarabie,

le carré de l'erreur moyenne d'un angle = 0,705

l'erreur moyenne » » = 0,840

l'erreur probable » » = 0,567.

Les premiers angles mesurés en Bessarabie furent ceux des triangles T. 461 et 460, observés à l'aide du théodolite E . L'examen du journal fait voir que, dans ces mesures, l'observateur n'était pas encore tellement versé dans l'usage de son instrument, qu'il l'a été depuis, et que la difficulté des observations était considérablement augmentée, par suite de l'élévation considérable de l'instrument au dessus du sol, pour trois des quatre stations. Aussi avons-nous indiqué p. 8, que les autres angles de Bessarabie ont été mesurés, l'instrument étant soit placé directement sur le sol, soit élevé à de petites hauteurs peu dangéreuses. L'infériorité des angles des deux triangles indiqués s'étant prononcée distinctement, dans les valeurs des angles que donnaient les différentes mises, j'ai examiné chaque angle à part.

encore à l'aide des collimations, en retenant pour ces angles les mises supplémentaires, ajoutées par l'observateur pour augmenter la certitude du résultat. De cette manière je suis parvenu aux chiffres que voici :

Triangle			
	T. 460.	T. 461.	
le carré de l'erreur moyenne d'un angle	= 1,348	2,435	
l'erreur moyenne » »	= 1",161	1",560	
l'erreur probable » »	= 0",784	1",053.	

En combinant les deux derniers triangles aux autres, nous avons, pour la Bessarabie, en moyenne générale :

le carré de l'erreur moyenne d'un angle	= 0,721
l'erreur moyenne » »	= 0",849
l'erreur probable » »	= 0",573.

§ 42. Résumé et continuation de la recherche sur l'exactitude des angles.

1. Nous avons trouvé, pour les trois séries de M. de Tenner, les valeurs suivantes des carrés de l'erreur moyenne d'un angle :

	Par les écarts entre la somme des trois angles et 180° + l'excès. Φ	Par la recherche intrinsèque. Φ'	Rapport. $\Phi' : \Phi$
Pour les angles de Lithuanie	0,470	0,990	2,11
» » » » Volynie	0,539	1,238	2,30
» » » » Bessarabie	0,373	0,721	1,93

Il s'en suit que la nouvelle recherche a diminué le poids des angles à moins de la moitié, ou à 0,473 du poids indiqué par la somme des angles; elle en a diminué l'exactitude à 0,688. Or il est impossible que les angles soient plus sûrs que ne l'indiquent les Φ' ; au contraire ces Φ' sont encore trop faibles, par suite de certaines perturbations qui sont communes aux différentes mesures du même angle.

2. Les angles de Bessarabie sont supérieurs à ceux de Lithuanie et de Volynie, évidemment par l'emploi soit d'instruments plus accomplis, soit d'une méthode d'observation plus parfaite, enfin par l'établissement plus commode de l'instrument.

3. L'infériorité des angles de Volynie, vis-à-vis des angles de Lithuanie, n'est pas considérable, et doit être attribuée principalement à la plus grande difficulté, produite par les élévations excessives des instruments.
4. La supériorité de la mesure par réitération sur la mesure par répétition se prononce le plus distinctement dans le fait suivant. Le grand théodolite de Reichenbach *R* et l'instrument universel *U*, d'égales dimensions, ont été employés, le premier en Lithuanie pour 12 angles en répétant, le second en Volynie en réitérant, pour 8 angles. Dans toutes ces mesures les instruments étaient placés sur le sol. Nous avons le carré de l'erreur moyenne d'un angle, pour *R* en répétant, = 0,778, pour *U* en réitérant, = 0,359, donc réduit en dedans de la moitié. Voir p. 149 et 150.
5. Cette supériorité n'existe cependant que pour un instrument pourvu d'une division très-parfaite. L'instrument *M* nous offre un exemple inverse. Étant employé en Volynie d'abord par réitération, pour 5 angles, les résultats ont été, d'après l'accord des mises, si peu satisfaisants que M. de Tenner a dû, pour les autres 30 angles, revenir à la répétition, afin d'obtenir des angles satisfaisants. Il est évident, par ce fait, que la division de cet instrument a été très-imparfaite. Voyez p. 19.
6. Reste à savoir si, par les méthodes d'observation employées, ou par suite de perturbations extérieures, les angles de la même espèce ne sont pas devenus, en moyenne, soit trop forts, soit trop faibles. On peut examiner ce point, en cherchant la valeur moyenne arithmétique de tous les écarts entre la somme des trois angles et 180° + l'excès, eu égard aux signes des écarts. Nous trouvons, en nommant positifs les écarts qui réclament une correction positive des angles :

Pour les angles de	Nombre des écarts		Somme des écarts		Écart moyen d'un triangle $e =$
	positifs.	negatifs.	positifs.	negatifs.	
l'arc Baltique . . .	12	19	+ 12",17	— 10",95	+ 0",04 ± 0",12
» de Lithuanie	19	39	+ 13,61	— 42,55	— 0,50 ± 0,10
» Volynie . . .	22	18	+ 27,20	— 11,66	+ 0,39 ± 0,13
» Bessarabie ..	25	27	+ 24,67	— 18,14	+ 0,13 ± 0,10

Il se prononce, dans ce tableau, que les angles de l'arc Baltique et de Bessarabie, mesurés par réitération, n'indiquent aucune valeur réelle de e ; tandis que dans les angles de Lithuanie et de Volynie, gagnés à l'aide de la répétition, des valeurs réelles e se manifestent dont l'une est le quintuple, l'autre le triple de l'erreur probable. Nous avons, dans ce point, une nouvelle preuve de la supériorité de la mesure des angles simples par réitération, sur la répétition.

7. La table suivante contient le résumé des carrés de l'erreur moyenne = η , dans les 6 différentes espèces de triangles.

	η^2	
1) Angles de l'arc Baltique ..	0,329	p. 144,
2) » » Lithuanie.....	0,990	» 149,
3) » » Volynie.....	1,238	» 150,
4) » » Bessarabie	0,705	» 151,
5) » du triangle T. 460	1,348	» 152,
6) » » » T. 461	2,435	» 152.

Cependant ces chiffres ne sont pas encore entièrement comparables entre eux, car dans le η^2 de l'arc Baltique l'effet moyen des perturbations extérieures est compris, qui ne se trouve point dans les autres η^2 , déduits de l'accord des différentes mesures du même angle. Or nous avons vu que l'effet de ces perturbations dans les angles de l'arc Baltique augmente le carré de l'erreur moyenne de 0,0863, p. 148. Les phases des signaux étant l'agent principal dans ces perturbations, l'effet en a dû être plus fort sur les angles 2) à 6) que sur les 1), à cause de la forme pyramidale des signaux construits depuis la Duna jusqu'au Danube. Voyez p. 15. N'ayant aucun moyen direct pour déterminer cet effet, il faut recourir à l'estime, et je crois ne pas trop grever ces angles, en les supposant sujets à une perturbation double de celle qui a lieu dans les angles de Livonie, ou sujets à une hausse de $4.0,0863 = 0,345$ dans les carrés des erreurs moyennes. En ajoutant ce chiffre nous aurons, pour 2) à 6), les $\Omega = \omega^2 = \eta^2 + 0,345$, qui comprennent les effets des perturbations extérieures, que voici :

	ω^2	Poids $\pi = \frac{1}{\omega^2}$
pour les angles de l'arc Baltique	0,329	3,040
» » » » Lithuanie....	1,335	0,749
» » » » Volynie.....	1,583	0,632
» » » » Bessarabie....	1,050	} moyenne 1,066
» » » » T. 460.....	1,693	
» » » » T. 461.....	2,780	
pour l'arc total ...	1,134	0,884.

8. La table ci jointe présente le résumé des erreurs moyennes et probables, soit pour les angles primitifs ou observés, soit pour les angles corrigés, dans chaque triangle à part, à $180^\circ +$ l'excès; le ω'^2 des angles ainsi compensés étant $\frac{2}{3}\omega^2$. Voyez Note 1.

Angles	primitifs ou observés.			corrigés à 180° → l'excès.		
	Carré de l'erreur moy. $\Omega = \omega^2$	Erreur moyenne. ω	Erreur probable. ϵ	Carré de l'erreur moy. ω'^2	Erreur moyenne. ω'	Erreur probable. ϵ'
de l'arc Baltique...	0,329	0,574	0,387	0,219	0,469	0,317
» » de Lithuanie	1,335	1,155	0,779	0,890	0,943	0,636
» » Volynie....	1,583	1,258	0,849	1,055	1,027	0,693
» » Bessarabie..	1,050	1,025	0,692	0,700	0,837	0,565
du triangle T. 460	1,693	1,301	0,877	1,129	1,063	0,718
» » T. 461	2,780	1,667	1,125	1,853	1,361	0,918

9. Les $U' \dots U''$, donnés à la fin des groupes I à V du tableau **C**, p. 113 à 140, indiquent en général la différence logarithmique entre les deux valeurs d'un côté quelconque d'un groupe, obtenues en partant, dans le calcul, une fois de la base précédente, l'autre fois de la base suivante. Par conséquent ces U expriment aussi la différence logarithmique entre la valeur d'une base calculée sur la base précédente et sa valeur trouvée par la mesure directe. Si la mesure des bases elles-mêmes était d'une exactitude parfaite, si en même temps les angles des triangles qui font la jonction entre deux bases, jouissaient d'une précision absolue, tous les U seraient zéro. D'où suit qu'il existe une relation entre les différences $U' \dots U''$ et les erreurs commises dans les mesures des deux genres. Connaissant le montant probable de ces erreurs, on est à même de comparer le carré de l'erreur moyenne attendue W^2 au carré U^2 de la différence effectivement trouvée. Les différents W^2 ne sont autre chose que les Σ placés à la fin de chaque groupe, p. 118, p. 125, p. 130, p. 133, p. 140, où sont donnés également les U^2 . Voici le tableau des différents W^2 et U^2 qui se rapportent à nos cinq groupes.

Entre les bases	Carré effectif. U^2	Carré attendu. W^2
I. de SIMONIS et PONEDELI..... p. 118	$(U')^2 = 5506$	$\Sigma' = 10018$
II. » PONEDELI et OSSOWNITZA..... p. 125	$(U'')^2 = 15302$	$\Sigma'' = 24902$
III. » OSSOWNITZA et STARO-KONSTANTINOW p. 130	$(U''')^2 = 27689$	$\Sigma''' = 22100$
IV. » STARO-KONSTANTINOW et ROMANKAUTZI p. 133	$(U''')^2 = 23716$	$\Sigma'' = 13700$
V. » ROMANKAUTZI et TASCHDUNAR p. 140	$(U')^2 = 2581$	$\Sigma' = 17525$
Somme...	74794	88245

En divisant 74794 par 88245 nous trouvons les moyennes :

$$\frac{u^2}{w^2} = 0,847; \quad \frac{u}{w} = 0,920,$$

deux chiffres qui sont plus petits que l'unité.

Nous voilà donc parvenus à la conclusion importante, que l'accord des bases calculées et mesurées est de très-près tel qu'il fallait l'attendre, d'après les degrés d'exactitude assignés par nos recherches, § 24, § 25 et § 37 à § 41, aux mesures des bases et des angles. En tout cas les comparaisons ne fournissent aucun indice, que les différentes erreurs moyennes que nous avons adoptées, soient trop faibles.



CHAPITRE XI.

ANALYSE DE LA COMPENSATION A FAIRE DANS UNE SUITE DE TRIANGLES, PLUSIEURS CÔTÉS ÉTANT DONNÉS.

§ 43. Compensation de triangles, situés entre deux côtés donnés.

Planche XXV. fig. 1.

En désignant les logarithmes des deux côtés donnés par $\lg L$ et $\lg L'$,
avec les carrés des erreurs moyennes F et F' ,

on obtient en partant du $\lg L$ et à l'aide des triangles intermédiaires entre L et L' , corrigés à $180^\circ 0' 0''$,
une valeur calculée \dot{L}' qui diffère de la valeur effective L' de la quantité $U = \Delta \dot{L}' - \dot{L}' = 0$.

Soient, dans les triangles de jonction entre L et L' :

	pour le premier triang.			pour le second triang.		
les angles corrigés à $180^\circ 0' 0''$	C_1	A_1	B_1	C_2	A_2	B_2
les côtés calculés en partant de L	$c_1 = L$	a_1	b_1	c_2	a_2	b_2
les carrés des erreurs moyennes des angles primitifs		Ω_1			Ω_2	
les variations des $\lg \sin$ pour $1''$	γ_1	α_1	β_1	γ_2	α_2	β_2
Nous aurons à chercher les corrections des angles	c_1	a_1	b_1	c_2	a_2	b_2
et pour L et L' les corrections λ et λ' .	avec $a_1 = -(b_1 + c_1)$			$a_2 = -(b_2 + c_2)$		

et ainsi de suite jusqu'au dernier triangle avec l'index z.

Pour évaluer ces différentes corrections, il faut remplir les deux conditions que voici :

$$\lambda + [\beta b - \gamma c] - \lambda' = U \tag{1}$$

$$\frac{1}{F} \lambda^2 + \left[\frac{1}{\Omega} (b^2 + c^2 + (b+c)^2) \right] + \frac{1}{F'} \lambda'^2 = \text{minimum}. \tag{2}$$

En différentiant (2) et (1), on parvient à :

$$\frac{1}{F} \lambda d\lambda + \overbrace{\frac{1}{\Omega_1} (2b_1 + c_1) db_1 + \frac{1}{\Omega_1} (b_1 + 2c_1) dc_1}^{\text{premier triangle}} + \overbrace{\frac{1}{\Omega_2} (2b_2 + c_2) db_2 + \frac{1}{\Omega_2} (b_2 + 2c_2) dc_2}^{\text{second triangle}} + \dots + \frac{1}{F'} \lambda' d\lambda' = 0 \quad (3)$$

$$d\lambda + \beta_1 db_1 - \gamma_1 dc_1 + \beta_2 db_2 - \gamma_2 dc_2 + \dots - d\lambda' = 0. \quad (4)$$

En multipliant (4) par un coefficient indéterminé x , et en comparant les différents termes ainsi obtenus avec (3), nous parvenons aux équations suivantes qui déterminent toutes les inconnues :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = Fx \quad \begin{array}{l} \text{premier triangle} \\ b_1 = + \frac{\Omega_1}{3} (2\beta_1 + \gamma_1) x \\ c_1 = - \frac{\Omega_1}{3} (\beta_1 + 2\gamma_1) x \\ a_1 = + \frac{\Omega_1}{3} (\gamma_1 - \beta_1) x \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{second triangle} \\ b_2 = + \frac{\Omega_2}{3} (2\beta_2 + \gamma_2) x \dots \dots \\ c_2 = - \frac{\Omega_2}{3} (\beta_2 + 2\gamma_2) x \dots \dots \\ a_2 = + \frac{\Omega_2}{3} (\gamma_2 - \beta_2) x \dots \dots \end{array} \quad \text{etc.} \\ \lambda' = - F'x \end{array} \right\} \quad (5)$$

La substitution des valeurs trouvées (5) en (1) nous donne :

$$x \left\{ F + \frac{\Omega_1}{3} (\beta_1^2 + \gamma_1^2 + (\beta_1 + \gamma_1)^2) + \frac{\Omega_2}{3} (\beta_2^2 + \gamma_2^2 + (\beta_2 + \gamma_2)^2) + \dots + F' \right\} = U;$$

ou en remplaçant $\frac{\Omega}{3} (\beta^2 + \gamma^2 + (\beta + \gamma)^2)$ par \mathfrak{X} :

$$\begin{aligned} x(F + [\mathfrak{X}] + F') &= U \\ x &= \frac{U}{F + [\mathfrak{X}] + F'} = \frac{U}{\Sigma}. \end{aligned} \quad (6)$$

La substitution de cet x dans les équations (5) achève la détermination des inconnues, en en donnant les valeurs numériques. Enfin ces corrections appliquées aux quantités primitives : $\lg L$; C_1, A_1, B_1 ; C_2, A_2, B_2 ; ... $\lg L'$, fournissent les valeurs compensées

$$\begin{aligned} \lg \bar{L} &= \lg L + \lambda; \quad \lg \bar{L}' = \lg L' + \lambda'; \\ \bar{C}_1 &= C_1 + c_1, \quad \bar{A}_1 = A_1 + a_1, \quad \bar{B}_1 = B_1 + b_1; \quad \bar{C}_2 = C_2 + c_2, \dots \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Maintenant les changements partiels qu'éprouvent les logarithmes des côtés, par suite des corrections appliquées aux angles, s'expriment pour un $n^{\text{ième}}$ triangle par :

$$d \lg c_n = 0 \quad d \lg b_n = \beta_n b_n - \gamma_n c_n \quad d \lg a_n = \alpha_n a_n - \gamma_n c_n. \quad (8)$$

Les changements totaux de ces logarithmes, par l'effet combiné des triangles enchaînés, seront :

$$\left. \begin{aligned} \Delta \lg c_n &= \lambda + \overbrace{[d \lg b]}^{n-1} = Fx + \overbrace{[\mathfrak{X}]}^{n-1} x \\ \Delta \lg b_n &= \Delta \lg c_n + d \lg b_n \quad \Delta \lg a_n = \Delta \lg c_n + d \lg a_n. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Le calcul de $d \lg b_n$ se simplifie encore; car

$$\begin{aligned} \beta_n b_n &= \frac{\Omega_n}{3} (2\beta_n^2 + \beta_n \gamma_n) x \\ -\gamma_n c_n &= \frac{\Omega_n}{3} (\beta_n \gamma_n + 2\gamma_n^2) x \\ \hline d \lg b_n &= \frac{\Omega_n}{3} (\beta_n^2 + \gamma_n^2 + (\beta_n + \gamma_n)^2) x = \mathfrak{F}_n x. \end{aligned}$$

Donc pour un $n^{\text{ième}}$ triangle :

$$\Delta \lg b_n = \left(F + \left[\frac{n}{F} \right] \right) x = Mx \tag{10}$$

$$\Delta \lg a_n = \Delta \lg b_{n-1} + d \lg a_n. \tag{11}$$

Pour produire une idée précise de la marche du calcul indiqué, je choisis l'exemple d'une compensation à faire entre les deux côtés fondamentaux du groupe C. IV, composé de 13 triangles. Voyez p. 131 à 133 et Planche IV. Nous avons :

$$\lg L = \text{MONTSCHINZI-KATERINOWKA} = 3,9801690.5, \text{ avec } F = 3256,8$$

$$\lg L' = \text{GWOSDAUTZI-BRITSCHANI} = 3,9429161.8 \text{ avec } F' = 936,7$$

$$U = -154,0.$$

Pour les triangles IV. 1 à IV. 10, $\Omega = 1,583$; pour IV. 11, $\Omega = 2,780$;

pour IV. 12, $\Omega = 1,693$; pour IV. 13, $\Omega = 1,050$.

Triangles.	Var. des lg sin.	$-\frac{(2\gamma + \beta)}{\gamma - \beta} \frac{\gamma - \beta}{2\beta + \gamma}$	Triangles.	Var. des lg sin.	$-\frac{(2\gamma + \beta)}{\gamma - \beta} \frac{\gamma - \beta}{2\beta + \gamma}$	Triangles.	Var. des lg sin.	$-\frac{(2\gamma + \beta)}{\gamma - \beta} \frac{\gamma - \beta}{2\beta + \gamma}$
IV. 1.	$\gamma = 20,45$	$-49,41$	IV. 6.	$\gamma = 20,90$	$-55,18$	IV. 11.	$\gamma = 23,53$	$-54,07$
	$\alpha = 9,31$	$+11,94$		$\alpha = 4,77$	$+7,52$		$\alpha = 9,11$	$+16,52$
	$\beta = 8,51$	$+37,47$		$\beta = 13,38$	$+47,66$		$\beta = 7,01$	$+37,55$
2.	$\gamma = 10,78$	$-33,93$	7.	$\gamma = 13,48$	$-36,78$	12.	$\gamma = 12,65$	$-43,78$
	$\alpha = 13,39$	$-1,59$		$\alpha = 13,34$	$+3,66$		$\alpha = 6,74$	$-5,83$
	$\beta = 12,37$	$+35,52$		$\beta = 9,82$	$+33,12$		$\beta = 18,48$	$+49,61$
3.	$\gamma = 14,92$	$-44,16$	8.	$\gamma = 8,68$	$-35,47$	13.	$\gamma = 5,10$	$-20,79$
	$\alpha = 7,86$	$+0,60$		$\alpha = 10,69$	$-9,43$		$\alpha = 23,24$	$-36,09$
	$\beta = 14,32$	$+43,56$		$\beta = 18,11$	$+44,90$		$\beta = 30,99$	$+56,88$
4.	$\gamma = 15,62$	$-39,94$	9.	$\gamma = 11,60$	$-40,57$			
	$\alpha = 12,63$	$+6,92$		$\alpha = 8,35$	$-5,77$			
	$\beta = 8,70$	$+33,02$		$\beta = 17,37$	$+46,34$			
5.	$\gamma = 10,06$	$-39,80$	10.	$\gamma = 21,14$	$-56,88$			
	$\alpha = 8,25$	$-9,62$		$\alpha = 3,77$	$+6,54$			
	$\beta = 19,68$	$+49,42$		$\beta = 14,60$	$+50,34$			

	Corrections des angles.			$M =$ $F + \left[\frac{n}{1}\right]$	$Mx =$ $\Delta \lg b.$	$aa - \gamma c$ $= d \lg a.$	$\Delta \lg a.$
	$c = \gamma$	$a = \alpha c$	$b = \beta \gamma$				
$F = 3256,8$				3256,8	(- 36,61)		
Tr. 1. $\mathfrak{L} = 701,1$	+ 0,293	- 0,071	- 0,222	3957,9	- 44,49	- 6,65	- 43,26
2. » 424,9	+ 0,201	+ 0,010	- 0,211	4382,8	- 49,27	- 2,04	- 46,53
3. » 676,8	+ 0,262	- 0,004	- 0,258	5059,6	- 56,88	- 3,94	- 53,21
4. » 480,7	+ 0,237	- 0,041	- 0,196	5540,3	- 62,28	- 4,21	- 61,09
5. » 724,4	+ 0,236	+ 0,057	- 0,293	6264,7	- 70,42	- 1,90	- 64,18
6. » 945,1	+ 0,327	- 0,045	- 0,282	7209,8	- 81,05	- 7,04	- 77,46
7. » 433,2	+ 0,218	- 0,022	- 0,196	7643,0	- 85,92	- 3,23	- 84,28
8. » 591,5	+ 0,210	+ 0,056	- 0,266	8234,5	- 92,56	- 1,22	- 87,14
9. » 673,1	+ 0,241	+ 0,034	- 0,275	8907,6	- 100,13	- 2,52	- 95,08
10. » 1022,4	+ 0,337	- 0,039	- 0,298	9930,0	- 111,62	- 7,27	- 107,40
11. » 1423,0	+ 0,563	- 0,172	- 0,391	11353,0	- 127,62	- 14,82	- 126,44
12. » 829,9	+ 0,278	+ 0,037	- 0,315	12182,9	- 136,95	- 3,27	- 130,89
13. » 579,9	+ 0,082	+ 0,141	- 0,223	12762,8	- 143,47	+ 3,70	- 133,25
$F' = 936,7$				(13699,5)			
Somme $N = 13699,5$							

$$x = \frac{-154,0}{13699,5} = -0,01124; \quad \text{pour les tr. 4 à 10} \quad \frac{\Omega}{3} x = -0,00593; \quad \text{pour 11} \quad = -0,01042; \quad \text{pour 12} \quad = -0,00634; \quad \text{pour 13} \quad = -0,00393;$$

$$\lambda = 3256,8 x = -36,61 \quad \lambda' = -936,7 x = +10,53$$

$$\lg L = 3,9801690,5 \quad \lg L' = 3,9429161,8$$

$$\text{donc} \quad \lg \bar{L} = 3,9801653,9 \quad \lg \bar{L}' = 3,9429172,3.$$

\bar{L} et \bar{L}' sont les valeurs qu'ont prises les deux côtés fondamentaux, par suite de la compensation. Nous parvenons également aux logarithmes corrigés des côtés des différents triangles en ajoutant aux $\lg b$ et $\lg a$, donnés p. 131 à 133, les corrections respectives trouvées $\Delta \lg b$ et $\Delta \lg a$. F et F' étant les sommes des carrés des erreurs moyennes, respectives à chaque base et à ses triangles de rattachement, il est facile de prolonger la compensation jusqu'aux deux bases K'' et K' . En effet pour la base de STARO-KONSTANTINOW nous avons, p. 76, $E'' = 410,4$, pour celle de ROMANKAUTZI, p. 76, $E' = 47,1$.
Donc

$$\Delta \lg K'' = 410,4. - 0,01124 = -4,62; \quad \Delta \lg K' = -47,1. - 0,01124 = +0,53$$

$$\lg K'' = 3,6593429,27 \quad \lg K' = 3,4639070,94$$

$$\text{Pour les bases compensées} \quad \lg \bar{K}'' = 3,6593424,65$$

$$\lg \bar{K}' = 3,4639071,47.$$

§ 44. Compensation d'une suite de triangles situés entre plusieurs côtés donnés.

Planche XXV, fig. 2.

1. Trois côtés étant donnés.

Nous considérerons d'abord le cas de trois côtés L' , L'' , L''' donnés, qui est celui de notre figure. Supposons que le côté L'' soit un côté latéral, appartenant à un triangle qui peut être nommé *triangle-coïn*. Ce triangle est commun aux deux groupes I et II, des triangles situés entre L' et L'' et entre L'' et L''' . Quoiqu'un premier triangle-coïn dont L' ferait partie, n'existe pas, nous regardons le triangle à côté de L'' comme le second triangle-coïn et nous en désignons :

les trois angles par	R_2	S_2	T_2
avec le carré de l'erreur moyenne		\mathfrak{D}_2	
les variations des lg sin. par	ϱ_2	σ_2	τ_2
et les corrections des angles à trouver par	r_2	δ_2	t_2

Mais il faut remarquer que ce triangle-coïn, en tant qu'il appartient au groupe des triangles I, en forme le dernier ou z -ième triangle et qu'il fait le premier triangle du groupe II. D'où se font les synonymes suivants :

$$\begin{aligned} R_2 &= B'_2 = C''_2 \\ S_2 &= A'_2 = B''_2 \\ T_2 &= C'_2 = A''_2 \\ \mathfrak{D}_2 &= \Omega'_2 = \Omega''_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\mathfrak{D}_2}{3} (\varrho_2^2 + \tau_2^2 + (\varrho_2 + \tau_2)^2) = \frac{\Omega'_2}{3} ((\beta'_2)^2 + (\gamma'_2)^2 + (\beta'_2 + \gamma'_2)^2) = \mathfrak{F}'_2$$

$$\frac{\mathfrak{D}_2}{3} (\sigma_2^2 + \varrho_2^2 + (\sigma_2 + \varrho_2)^2) = \frac{\Omega''_2}{3} ((\beta''_2)^2 + (\gamma''_2)^2 + (\beta''_2 + \gamma''_2)^2) = \mathfrak{F}''_2.$$

Ce préambule fait, étendons la notation et l'analyse du § 43 au cas présent. Donc soit :

$$\lg L'' - \lg \overset{*}{L}'' = U' \qquad \lg L''' - \lg \overset{*}{L}''' = U'';$$

et nous aurons à satisfaire aux trois conditions que voici :

$$\lambda' + [\beta' b' - \gamma' c'] + \varrho_2 r_2 - \tau_2 t_2 - \lambda'' = U' \tag{1}$$

$$\lambda'' + [\beta'' b'' - \gamma'' c''] - \varrho_2 r_2 - \sigma_2 (r_2 + t_2) - \lambda''' = U'' \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{F'} (\lambda')^2 + \left[\frac{1}{\Omega'} ((b')^2 + (c')^2 + (b' + c')^2) \right] + \frac{1}{\Sigma_2} (r_2^2 + t_2^2 + (r_2 + t_2)^2) \\ & + \frac{1}{F''} (\lambda'')^2 + \left[\frac{1}{\Omega''} ((b'')^2 + (c'')^2 + (b'' + c'')^2) \right] + \frac{1}{F'''} (\lambda''')^2 \end{aligned} \right\} = \text{minimum.} \tag{3}$$

La différentielle de l'équation (3) est :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{F'} \lambda' d\lambda' + \frac{1}{\Omega_1'} (2b_1' + c_1') db_1' + \frac{1}{\Omega_1'} (b_1' + 2c_1') dc_1' + \dots + \frac{1}{\Sigma_2'} (2r_2 + t_2) dr_2 + \frac{1}{\Sigma_2'} (r_2 + 2t_2) dt_2 + \frac{1}{F''} \lambda'' d\lambda'' \\ & + \frac{1}{\Omega_1''} (2b_1'' + c_1'') db_1'' + \frac{1}{\Omega_1''} (b_1'' + 2c_1'') dc_1'' + \dots + \frac{1}{F''} \lambda''' d\lambda''' \end{aligned} \right\} = 0. \quad (4)$$

Celles des équations (1) et (2) sont :

$$d\lambda' + \beta_1' db_1' - \gamma_1' dc_1' + \dots + \rho_2 dr_2 - \tau_2 dt_2 - d\lambda'' = 0 \quad (5)$$

$$d\lambda'' + \beta_1'' db_1'' - \gamma_1'' dc_1'' + \dots - (\rho_2 + \sigma_2) dr_2 - \sigma_2 dt_2 - d\lambda''' = 0. \quad (6)$$

En multipliant les deux équations différentielles (5) et (6) par les deux coefficients indéterminés x' et x'' , nous aurons la somme :

$$\left\{ \begin{aligned} & x' d\lambda' + x' \beta_1' db_1' - x' \gamma_1' dc_1' + \dots + (x' \rho_2 - x'' (\rho_2 + \sigma_2)) dr_2 - (x' \tau_2 + x'' \sigma_2) dt_2 + (x'' - x') d\lambda'' - x'' d\lambda''' \\ & + x'' \beta_1'' db_1'' - x'' \gamma_1'' dc_1'' + \dots \end{aligned} \right\} = 0. \quad (7)$$

La comparaison entre (4) et (7) fournit à présent les expressions de toutes les inconnues à déterminer, en supposant x' et x'' connus. Nous avons :

$$\lambda' = F' x' \left\{ \begin{array}{l} b_1' = \frac{\Omega_1'}{3} (2\beta_1' + \gamma_1') x' \\ c_1' = -\frac{\Omega_1'}{3} (\beta_1' + 2\gamma_1') x' \\ a_1' = \frac{\Omega_1'}{3} (\gamma_1' - \beta_1') x' \\ \text{et symétriquement pour} \\ b_2' \quad , \quad c_2' \quad , \quad a_2' \\ b_3' \quad , \quad c_3' \quad , \quad a_3' \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ b_{z-1}' \quad , \quad c_{z-1}' \quad , \quad a_{z-1}' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} r_2 = \frac{\Sigma_2}{3} \left((2\rho_2 + \tau_2) x' - (2\rho_2 + \sigma_2) x'' \right) \\ t_2 = \frac{\Sigma_2}{3} \left(-(\rho_2 + 2\tau_2) x' + (\rho_2 - \sigma_2) x'' \right) \\ \delta_2 = \frac{\Sigma_2}{3} \left((\tau_2 - \rho_2) x' + (\rho_2 + 2\sigma_2) x'' \right) \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\lambda'' = F'' (x'' - x') \left\{ \begin{array}{l} b_2'' = \frac{\Omega_2''}{3} (2\beta_2'' + \gamma_2'') x'' \\ c_2'' = -\frac{\Omega_2''}{3} (\beta_2'' + 2\gamma_2'') x'' \\ a_2'' = \frac{\Omega_2''}{3} (\gamma_2'' - \beta_2'') x'' \end{array} \right. \lambda''' = -F''' x'' \quad (8)$$

et symétriquement pour

$$\begin{array}{ccc} b_3'' & , & c_3'' & , & a_3'' \\ b_4'' & , & c_4'' & , & a_4'' \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_2'' & , & c_2'' & , & a_2'' \end{array}$$

En substituant ces valeurs (8) en (1) et (2), nous obtenons les deux équations qui déterminent x' et x'' :

$$(F' + [\bar{\mathfrak{X}}']) + \mathfrak{U}_2 + F'' x' - (\mathfrak{F}_2 + F'') x'' = U' \quad (9)$$

$$- (\mathfrak{F}_2 + F'') x' + ([\bar{\mathfrak{X}}''] + \mathfrak{M}_2 + F''' + F''') x'' = U'' \quad (10)$$

dans lesquelles il est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_2 &= \frac{\Sigma_2}{3} (\rho_2^2 + \tau_2^2 + (\rho_2 + \tau_2)^2) = \mathfrak{X}'_2 \\ \mathfrak{F}_2 &= \frac{\Sigma_2}{3} (\rho_2 (2\rho_2 + \sigma_2 + \tau_2) - \sigma_2 \tau_2) \\ \mathfrak{M}_2 &= \frac{\Sigma_2}{3} (\rho_2^2 + \sigma_2^2 + (\rho_2 + \sigma_2)^2) = \mathfrak{X}''_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Donc en remplaçant, en (9) et (10), \mathfrak{U}_2 par \mathfrak{X}'_2 , \mathfrak{M}_2 par \mathfrak{X}''_2 :

$$(F' + [\bar{\mathfrak{X}}']) + F'' x' - (\mathfrak{F}_2 + F'') x'' = U' \quad (12)$$

$$- (\mathfrak{F}_2 + F'') x' + (F''' + [\bar{\mathfrak{X}}''] + F''') x'' = U'' \quad (13)$$

2. Plusieurs côtés étant donnés.

Prenons à présent un nombre quelconque ζ de côtés donnés. Quatre côtés latéraux successifs de ce nombre seront :

$$\dots L^{m-1} \qquad L^m \qquad L^{m+1} \qquad L^{m+2}$$

avec ... $\lg L^m - \lg L^m = U^{m-1}$; $\lg L^{m+1} - \lg L^{m+1} = U^m$; $\lg L^{m+2} - \lg L^{m+2} = U^{m+1}$.

Nous aurons, en consultant (12) et (13), la formule générale :

$$-(\delta_m + F^m) x^{m-1} + \Sigma^m x^m - (\delta_{m+1} + F^{m+1}) x^{m+1} = U^m. \quad (14)$$

Dans cette formule il est :

$$\Sigma^m = F^m + \left[\frac{\xi}{1} x^m \right] + F^{m+1} \quad (15)$$

$$\delta_m = \frac{\Delta_m}{3} (\rho_m (2\rho_m + \sigma_m + \tau_m) - \sigma_m \tau_m). \quad (16)$$

Nous ajoutons encore deux expressions symétriques avec δ_m , et que nous emploierons ci-après :

$$\mathfrak{G}_m = \frac{\Delta_m}{3} (\sigma_m (\rho_m + 2\sigma_m + \tau_m) - \rho_m \tau_m) \quad (17)$$

$$\mathfrak{H}_m = \frac{\Delta_m}{3} (\tau_m (\rho_m + \sigma_m + 2\tau_m) - \rho_m \sigma_m). \quad (18)$$

Le nombre ξ de côtés donnés, fournit $\xi - 1$ différents U , et autant de x , depuis U^1 jusqu'à $U^{\xi-1}$ et depuis x^1 jusqu'à $x^{\xi-1}$. Chaque équation U^m renferme trois x successifs, x^{m-1} , x^m et x^{m+1} . Pour $x^{m=}$ il n'y a point de x^{m-1} , et pour $x^{m=\xi-1}$ il n'existe point de x^{m+1} ; donc l'équation U^1 ne contient que x^1 et x^2 , l'équation $U^{\xi-1}$ ne montre que $x^{\xi-2}$ et $x^{\xi-1}$. Dès qu'un L^m est un côté transversal il n'existe point de triangle-coin avec l'index m , et $\delta_m = 0$, $\mathfrak{G}_m = 0$, $\mathfrak{H}_m = 0$.

Pour le calcul numérique des différents x , il faut soumettre les $\xi - 1$ équations au procédé de l'élimination, procédé très-simple, parce que chaque couple de deux équations successives U^m et U^{m+1} n'ont en commun que les deux inconnues x^m et x^{m+1} .

Les x étant trouvés, il faut faire le calcul des corrections à porter sur les angles de tous les triangles de chaque groupe. Prenons le groupe avec l'index m , situé entre les côtés fondamentaux L^m et L^{m+1} . En consultant l'expression (8) nous aurons :

$$\text{pour le premier triangle-coin avec l'index } m \quad \left\{ \begin{array}{l} r_m = \frac{\Delta_m}{3} ((2\rho_m + \tau_m) x^{m-1} - (2\rho_m + \sigma_m) x^m) \\ t_m = \frac{\Delta_m}{3} (-(\rho_m + 2\tau_m) x^{m-1} + (\rho_m - \sigma_m) x^m) \\ \hat{a}_m = \frac{\Delta_m}{3} ((\tau_m - \rho_m) x^{m-1} + (\rho_m + 2\sigma_m) x^m) \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$\text{pour les différents triangles } ABC \text{ avec l'index } m \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}_n^m = \frac{\Omega_n^m}{3} (2\beta_n^m + \gamma_n^m) x^m \\ \mathfrak{C}_n^m = -\frac{\Omega_n^m}{3} (\beta_n^m + 2\gamma_n^m) x^m \\ \mathfrak{A}_n^m = \frac{\Omega_n^m}{3} (\gamma_n^m - \beta_n^m) x^m \end{array} \right\} \quad (20)$$

Le second triangle-coin étant le premier triangle dans le groupe suivant, avec l'index $m+1$, on n'a qu'à échanger l'index m des expressions (19) contre $m+1$.

Quant aux corrections partielles des côtés, dans chaque triangle à part, les formules (8) conduisent aux expressions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{pour le premier côté fondamental} \quad d \lg L^m = E^m (x^m - x^{m-1}) \\
 \text{pour le premier triangle-coin avec} \\
 \text{l'index } m \text{ en partant du côté } L^m = r_m \quad \left\{ \begin{array}{l} d \lg t_m = -\mathfrak{F}_z^{m-1} x^{m-1} + \mathfrak{F}_m x^m \\ d \lg s_m = -\mathfrak{F}_m x^{m-1} + \mathfrak{F}_1^m x^m \end{array} \right. \\
 \text{pour les différents triangles } ABC: \quad d \lg b_n^m = \mathfrak{F}_n^m x^m; \quad d \lg a_n^m = \binom{n}{n} \alpha \alpha - \gamma \epsilon \\
 \text{pour le dernier triangle-coin qui a} \\
 \text{l'index } m+1 \quad \left\{ \begin{array}{l} d \lg b_z^m = d \lg r_{m+1} = d \lg L^{m+1} = \mathfrak{F}_z^m x^m - \mathfrak{F}_{m+1} x^{m+1} \\ d \lg a_z^m = d \lg s_{m+1} = d \lg b_1^{m+1} = \mathfrak{G}_{m+1} x^m + \mathfrak{G}_{m+1} x^{m+1} \end{array} \right.
 \end{array} \right\} (21)$$

Nous aurons en outre :

$$\left. \begin{array}{l}
 \Delta \lg b_n^m = d \lg L^m + d \lg s + \binom{n}{z} \mathfrak{F}^m x^m, \text{ si le triangle-coin avec l'index } m \\
 \text{existe, } L^m \text{ étant côté latéral;} \\
 \text{ou } \Delta \lg b_n^m = d \lg L^m + \binom{n}{1} \mathfrak{F}^m x^m, \quad , L^m \text{ étant côté transversal.} \\
 \Delta \lg a_n^m = \Delta \lg b_{n-1}^m + d \lg a_n^m.
 \end{array} \right\} (22)$$

Rien ne nous empêche d'étendre le calcul de compensation jusqu'aux bases elles-mêmes, à travers les triangles de rattachement qui s'étendent de chaque base K jusqu'à son côté fondamental L . La correction à ajouter à la valeur mesurée d'une base K^m , s'exprime simplement par :

$$d \lg K^m = E^m (x^m - x^{m-1}). \quad (23)$$



CHAPITRE XII.

CALCUL DE COMPENSATION, POUR LES 142 TRIANGLES PRINCIPAUX, EN DÉPENDANCE DES SIX CÔTÉS FONDAMENTAUX L' A L'' .

§ 45. Formation et résolution des 5 équations qui déterminent les coefficients indéterminés $x^f \dots x^v$.

Les quantités numériques U, F, Σ qui entrent dans les équations (14) du § 44, se trouvent dans le tableau **C**, p. 113 à 140. Les quantités $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$, relatives aux triangles-coins nous manquent. Les 5 groupes du tableau **C** nous offrent trois triangles-coins, savoir :

triangle **C**. II. 1. = I. 31, p. 118 et 119, = triangle-coin 2)

III. 1. = II. 39, p. 125 et 126, = " " 3)

IV. 1. = III. 27, p. 130 et 131, = " " 4).

Puis pour les triangles-coins :

2)	3)	4)
$D_2 = 1,335$	$D_3 = 1,335$	$D_4 = 1,583$
$\rho_2 = 28,67$	$\rho_3 = 31,14$	$\rho_4 = 20,45$
$\sigma_2 = 8,63$	$\sigma_3 = 4,19$	$\sigma_4 = 8,50$
$\tau_2 = 5,25$	$\tau_3 = 8,87$	$\tau_4 = 9,31$

donc par les formules (16) (17) (18), p. 164 :

$\mathfrak{F}_2 = 888,5$	$\mathfrak{F}_3 = 1027,5$	$\mathfrak{F}_4 = 591,8$
$\mathfrak{G}_2 = 196,5$	$\mathfrak{G}_3 = 90,2$	$\mathfrak{G}_4 = 209,7$
$\mathfrak{H}_2 = 111,7$	$\mathfrak{H}_3 = 209,5$	$\mathfrak{H}_4 = 233,7$

Tableau des quantités numériques des cinq équations.

p. 118, $U^I = -74,2$	p. 103, $F^I = 469,3$	p. 118, $\Sigma^I = 10017,5$	$\bar{\mathfrak{F}}_1 = 0,0$	
p. 125, $U^{II} = +123,7$	» $F^{II} = 418,7$	p. 125, $\Sigma^{II} = 24901,5$	$\bar{\mathfrak{F}}_2 = 888,5$	$-(\bar{\mathfrak{F}}_2 + F^{II}) = -1307,2$
p. 130, $U^{III} = -166,4$	» $F^{III} = 1742,0$	p. 130, $\Sigma^{III} = 22099,7$	$\bar{\mathfrak{F}}_3 = 1027,5$	$-(\bar{\mathfrak{F}}_3 + F^{III}) = -2769,5$
p. 133, $U^{IV} = -154,0$	» $F^{IV} = 3256,8$	p. 133, $\Sigma^{IV} = 13699,5$	$\bar{\mathfrak{F}}_4 = 591,8$	$-(\bar{\mathfrak{F}}_4 + F^{IV}) = -3848,6$
p. 140, $U^V = -50,8$	» $F^V = 936,7$	p. 140, $\Sigma^V = 17525,4$	$\bar{\mathfrak{F}}_5 = 0,0$	$-(\bar{\mathfrak{F}}_5 + F^V) = -936,7$
	» $F^{VI} = 225,8$		$\bar{\mathfrak{F}}_6 = 0,0$	

Avec ces chiffres nous parvenons aux cinq équations finales pour x^I à x^V .

Équations finales.

$$\begin{aligned}
 \text{I} & \quad + 10017,5 x^I - 1307,2 x^{II} = - 74,2 \\
 \text{II} & \quad - 1307,2 x^I + 24901,5 x^{II} - 2769,5 x^{III} = + 123,7 \\
 \text{III} & \quad - 2769,5 x^{II} + 22099,7 x^{III} - 3848,6 x^{IV} = - 166,4 \\
 \text{IV} & \quad - 3848,6 x^{III} + 13699,5 x^{IV} - 936,7 x^V = - 154,0 \\
 \text{V} & \quad - 936,7 x^{IV} + 17525,4 x^V = - 50,8.
 \end{aligned}$$

L'élimination conduit aux valeurs suivantes :

$x^I = - 0,0069450$	$\lg x^I = 7,84167n$
$x^{II} = + 0,0035402$	$\lg x^{II} = 7,54903$
$x^{III} = - 0,0095544$	$\lg x^{III} = 7,98020n$
$x^{IV} = - 0,0141756$	$\lg x^{IV} = 8,15154n$
$x^V = - 0,0036563$	$\lg x^V = 7,56304n.$

Nous ajoutons :

$x^I - x^0 = - 0,0069450$	$\lg(x^I - x^0) = 7,84167n$
$x^{II} - x^I = + 0,0104852$	$\lg(x^{II} - x^I) = 8,02058$
$x^{III} - x^{II} = - 0,0130946$	$\lg(x^{III} - x^{II}) = 8,11709n$
$x^{IV} - x^{III} = - 0,0046212$	$\lg(x^{IV} - x^{III}) = 7,66475n$
$x^V - x^{IV} = + 0,0105193$	$\lg(x^V - x^{IV}) = 8,02199$
$x^{VI} - x^V = + 0,0036563$	$\lg(x^{VI} - x^V) = 7,56304.$

§ 46. Bases et côtés fondamentaux, compensés.

J'appliquerai les $x^I \dots x^J$ que nous venons de fixer, en premier lieu, pour trouver les valeurs compensées \bar{K} et \bar{L} des bases $K^I \dots K^J$ et des côtés fondamentaux $L^I \dots L^J$. Nous avons, formules (23) et (21), p. 165 :

$$d \lg K^m = E^m (x^m - x^{m-1}); \quad d \lg L^m = F^m (x^m - x^{m-1}).$$

Les K et les carrés E des erreurs moyennes en K sont donnés p. 76. Donc :

	unités de la 7-me déc.		$\mu =$ un millionième.
$E^I = 26,9$	$d \lg K^I = - 0,19$	$\lg \bar{K}^I = 3,3645759.39$	$d K^I = - 0,04 \mu = - 0,00010$ toise.
$E^{II} = 418,7$	$d \lg K^{II} = + 4,39$	$\lg \bar{K}^{II} = 3,7821262.29$	$d K^{II} = + 1,01 \mu = + 0,00612$ »
$E^{III} = 396,6$	$d \lg K^{III} = - 5,19$	$\lg \bar{K}^{III} = 3,7573684.15$	$d K^{III} = - 1,19 \mu = - 0,00684$ »
$E^{IV} = 410,4$	$d \lg K^{IV} = - 1,90$	$\lg \bar{K}^{IV} = 3,6593427.37$	$d K^{IV} = - 0,44 \mu = - 0,00199$ »
$E^V = 47,1$	$d \lg K^V = + 0,50$	$\lg \bar{K}^V = 3,4639071.44$	$d K^V = + 0,11 \mu = + 0,00033$ »
$E^{VI} = 40,6$	$d \lg K^{VI} = + 0,15$	$\lg \bar{K}^{VI} = 3,4425183.73$	$d K^{VI} = + 0,03 \mu = + 0,00009$ »

Tous les dK sont inférieurs aux erreurs probables, inhérentes aux longueurs définitives des bases, et qui sont pour K^I, K^{II}, K^{III} en moyenne $= \mp 0,95 \mu$, pour $K^{IV}, K^V, K^{VI} = \mp 3,14 \mu$, p. 76. Il s'en suit que nous aurions pu négliger les inexactitudes des bases, sans préjudicier sensiblement aux résultats du calcul de compensation.

Nous avons les L et les carrés F des erreurs moyennes qui leur conviennent, p. 103, donc :

$F^I = 469,3$	$d \lg L^I = - 3,26$	$\lg \bar{L}^I = 3,8634889.3$
$F^{II} = 418,7$	$d \lg L^{II} = + 4,39$	$\lg \bar{L}^{II} = 3,7821262.3$
$F^{III} = 1742,0$	$d \lg L^{III} = - 22,81$	$\lg \bar{L}^{III} = 3,8947446.7$
$F^{IV} = 3256,8$	$d \lg L^{IV} = - 15,05$	$\lg \bar{L}^{IV} = 3,9801675.4$
$F^V = 936,7$	$d \lg L^V = + 9,85$	$\lg \bar{L}^V = 3,9429171.6$
$F^{VI} = 225,8$	$d \lg L^{VI} = + 0,83$	$\lg \bar{L}^{VI} = 3,6585695.8$

§ 47. Compensation des triangles des 5 groupes

C. I. à C. V., p. 113 à 140.

Il s'agit maintenant de calculer les corrections à appliquer aux angles, et puis les valeurs des logarithmes des côtés, correspondantes aux angles compensés, en parlant dans chaque groupe du côté fondamental \bar{L} déjà compensé. Les $\lg \bar{L}$ sont donnés p. 168. La première colonne des tableaux de ce paragraphe contient encore les renvois nécessaires, en indiquant où chaque triangle se trouve dans les tableaux du § 34, et le numéro qu'il porte dans le § 48 et sur nos planches II à X.

Les formules (20) et (19), p. 164, conduisent, pour les différents triangles, aux corrections des angles ϵ , α , β , ou t , δ , r , si ϵ 'est un triangle-coin. Les variations des $\lg \sin.$, pour $1''$, soit γ , α , β , soit τ , σ , ρ , sont placées dans la seconde colonne des tableaux de ce paragraphe. De ces variations se déduisent les différents coefficients:

$-2\gamma - \beta$						pour le calcul de ϵ , formule (20)
$\gamma - \beta$						" " " " α " "
$2\beta + \gamma$						" " " " β " "
$- \rho - 2\tau$	$\epsilon!$	$\rho - \sigma$				" " " " t " (19)
$\tau - \rho$	"	$\rho + 2\sigma$				" " " " δ " "
$2\rho + \tau$	"	$-2\rho - \sigma$				" " " " r " "

Tous ces coefficients qui se contrôlent par la circonstance que, dans chaque triangle, la somme des trois coefficients est zéro, se trouvent placés du côté gauche de la troisième colonne, et sont à multiplier par les $\xi = \frac{\Omega}{3} x$ ou $\frac{\Delta}{3} x$ correspondants, pour fournir immédiatement les corrections désirées des angles, placées du côté droit de la même troisième colonne. En tête de chaque groupe je donnerai les différents ξ qui lui conviennent, d'après les carrés des erreurs moyennes auxquels les triangles sont sujets. Ces Ω ($=\Delta$ pour le triangle-coin) se trouvent, pour tous les triangles, dans les tableaux p. 113 à 140.

Les différentes corrections des angles, ajoutés aux angles plans des tableaux C., p. 113 à 140, donnent les angles plans compensés de nos triangles, tels qu'ils sont consignés dans la quatrième colonne des tableaux G. de ce paragraphe.

Les expressions (21) et (22), p. 165, servent à calculer directement les corrections à porter sur les logarithmes des côtés contenus dans les tableaux p. 113 à 140. Cependant je n'ai employé ces formules que pour des contrôles de calcul; car j'ai préféré de faire une nouvelle résolution des triangles avec les

angles déjà compensés, et qui donnait d'un seul coup les côtés compensés. Aussi ce nouveau calcul a-t-il son contrôle rigoureux dans le troisième côté du dernier triangle de chaque groupe, côté qui doit provenir identique avec le côté fondamental \bar{L} du groupe suivant. Mais pour faire ce calcul il faut retenir la huitième et la neuvième décimale des lgsin., tels qu'ils se trouvent par l'interpolation des tables à 7 décimales (de Taylor), vu que les changements des lgsin. tombent par préférence sur ces places.

Voici l'accord qui s'est présenté dans mes calculs :

Groupe.	Log. de départ.	Résultat du nouveau calcul.	Correc. du calcul.
	$\lg \bar{L}' = 3,8634889.3$		
I	$\lg \bar{L}'' = 3,7821262.3$	$\lg \bar{L}'' = 3,7821262.46$	— 0.16
II	$\lg \bar{L}''' = 3,8947446.7$	$\lg \bar{L}''' = 3,8947446.47$	+ 0.23
III	$\lg \bar{L}'''' = 3,9801675.4$	$\lg \bar{L}'''' = 3,9801675.45$	— 0.05
• IV	$\lg \bar{L}'''' = 3,9429171.6$	$\lg \bar{L}'''' = 3,9429171.70$	— 0.10
V	$\lg \bar{L}'''' = 3,6585695.8$	$\lg \bar{L}'''' = 3,6585695.79$	+ 0.01

Pour faire disparaître ces différences insignifiantes, elles ont été distribuées sur la totalité des triangles de chaque groupe.

La dernière colonne des tableaux **G. I.** à **G. V.** de ce paragraphe contient les logarithmes ainsi compensés des côtés.

G. I. Calcul de compensation pour le groupe C. I.

p. 113 à 118.

$$x' = -0,0069450 \quad x'' = +0,0035402, \text{ p. 167.}$$

Triangles.	Ω	$\xi' = \frac{1}{3}\Omega x'$	$\xi'' = \frac{1}{3}\Omega x''$
I. 1 à 22	0,329	- 0,000762	
23	1,221	- 0,002827	
24	1,055	- 0,002442	
25 à 30	1,335	- 0,003091	
31	1,335	- 0,003091	+ 0,001575.

Triangle	$\frac{\gamma}{\alpha \beta}$	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
I. 1. p. 113. No. 149.	21,00 10,42 7,14	- 49,14 ξ' + 13,86 + 35,28	= + 0,037 - 0,010 - 0,027	45° 4' 41,274 63 40 14,647 71 15 4,079	3,8634889,3 3,9658465,7 3,9897334,1
I. 2. p. 113. No. 148.	14,20 10,56 11,85	- 40,25 + 2,35 + 37,90	+ 0,031 - 0,002 - 0,029	56 0 43,041 63 21 51,218 60 37 25,741	3,9897334,1 4,0223745,9 4,0113244,4
I. 3. p. 113. No. 147.	35,64 11,29 0,87	- 72,15 + 34,77 + 37,38	+ 0,055 - 0,026 - 0,029	30 34 53,495 61 47 58,544 87 37 7,961	4,0113244,4 4,2499319,6 4,3044330,5
I. 4. p. 113. No. 146.	4,58 16,26 17,69	- 26,85 - 13,11 + 39,96	+ 0,020 + 0,010 - 0,030	77 43 9,260 52 19 49,640 49 57 1,100	4,3044330,5 4,2129639,7 4,1984240,3
I. 5. p. 113. No. 144.	25,90 11,50 3,89	- 55,69 + 22,01 + 33,68	+ 0,042 - 0,017 - 0,025	39 6 18,352 61 21 46,973 79 31 54,675	4,1984240,3 4,3419035,8 4,3912810,8
I. 6. p. 114. No. 143.	6,66 13,10 18,01	- 31,33 - 11,35 + 42,68	+ 0,024 + 0,009 - 0,033	72 26 18,554 58 6 19,689 49 27 21,757	4,3912810,8 4,3409278,9 4,2927696,6

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
I. 7. p. 114. No. 142.	6,33 45,00 3,09	— 15,75 ξ' + 3,24 + 12,51	= + 0,012 — 0,002 — 0,010	73° 16' 30,702 25 4 2,578 81 39 26,720	4,2927696.6 3,9385829.7 4,3069209.8
I. 8. p. 114. No. 141.	4,04 25,16 11,70	— 19,78 — 7,66 + 27,44	+ 0,015 + 0,006 — 0,021	79 8 0,565 39 55 34,946 60 56 24,489	4,3069209.8 4,1221805.2 4,2563463.9
I. 9. p. 114. No. 140.	— 4,19 36,36 18,51	— 10,13 — 22,70 + 32,83	+ 0,008 + 0,017 — 0,025	101 15 58,408 30 4 0,947 48 40 0,645	4,2563463.9 3,9646444.7 4,1403687.2
I. 10. p. 114. No. 139.	6,29 74,96 — 0,35	— 12,23 + 6,64 + 5,59	+ 0,009 — 0,005 — 0,004	73 21 15,389 15 41 30,465 90 57 14,146	4,1403687.2 3,5910676.7 4,1589002.8
I. 11. p. 114. No. 138.	— 1,13 33,88 14,72	— 12,46 — 15,85 + 28,31	+ 0,010 + 0,012 — 0,022	93 6 39,690 31 51 12,352 55 2 7,958	4,1589002.8 3,8819675.2 4,0730938.6
I. 12. p. 115. No. 137.	28,94 10,06 3,90	— 61,78 + 25,04 + 36,74	+ 0,047 — 0,019 — 0,028	36 2 42,697 64 27 1,601 79 30 15,702	4,0730938.6 4,2587129.4 4,2960763.2
I. 13. p. 115. No. 136.	26,85 — 8,11 35,31	— 89,01 — 8,46 + 97,47	+ 0,068 + 0,006 — 0,074	38 6 34,278 111 4 46,626 30 48 39,096	4,2960763.2 4,4755934.7 4,2151182,1
I. 14. p. 115. No. 135.	20,09 34,53 — 4,58	— 35,60 + 24,67 + 10,93	+ 0,027 — 0,019 — 0,008	46 20 54,007 31 22 56,891 102 16 9,102	4,2151182,1 4,0722778.2 4,3456154.6
I. 15. p. 115. No. 134.	5,55 22,76 11,20	— 22,30 — 5,65 + 27,95	+ 0,017 + 0,004 — 0,021	75 13 16,017 42 46 57,944 61 59 46,039	4,3456154.6 4,1922368.2 4,3061453.9

Triangolo	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
I. 16. p. 115. No. 133.	9,53 19,31 8,99	- 28,05 ξ' + 0,54 + 27,51	= + 0,021 - 0,000 - 0,021	65° 38' 21,891 47 28 45,960 66 52 52,149	4,3061453.9 4,2141305.1 4,3102851.2
I. 17. p. 115. No. 132.	18,00 - 5,01 41,10	- 77,10 - 23,10 + 100,20	+ 0,059 + 0,018 - 0,077	49 28 47,169 103 23 59,558 27 7 13,273	4,3102851.2 4,4173835.9 4,0882031.4
I. 18. p. 116. No. 131.	27,57 10,36 4,16	- 59,30 + 23,41 + 35,89	+ 0,045 - 0,018 - 0,027	37 22 54,885 63 47 33,032 78 49 32,083	4,0882031.4 4,2578144.9 4,2966124.9
I. 19. p. 116. No. 130.	- 2,55 43,25 13,60	- 8,50 - 16,15 + 24,65	+ 0,007 + 0,012 - 0,019	96 53 36,727 25 57 50,802 57 8 32,471	4,2966124.9 3,9410471.8 4,2240536.4
I. 20. p. 116. No. 129.	1,43 14,03 27,37	- 30,23 - 25,94 + 56,17	+ 0,023 + 0,020 - 0,043	86 5 15,013 56 19 51,340 37 34 53,647	4,2240536.4 4,1453226.2 4,0103186.6
I. 21. p. 116. No. 128.	31,42 15,76 - 1,10	- 61,74 + 32,52 + 29,22	+ 0,047 - 0,025 - 0,022	33 49 46,217 53 11 6,085 92 59 7,698	4,0103186.6 4,1680810.9 4,2640892.9
I. 22. p. 116. No. 127.	12,01 - 4,17 62,96	- 86,98 - 50,95 + 137,93	+ 0,066 + 0,039 - 0,105	60 18 44,616 101 11 56,769 18 29 18,615	4,2640892.9 4,3168506.5 3,8264161.3
I. 23. p. 116. No. 125.	12,95 7,39 17,10	- 43,00 - 4,15 + 47,15	+ 0,121 + 0,012 - 0,133	58 24 27,601 70 39 36,462 50 55 55,937	3,8264161.3 3,8708545.2 3,7861660.4
I. 24. p. 117. No. 124.	30,82 5,50 7,54	- 69,18 + 23,28 + 45,90	+ 0,169 - 0,057 - 0,112	34 20 41,449 75 21 14,173 70 18 4,378	3,7861660.4 4,0204079.3 4,0085642.1

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
I. 25. p. 117. No. 123.	16,77 29,41 -1,08	- 32,46 ξ' + 17,85 + 14,61	= + 0,100 - 0,055 - 0,045	51° 27' 33,980 35 36 1,045 92 56 24,975	4,0085642.1 3,8802823.8 4,1146924.5
I. 26. p. 117. No. 122.	16,65 15,92 5,47	- 38,77 + 11,18 + 27,59	+ 0,120 - 0,035 - 0,085	51 39 26,820 52 54 4,935 75 26 28,245	4,1146924.5 4,1219857.5 4,2060275.0
I. 27. p. 117. No. 121.	9,09 8,85 20,24	- 38,42 - 11,15 + 49,57	+ 0,119 + 0,034 - 0,153	66 39 29,189 67 12 32,874 46 7 57,937	4,2060275.0 4,2078062.0 4,1010141.8
I. 28. p. 117. No. 120.	3,88 37,26 7,26	- 15,02 - 3,38 + 18,40	+ 0,047 + 0,010 - 0,057	79 33 20,457 29 28 26,420 70 58 13,123	4,1010141.8 3,8002604.0 4,0838625.5
I. 29. p. 117. No. 119.	8,60 19,37 9,90	- 27,10 - 1,30 + 28,40	+ 0,084 + 0,004 - 0,088	67 47 25,404 47 23 37,264 64 48 57,332	4,0838625.5 3,9842330.8 4,0739643.1
I. 30. p. 118. No. 118.	14,55 3,29 22,17	- 51,27 - 7,62 + 58,89	+ 0,158 + 0,024 - 0,182	55 21 10,248 81 7 33,844 43 31 15,908	4,0739643.1 4,1535094.9 3,9967199.3
I. 31. p. 118. No. 117.	$\tau = 5,25$ $\sigma = 8,63$ $\rho = 28,67$	$\left\{ \begin{array}{l} - 39,17 \xi' \\ + 20,04 \xi'' \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} - 23,42 \xi' \\ + 45,93 \xi'' \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} + 62,59 \xi' \\ - 65,97 \xi'' \end{array} \right\}$	$\left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} - 39,17 \xi' \\ + 20,04 \xi'' \end{array} \right\}} \right\} = + 0,153$ $\left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} - 23,42 \xi' \\ + 45,93 \xi'' \end{array} \right\}} \right\} = + 0,145$ $\left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} + 62,59 \xi' \\ - 65,97 \xi'' \end{array} \right\}} \right\} = - 0,298$	75 59 39,923 67 42 31,055 36 17 49,022	3,9967199.3 3,9760933.2 3,7821262.3

G. II. Calcul de compensation pour le groupe II.

p. 119 à 125.

$$x'' = + 0,0035402 \quad x''' = - 0,0095544.$$

Triangles	Ω	$\xi'' = \frac{1}{3}\Omega x''$	$\xi''' = \frac{1}{3}\Omega x'''$
II. 1 à 22	1,335	+ 0,001575	
23	1,118	+ 0,001319	
24	1,097	+ 0,001294	
25	1,235	+ 0,001457	
26	0,819	+ 0,000966	
27 à 34	1,335	+ 0,001575	
35	1,130	+ 0,001333	
36	0,992	+ 0,001171	
37	1,142	+ 0,001347	
38	1,335	+ 0,001575	
39	1,335	+ 0,001575	- 0,004252

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.	Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
II. 1. p. 119. = I. 31.			36° 17' 49,022 75 59 39,923 67 42 31,055	3,7821262.3 3,9967199.3 3,9760933.2
II. 2. p. 119. No. 116.	19,38 21,06 0,87	- 39,63 ξ'' = - 0,062 + 18,51 + 0,029 + 21,12 + 0,033	47 22 21,588 44 59 16,629 87 38 21,783	3,9760933.2 3,9587424.6 4,1089801.2
II. 3. p. 119. No. 115.	17,96 21,54 1,43	- 37,35 - 0,059 + 16,53 + 0,026 + 20,82 + 0,033	49 32 54,811 44 20 58,566 86 6 6,623	4,1089801.2 4,0721192.5 4,2266146.2
II. 4. p. 119. No. 114.	7,93 20,59 9,82	- 25,68 - 0,040 - 1,89 - 0,003 + 27,57 + 0,043	69 21 49,360 45 38 45,617 64 59 25,023	4,2266146.2 4,1097414.7 4,2126559.6

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
H. 5.	5,80	— 47,89 ξ''	== — 0,075	74° 36' 53,625	4,2126559.6
p. 119.	5,54	— 30,49	— 0,048	75 15 43,672	4,2139761.9
No. 113.	36,29	+ 78,38	+ 0,123	30 7 22,703	3,9290853.8
H. 6.	28,90	— 61,17	— 0,096	36 4 38,004	3,9290853.8
p. 120.	10,73	+ 25,53	+ 0,040	63 0 57,680	4,1090049.2
No. 112.	3,37	+ 35,64	+ 0,056	80 54 24,316	4,1535695.7
H. 7.	3,99	— 27,97	— 0,044	79 15 2,626	4,1535695.7
p. 120.	15,15	— 16,00	— 0,025	54 15 36,615	4,0706415.4
No. 111.	19,99	+ 43,97	+ 0,069	46 29 20,759	4,0217417.4
H. 8.	12,62	— 42,17	— 0,066	59 3 9,184	4,0217417.4
p. 120.	7,76	— 4,31	— 0,007	69 45 35,753	4,0607562.2
No. 110.	16,93	+ 46,48	+ 0,073	51 11 15,063	3,9800867.3
H. 9.	32,13	— 67,05	— 0,106	33 14 15,744	3,9800867.3
p. 120.	10,12	+ 29,34	+ 0,046	64 19 30,216	4,1960693.6
No. 109.	2,79	+ 37,71	+ 0,060	82 26 14,040	4,2374217.5
H. 10.	13,07	— 27,67	— 0,043	58 10 18,077	4,2374217.5
p. 120.	28,98	+ 11,54	+ 0,018	36 0 7,128	4,0774301.3
No. 108.	1,53	+ 16,13	+ 0,025	85 49 34,795	4,3070375.1
H. 11.	15,27	— 43,34	— 0,068	54 2 14,482	4,3070375.1
p. 120.	8,83	+ 2,47	+ 0,004	67 15 30,184	4,3637265.4
No. 107.	12,80	+ 40,87	+ 0,064	58 42 15,334	4,3305850.3
H. 12.	3,86	— 27,07	— 0,042	79 36 15,118	4,3305850.3
p. 121.	15,88	— 15,49	— 0,025	52 58 35,145	4,2399872.2
No. 106.	19,35	+ 42,56	+ 0,067	47 25 9,737	4,2048433.5
H. 13.	7,45	— 22,92	— 0,036	70 30 30,464	4,2048433.5
p. 121.	24,78	— 0,57	— 0,001	40 21 15,339	4,0417217.3
No. 105.	8,02	+ 23,49	+ 0,037	69 8 14,197	4,2010238.4

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
II. 14. p. 121. No. 104.	5,52 9,10 26,89	— 37,93 ξ'' — 21,37 + 59,30	= — 0,059 — 0,034 + 0,093	75° 18' 36,071 66 37 27,196 38 3 56,733	4,2010238.4 4,1782631.9 4,0054363.9
II. 15. p. 121. No. 103.	22,09 2,46 15,84	— 60,02 + 6,25 + 53,77	— 0,095 + 0,010 + 0,085	43 37 58,435 83 19 7,160 53 2 54,405	4,0054363.9 4,1636055.8 4,0691901.8
II. 16. p. 121. No. 102.	6,58 20,28 11,55	— 24,71 — 4,97 + 29,68	— 0,039 — 0,008 + 0,047	72 39 39,451 46 4 34,762 61 15 45,787	4,0691901.8 3,9468798.9 4,0323050.1
II. 17. p. 121. No. 101.	12,68 8,90 15,31	— 40,67 — 2,63 + 43,30	— 0,064 — 0,004 + 0,068	58 56 35,196 67 5 0,166 53 58 24,638	4,0323050.1 4,0637926.3 4,0073104.3
II. 18. p. 122. No. 100.	21,84 6,71 10,40	— 54,08 + 11,44 + 42,64	— 0,085 + 0,018 + 0,067	43 57 20,185 72 19 24,328 63 43 15,487	4,0073104.3 4,1448831.6 4,1185101.6
II. 19. p. 122. No. 99.	8,69 4,77 29,86	— 47,24 — 21,17 + 68,41	— 0,074 — 0,034 + 0,108	67 34 34,106 77 13 41,846 35 11 44,048	4,1185101.6 4,1417760.1 3,9133569.2
II. 20. p. 122. No. 98.	22,18 7,32 9,53	— 53,89 + 12,65 + 41,24	— 0,085 + 0,020 + 0,065	43 30 50,495 70 49 38,530 65 39 30,975	3,9133569.2 4,0506500.0 4,0350015.0
II. 21. p. 122. No. 97.	30,80 — 1,53 16,77	— 78,37 + 14,03 + 64,34	— 0,123 + 0,022 + 0,101	34 21 30,517 94 10 34,912 51 27 54,571	4,0350015.0 4,2822836.7 4,1767726.2
II. 22. p. 122. No. 96.	— 1,52 25,72 19,92	— 16,88 — 21,44 + 38,32	— 0,027 — 0,033 + 0,060	94 5 45,473 39 18 20,147 46 35 54,380	4,1767726.2 3,9796001.0 4,0391523.8

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtes.
II. 23. p. 122. No. 95.	17,55 6,89 13,19	— 48,29 ξ'' + 4,36 + 43,93	= — 0,063 + 0,005 + 0,058	50° 11' 6,387 71 52 13,795 57 56 39,818	4,0391523.8 4,1316110.8 4,0818817.7
II. 24. p. 123. No. 94.	17,99 5,68 14,41	— 50,39 + 3,58 + 46,81	— 0,065 + 0,004 + 0,061	49 29 22,405 74 54 15,654 55 36 21,941	4,0818817.7 4,1856527.4 4,1174491.6
II. 25. p. 123. No. 93.	11,84 39,52 — 0,49	— 23,19 + 12,33 + 10,86	— 0,034 + 0,018 + 0,016	60 38 57,136 28 2 54,898 91 18 7,966	4,1174491.6 3,8494156.9 4,1770023.0
II. 26. p. 123. No. 92.	16,54 37,27 — 3,21	— 29,87 + 19,75 + 10,12	— 0,029 + 0,019 + 0,010	51 51 12,131 29 28 4,759 98 40 43,110	4,1770023.0 3,9732504.8 4,2763395.5
II. 27. p. 123. No. 91.	9,46 19,33 9,05	— 27,97 + 0,41 + 27,56	— 0,044 + 0,001 + 0,043	65 48 41,226 47 26 55,381 66 44 23,393	4,2763395.5 4,1835228.8 4,2794322.8
II. 28. p. 123. No. 90.	12,64 18,29 6,86	— 32,14 + 5,78 + 26,36	— 0,051 + 0,009 + 0,042	59 1 13,369 49 1 15,529 71 57 31,102	4,2794322.8 4,2241919.5 4,3243782.7
II. 29. p. 123. No. 89.	10,63 18,11 8,73	— 29,99 + 1,90 + 28,09	— 0,047 + 0,003 + 0,044	63 12 8,963 49 18 48,763 67 29 2,274	4,3243782.7 4,2535531.8 4,3392836.6
II. 30. p. 124. No. 88.	7,66 6,16 28,67	— 43,99 — 21,01 + 65,00	— 0,069 — 0,033 + 0,102	70 0 55,541 73 41 33,017 36 17 31,442	4,3392836.6 4,3484218.4 4,1385048.1
II. 31. p. 124. No. 87.	7,56 24,71 7,95	— 23,07 — 0,39 + 23,46	— 0,036 — 0,001 + 0,037	70 15 31,984 40 25 53,679 69 18 34,337	4,1385048.1 3,9767462.5 4,1358549.6

Triangle	$\frac{\gamma}{\alpha}$ β	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés
II. 32. p. 124. No. 86.	24,48 1,67 15,39	- 64,35 ξ'' + 9,09 + 55,26	= - 0,101 + 0,014 + 0,087	40° 42' 1,419 85 27 36,464 53 50 22,117	4,1358549.6 4,3201736.0 4,2286093.4
II. 33. p. 124. No. 85.	11,26 18,23 8,07	- 30,59 + 3,19 + 27,40	- 0,048 + 0,005 + 0,043	61 51 29,742 49 6 14,545 69 2 15,713	4,2286093.4 4,1617114.9 4,2535086.2
II. 34. p. 124. No. 84.	- 3,09 17,85 33,79	- 27,61 - 36,88 + 64,49	- 0,043 - 0,058 + 0,101	98 21 53,647 49 42 18,562 31 55 47,791	4,2535086.2 4,1405223.8 3,9815122.3
II. 35. p. 124. No. 83.	15,45 11,80 9,58	- 40,48 + 5,87 + 34,61	- 0,054 + 0,008 + 0,046	53 43 42,166 60 43 27,508 65 32 50,326	3,9815122.3 4,0157121.9 4,0342440.7
II. 36. p. 125. No. 82.	30,03 19,88 - 3,08	- 56,98 + 33,11 + 23,87	- 0,067 + 0,039 + 0,028	35 2 28,283 46 38 3,749 98 19 27,968	4,0342440.7 4,1367337.2 4,2706072.4
II. 37. p. 125. No. 81.	10,36 14,47 11,81	- 32,53 - 1,45 + 33,98	- 0,044 - 0,002 + 0,046	63 47 6,526 55 30 40,908 60 42 12,566	4,2706072.4 4,2337979.8 4,2583109.4
II. 38. p. 125. No. 80.	4,83 12,68 21,82	- 31,48 - 16,99 + 48,47	- 0,050 - 0,026 + 0,076	77 5 16,930 58 56 33,734 43 58 9,336	4,2583109.4 4,2022378.3 4,1109633.1
II. 39. p. 125. No. 79.	8,87 4,19 31,14	$\left\{ \begin{array}{l} - 48,88 \xi'' \\ + 26,95 \xi''' \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} - 22,27 \xi'' \\ + 39,52 \xi''' \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} + 71,15 \xi'' \\ - 66,47 \xi''' \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = - 0,192$ $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = - 0,203$ $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = + 0,395$	67 9 58,498 78 45 51,757 34 4 9,745	4,1109633.1 4,1380000.7 3,8947446.7

G III. Calcul de compensation pour le groupe III,

p. 126 à 130.

$$x''' = - 0,0095544 \quad x'' = - 0,0141756, \text{ p. 167.}$$

Triangles	Ω	$\xi''' = \frac{1}{3}\Omega x'''$	$\xi'' = \frac{1}{3}\Omega x''$
III. 1 et 2	1,335	- 0,004252	
3 à 26	1,583	- 0,005042	
27	1,583	- 0,005042	- 0,007480

Triangle	$\begin{matrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{matrix}$	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
III. 1. p. 126. = II. 39.				34° 4' 9",745 67 9 58,498 78 45 51,757	3,8947446.7 4,1109633.1 4,1380000.7
III. 2. p. 126. No. 78.	15,68 7,16 14,49	- 45,85 ξ''' + 1,19 + 44,66	= + 0",195 - 0,005 - 0,190	53 19 33,345 71 13 2,365 55 27 24,290	4,1380000.7 4,2100345.7 4,1495690.2
III. 3. p. 126. No. 77.	14,91 5,57 17,59	- 47,41 - 2,68 + 50,09	+ 0,239 + 0,013 - 0,252	54 41 28,399 75 10 47,833 50 7 43,768	4,1495690.2 4,2231597.2 4,1229242.0
III. 4. p. 126. No. 76.	17,51 12,00 7,90	- 42,92 + 9,61 + 33,31	+ 0,216 - 0,048 - 0,168	50 15 0,596 60 19 27,972 69 25 31,432	4,1229242.0 4,1760273.0 4,2084618.8
III. 5. p. 126. No. 75.	15,54 13,75 7,84	- 38,92 + 7,70 + 31,22	+ 0,196 - 0,039 - 0,157	53 34 36,476 56 51 15,731 69 34 7,793	4,2084618.8 4,2257255.4 4,2746353.5
III. 6. p. 127. No. 74.	0,17 21,71 20,09	- 20,43 - 19,92 + 40,35	+ 0,103 + 0,100 - 0,203	89 31 52,103 44 7 15,950 46 20 51,947	4,2746353.5 4,1173696.4 4,1341141.4

Triangle	γ α β	Corrections des angles.		Angles plus compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
III. 7. p. 127. No. 73.	20,07 1,50 19,17	— 59,31 ξ''' + 0,90 + 58,41	= + 0,299 — 0,005 — 0,294	46° 22' 58,599 85 55 40,915 47 41 20,486	4,1341141.4 4,2732979.3 4,1433350.6
III. 8. p. 127. No. 72.	13,64 21,16 4,45	— 31,73 + 9,19 + 22,54	+ 0,160 — 0,046 — 0,114	57 3 59,020 44 51 6,704 78 4 54,276	4,1433350.6 4,0677764.9 4,2099528.8
III. 9. p. 127. No. 71.	8,74 11,04 17,54	— 35,02 — 8,80 + 43,82	+ 0,176 + 0,044 — 0,220	67 27 26,146 62 20 15,194 50 12 18,660	4,2099528.8 4,1917575.6 4,1300260.7
III. 10. p. 127. No. 70.	10,38 12,50 13,70	— 34,46 — 3,32 + 37,78	+ 0,173 + 0,017 — 0,190	63 45 40,203 59 18 2,047 56 56 17,750	4,1300260.7 4,1116799.0 4,1005406.9
III. 11. p. 127. No. 69.	24,73 — 1,18 20,07	— 69,53 + 4,66 + 64,87	+ 0,350 — 0,023 — 0,327	40 24' 13,910 93 13 26,027 46 22 20,063	4,1005406.9 4,2881630.2 4,1484920.5
III. 12. p. 128. No. 68.	17,04 16,27 4,99	— 39,07 + 12,05 + 27,02	+ 0,197 — 0,061 — 0,136	51 1 33,277 52 18 26,979 76 39 59,744	4,1484920.5 4,1561735.4 4,2459632.5
III. 13. p. 128. No. 67.	4,03 21,16 14,22	— 22,28 — 10,19 + 32,47	+ 0,112 + 0,051 — 0,163	79 9 16,822 44 51 48,201 55 58 54,977	4,2459632.5 4,1022374.4 4,1722722.8
III. 14. p. 128. No. 66.	12,90 12,67 10,95	— 36,75 + 1,95 + 34,80	+ 0,185 — 0,010 — 0,175	58 30 59,385 58 57 11,150 62 31 49,465	4,1722722.8 4,1742816.8 4,1894786.9
III. 15. p. 128. No. 65.	13,84 11,79 10,93	— 38,61 + 2,91 + 35,70	+ 0,194 — 0,014 — 0,180	56 40 10,314 60 45 47,866 62 34 1,820	4,1894786.9 4,2083441.1 4,2157178.6

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
III. 16. p. 128. No. 64.	9,17 15,32 12,37	— 30,71 ξ''' — 3,20 + 33,91	= + 0,155 + 0,016 — 0,171	66° 28' 50,575 53 57 4,426 59 34 4,999	4,2157178.6 4,1610724.8 4,1890074.4
III. 17. p. 128. No. 63.	10,56 21,94 6,51	— 27,63 + 4,05 + 23,58	+ 0,139 — 0,020 — 0,119	63 21 11,899 43 49 1,580 72 49 46,521	4,1890074.4 4,0781035.2 4,2179717.5
III. 18. p. 129. No. 62.	8,87 7,67 22,69	— 40,43 — 13,82 + 54,25	+ 0,203 + 0,070 — 0,273	67 9 21,443 69 59 14,220 42 51 24,337	4,2179717.5 4,2263965.1 4,0860618.3
III. 19. p. 129. No. 61.	27,28 3,01 11,93	— 66,49 + 15,35 + 51,14	+ 0,334 — 0,077 — 0,257	37 39 19,054 81 52 19,913 60 28 21,033	4,0860618.3 4,2957005.6 4,2396638.2
III. 20. p. 129. No. 60.	0,27 21,53 20,07	— 20,61 — 19,80 + 40,41	+ 0,104 + 0,099 — 0,203	89 15 47,414 44 21 54,109 46 22 18,477	4,2396638.2 4,0843179.6 4,0993376.8
III. 21. p. 129. No. 59.	12,59 12,76 11,15	— 36,33 + 1,44 + 34,89	+ 0,183 — 0,007 — 0,176	59 7 54,233 58 46 57,263 62 5 8,504	4,0993376.8 4,0977447.2 4,1119533.3
III. 22. p. 129. No. 58.	11,46 7,72 18,51	— 41,43 — 7,05 + 48,48	+ 0,209 + 0,035 — 0,244	61 26 42,599 69 52 21,785 48 40 55,616	4,1119533.3 4,1409142.0 4,0439542.8
III. 23. p. 129. No. 57.	21,66 7,82 9,30	— 52,62 + 12,36 + 40,26	+ 0,265 — 0,062 — 0,203	44 11 34,765 69 37 54,078 66 10 31,157	4,0439542.8 4,1726328.5 4,1619927.4
III. 24. p. 130. No. 56.	6,11 15,00 16,65	— 28,87 — 10,54 + 39,41	+ 0,145 + 0,053 — 0,198	73 48 46,815 54 32 2,373 51 39 10,812	4,1619927.4 4,0904297.1 4,0740244.3

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.	Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
III. 25. p. 130. No. 55.	8,31 15,54 13,18	$- 29,80 \xi''' = + 0,150$ $- 4,87 \quad \quad + 0,024$ $+ 34,67 \quad \quad - 0,174$	$68^{\circ} 28' 22,470$ $53 34 2,284$ $57 57 35,246$	4,0740244.3 4,0109832.1 4,0336573.7
III. 26. p. 130. No. 54.	18,48 6,28 13,22	$- 50,18 \quad \quad + 0,252$ $+ 5,26 \quad \quad - 0,026$ $+ 44,92 \quad \quad - 0,226$	$48 43 21,582$ $73 23 41,544$ $57 52 56,874$	4,0336573.7 4,1392139.9 4,0855764.0
III. 27. p. 130. No. 53.	9,31 8,50 20,45	$\left\{ \begin{array}{l} - 39,07 \xi''' \\ + 11,95 \xi'' \end{array} \right\} = + 0,107$ $\left\{ \begin{array}{l} - 11,14 \xi''' \\ + 37,45 \xi'' \end{array} \right\} = - 0,224$ $\left\{ \begin{array}{l} + 50,21 \xi''' \\ - 49,40 \xi'' \end{array} \right\} = + 0,117$	$66 8 4,577$ $68 1 24,346$ $45 50 31,077$	4,0855764.0 4,0916309.6 3,9801675.4

G. IV. Calcul de compensation pour le groupe IV.

p. 131 et 133.

$$x''' = -0,0141756.$$

Triangles	Ω	$\xi''' = \frac{1}{3}\Omega x'''$
IV. 1 à 10	1,583	- 0,007480
11	2,780	- 0,013136
12	1,693	- 0,008000
13	1,050	- 0,004961.

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.			Logarithmes compensés des côtés.
IV. 1. p. 131. = III. 27.				45° 50' 31,077 66 8 4,577 68 1 24,346			3,9801675.4 4,0855764.0 4,0916309.6
IV. 2. p. 131. No. 52.	10,78 13,39 12,37	- 33,93 ξ''' - 1,59 + 35,52	= + 0,254 + 0,012 - 0,266	62 53 47,984 57 32 50,802 59 33 21,214			4,0916309.6 4,0684082.0 4,0777197.4
IV. 3. p. 131. No. 51.	14,92 7,86 14,32	- 44,16 + 0,60 + 43,56	+ 0,330 - 0,004 - 0,326	54 40 18,160 69 32 52,826 55 46 49,014			4,0777197.4 4,1378317.7 4,0835545.2
IV. 4. p. 131. No. 50.	15,62 12,63 8,70	- 39,94 + 6,92 + 33,02	+ 0,299 - 0,052 - 0,247	53 25 8,629 59 2 46,518 67 32 4,853			4,0835545.2 4,1121064.8 4,1445545.8
IV. 5. p. 131. No. 49.	10,06 8,25 19,68	- 39,80 - 9,62 + 49,42	+ 0,298 + 0,072 - 0,370	64 27 13,738 68 36 9,492 46 56 36,770			4,1445545.8 4,1582169.8 4,0529614.8
IV. 6. p. 132. No. 48.	20,90 4,77 13,38	- 55,18 + 7,52 + 47,66	+ 0,413 - 0,056 - 0,357	45 12 25,623 77 13 3,214 57 34 31,163			4,0529614.8 4,1910135.6 4,1283045.8

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.			Logarithmes compensés des côtés.
IV. 7.	13,48	- 36,78	$\xi'' = + 0,275$	57°	22'	24,435	4,1283045.8
p. 132.	13,34	+ 3,66	- 0,027	57	38	3,533	4,1295640.6
No. 47.	9,82	+ 33,12	- 0,248	64	59	32,032	4,1601362.0
IV. 8.	8,68	- 35,47	+ 0,265	67	36	39,875	4,1601362.0
p. 132.	10,69	- 9,43	+ 0,071	63	4	42,071	4,1443560.8
No. 46.	18,11	+ 44,90	- 0,336	49	18	38,054	4,0739882.0
IV. 9.	11,60	- 40,57	+ 0,303	61	9	42,523	4,0739882.0
p. 132.	8,35	- 5,77	+ 0,043	68	21	35,913	4,0997496.5
No. 45.	17,37	+ 46,34	- 0,346	50	28	41,564	4,0187611.8
IV. 10.	21,14	- 56,88	+ 0,425	44	53	30,485	4,0187611.8
p. 132.	3,77	+ 6,54	- 0,049	79	51	4,741	4,1632490.9
No. 44.	14,60	+ 50,34	- 0,376	55	15	24,774	4,0848193.3
IV. 11.	23,53	- 54,07	+ 0,710	41	49	12,390	4,0848193.3
p. 132.	9,11	+ 16,52	- 0,217	66	36	42,263	4,2235926.3
No. 43.	7,01	+ 37,55	- 0,493	71	34	5,347	4,2379566.3
IV. 12.	12,65	- 43,78	+ 0,350	59	0	45,800	4,2379566.3
p. 133.	6,74	- 5,83	+ 0,047	72	15	53,357	4,2836865.0
No. 42.	18,48	+ 49,61	- 0,397	48	43	20,843	4,1807752.1
IV. 13.	-5,10	- 20,79	+ 0,103	103	37	48,553	4,1807752.1
p. 133.	23,24	- 36,09	+ 0,179	42	10	32,519	4,0201671.3
No. 41.	30,99	+ 56,88	- 0,282	34	11	38,928	3,9429171.6

G. V. Calcul de compensation pour le groupe V.

p. 137 à 141.

$$x' = - 0,0036563.$$

Pour tous les triangles 1 à 35, $\Omega = 1,050$, $\xi'' = - 0,0012797$.

Triangle	$\begin{matrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{matrix}$	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
V. 1.	17,23	- 41,49 ξ''	= + 0,053	50° 42' 55,263	3,9429171.6
p. 134.	13,29	+ 10,20	- 0,013	57 44 8,977	3,9813333.8
No. 40.	7,03	+ 31,29	- 0,040	71 32 55,760	4,0312508.4
V. 2.	8,40	- 26,13	+ 0,033	68 15 9,803	4,0312508.4
p. 134.	20,59	- 0,93	+ 0,001	45 38 32,791	3,9176163.8
No. 39.	9,33	+ 27,06	- 0,034	66 6 17,406	4,0243989.9
V. 3.	18,62	- 47,17	+ 0,060	48 30 6,180	4,0243989.9
p. 134.	9,05	+ 8,69	- 0,011	66 44 37,019	4,1131273.6
No. 38.	9,93	+ 38,48	- 0,049	64 45 16,801	4,1063350.5
V. 4.	13,74	- 42,10	+ 0,054	56 52 21,564	4,1063350.5
p. 134.	8,55	- 0,88	+ 0,001	67 53 47,591	4,1502202.5
No. 37.	14,62	+ 42,98	- 0,055	55 13 50,845	4,0979562.0
V. 5.	19,08	- 42,12	+ 0,054	47 49 18,164	4,0979562.0
p. 134.	15,97	+ 15,12	- 0,019	52 49 21,811	4,1294361.8
No. 36.	3,96	+ 27,00	- 0,035	79 21 20,025	4,2205651.9
V. 6.	1,75	- 23,14	+ 0,030	85 15 21,590	4,2205651.9
p. 135.	19,13	- 17,89	+ 0,023	47 44 54,313	4,0914044.0
No. 35.	19,64	+ 41,03	- 0,053	46 59 44,097	4,0861517.7
V. 7.	14,98	- 31,02	+ 0,040	54 34 33,770	4,0861517.7
p. 135.	26,65	+ 13,92	- 0,018	38 18 17,992	3,9673399.9
No. 34.	1,06	+ 17,10	- 0,022	87 7 8,238	4,1745058.4
V. 8.	4,63	- 20,57	+ 0,026	77 35 56,476	4,1745058.4
p. 135.	24,53	- 6,68	+ 0,009	40 38 30,789	3,9985591.0
No. 33.	11,31	+ 27,25	- 0,035	61 45 32,735	4,1297176.8

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
V. 9. p. 135. No. 32.	14,89 9,06 12,88	- 42,66 ξ' + 2,01 + 40,65	= + 0,055 - 0,003 - 0,052	54° 44' 5,915 66 43 2,047 58 32 52,038	4,1297176.8 4,1808767.5 4,1487542.6
V. 10. p. 135. No. 31.	4,79 13,75 20,36	- 29,94 - 15,57 + 45,51	+ 0,038 + 0,020 - 0,058	77 10 34,718 56 51 26,960 45 57 58,322	4,1487542.6 4,0826119.2 4,0164105.2
V. 11. p. 135. No. 30	16,10 12,83 8,18	- 40,38 + 7,92 + 32,46	+ 0,051 - 0,010 - 0,041	52 35 8,301 58 38 30,110 68 46 21,589	4,0164105.2 4,0478686.8 4,0859329.1
V. 12. p. 136. No. 29.	20,51 4,02 14,71	- 55,73 + 5,80 + 49,93	+ 0,071 - 0,007 - 0,064	45 45 0,791 79 11 29,423 55 3 29,786	4,0859329.1 4,2230614.1 4,1445086.2
V. 13. p. 136. No. 28.	14,99 3,72 20,72	- 50,70 - 5,73 + 56,43	+ 0,065 + 0,007 - 0,072	54 33 10,345 79 58 50,987 45 27 58,668	4,1445086.2 4,2268628.0 4,0865278.4
V. 14. p. 136. No. 27.	12,50 20,93 5,44	- 30,44 + 7,06 + 23,38	+ 0,039 - 0,009 - 0,030	59 18 56,459 45 10 11,261 75 30 52,280	4,0865278.4 4,0028016.9 4,1380034.9
V. 15. p. 136. No. 26.	3,59 15,13 20,79	- 27,97 - 17,20 + 45,17	+ 0,036 + 0,022 - 0,058	80 19 30,356 54 18 51,882 45 21 37,762	4,1380034.9 4,0539039.5 3,9964250.7
V. 16. p. 136. No. 25.	24,13 2,45 14,45	- 62,71 + 9,68 + 53,03	+ 0,080 - 0,012 - 0,068	41 6 20,960 83 21 1,918 55 32 37,122	3,9964250.7 4,1756298.5 4,0947820.5
V. 17. p. 136. No. 24.	22,66 6,07 10,64	- 55,96 + 12,02 + 43,94	+ 0,071 - 0,015 - 0,056	42 53 56,261 73 54 14,285 63 11 49,454	4,0947820.5 4,2444537.2 4,2124602.0

Triangle	$\frac{\gamma}{\alpha \beta}$	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
V. 18.	19,86	— 52,43 ξ''	= + 0,067	46° 40' 30,387	4,2124602.0
p. 137.	5,86	+ 7,15	— 0,009	74 26 54,081	4,3344440.8
No. 23.	12,71	+ 45,28	— 0,058	58 52 35,532	4,2831442.2
V. 19.	1,77	— 22,43	+ 0,029	85 11 1,509	4,2831442.2
p. 137.	19,84	— 17,12	+ 0,022	46 42 10,922	4,1466978.6
No. 22.	18,89	+ 39,55	— 0,051	48 6 47,569	4,1565250.0
V. 20.	26,83	— 62,60	+ 0,080	38 7 44,060	4,1565250.0
p. 137.	5,69	+ 17,89	— 0,023	74 52 24,227	4,3506208.5
No. 21.	8,94	+ 44,71	— 0,057	66 59 51,713	4,3299539.8
V. 21.	10,57	— 51,10	+ 0,065	63 20 55,645	4,3299539.8
p. 137.	3,13	— 19,39	+ 0,025	81 32 56,965	4,3739949.2
No. 20.	29,96	+ 70,49	— 0,090	35 6 7,390	4,1384301.0
V. 22.	21,07	— 55,43	+ 0,071	44 58 16,321	4,1384301.0
p. 137.	4,76	+ 7,78	— 0,010	77 16 57,560	4,2783765.1
No. 19.	13,29	+ 47,65	— 0,061	57 44 46,119	4,2163756.8
V. 23.	9,14	— 35,52	+ 0,046	66 32 11,496	4,2163756.8
p. 137.	10,83	— 8,10	+ 0,010	62 46 12,990	4,2028469.3
No. 18.	17,24	+ 43,62	— 0,056	50 41 35,514	4,1424667.1
V. 24.	14,00	— 48,12	+ 0,062	56 22 56,992	4,1424667.1
p. 138.	4,74	— 6,12	+ 0,008	77 18 26,808	4,2112063.3
No. 17.	20,12	+ 54,24	— 0,070	46 18 36,200	4,0811423.3
V. 25.	13,70	— 53,11	+ 0,068	56 57 21,828	4,0811423.3
p. 138.	2,32	— 12,01	+ 0,015	83 43 38,035	4,1551594.8
No. 16.	25,71	+ 65,12	— 0,083	39 19 0,137	3,9595869.3
V. 26.	27,80	— 56,86	+ 0,073	37 8 43,193	3,9595869.3
p. 138.	14,06	+ 26,54	— 0,034	56 16 20,416	4,0986253.7
No. 15.	1,26	+ 30,32	— 0,039	86 34 56,391	4,1778928.3

Triangle	γ α β .	Corrections des angles.		Angles plans compensés.	Logarithmes compensés des côtés.
V. 27. p. 138. No. 14.	-0,60 23,72 19,79	- 18,59 ^{ξ'} - 20,39 + 38,98	= + 0,024 + 0,026 - 0,050	91° 38' 0,624 41 35 54,076 46 46 5,300	4,1778928.3 4,0001751.1 4,0405512.3
V. 28. p. 138. No. 13.	16,37 7,34 13,63	- 46,37 + 2,74 + 43,63	+ 0,059 - 0,003 - 0,056	52 8 11,429 70 46 19,967 57 5 28,604	4,0405512.3 4,1182843.2 4,0672525.9
V. 29. p. 138. No. 12.	8,60 12,76 15,61	- 32,81 - 7,01 + 39,82	+ 0,042 + 0,009 - 0,051	67 46 32,072 58 46 39,999 53 26 47,929	4,0672525.9 4,0328269.2 4,0056571.1
V. 30. p. 139. No. 11.	13,07 4,30 22,29	- 48,43 - 9,22 + 57,65	+ 0,062 + 0,012 - 0,074	58 10 25,502 78 27 33,462 43 22 1,036	4,0056571.1 4,0675462.9 3,9131634.4
V. 31. p. 139. No. 10.	19,36 11,26 7,36	- 46,08 + 12,00 + 34,08	+ 0,059 - 0,015 - 0,044	47 24 46,309 61 51 15,455 70 43 58,236	3,9131634.4 3,9914846.2 4,0211062.1
V. 32. p. 139. No. 9.	12,71 15,97 8,39	- 33,81 + 4,32 + 29,49	+ 0,044 - 0,006 - 0,038	58 53 32,254 52 49 51,774 68 16 35,972	4,0211062.1 3,9899128.2 4,0565394.6
V. 33. p. 139. No. 8.	4,52 13,83 20,75	- 29,79 - 16,23 + 46,02	+ 0,038 + 0,021 - 0,059	77 52 13,278 56 42 37,861 45 25 8,861	4,0565394.6 3,9885036.4 3,9189839.2
V. 34. p. 139. No. 7.	18,01 -0,63 26,15	- 62,17 - 8,14 + 70,31	+ 0,080 + 0,010 - 0,090	49 27 12,780 91 42 25,980 38 50 21,240	3,9189839.2 4,0380465.2 3,8356019.4
V. 35. p. 139. No. 6.	0,06 18,66 23,64	- 23,76 - 23,58 + 47,34	+ 0,030 + 0,030 - 0,060	89 50 41,690 48 27 20,860 41 41 57,450	3,8356019.4 3,7097629.9 3,6585695.8

CHAPITRE XIII.

TABLEAU DES ANGLES ET DES CÔTÉS DÉFINITIFS, DES 155 TRIANGLES QUI PRODUISENT LA JONCTION DES 9 POINTS ASTRONOMIQUES DE L'ARC MÉRIDIONAL, COMPRIS ENTRE LE DANUBE ET LE GOLFE DE FINLANDE.

§ 48.

Entre le terme méridional de cet arc, STARO-NEKRASSOWKA sur le Danube, et le terme septentrional, MÄKI-PÄÄLYS sur l'île de Hogland du Golfe de Finlande, il y a, sans compter les triangles qui, p. 95 à 103, rattachent les 6 bases avec les six côtés fondamentaux des triangles, un nombre total de 155 triangles indispensables et qui effectuent la dite jonction. Je donnerai maintenant le tableau des angles et des côtés définitifs de ces triangles, tels qu'ils résultent des calculs et recherches antérieurs. Dans ce tableau III, les triangles se succèdent dans la direction du sud au nord, avec les numéros No. 1 à No. 155, les No. 156 et suivants étant destinés aux triangles de l'arc boréal entre Hogland et la Mer Glaciale. De nos triangles de jonction, 142 sont contenus dans les tableaux G du chapitre XII, § 47, p. 171 à 189. Nous n'avons qu'à répéter ici les chiffres de ce tableau, mais en ajoutant aux angles plans du § 47 le montant de l'excès sphérique. Les excès sphériques sont donnés, p. 113 à 139, pour chacun de ces triangles. Les autres 13 triangles se trouvent p. 140 à 143, savoir 11 triangles excédants 1° à 11°, et deux triangles auxiliaires 12° et 13°. Les angles plans de ces 13 triangles, donnés à l'endroit cité, sont déjà définitifs, vu que ces triangles n'entrent point dans le calcul de compensation du chapitre XII. Mais les logarithmes des côtés, donnés p. 140 à 143, réclament encore une correction, parce qu'ils ont été calculés sur des valeurs non définitives de certains côtés de départ.

Nous avons, dans les triangles excédants 1° à 6° = No. 150 à No. 155 du tableau qui suivra, pour le côté de départ employé p. 140, le $\lg L' = 3,8634892.6$, dont la valeur définitive est $\lg \bar{L}' = 3,8634889.3$, p. 168. Donc tous les logarithmes, p. 140 et 141, sont à corriger de $dL' = -3,3$.

Pour les triangles excédants 7° à 11° = No. 5 à No. 1 du nouveau tableau, le logarithme du côté de départ employé = 3,7097678.0, p. 142, doit être remplacé par 3,7097629.9, Tr. V. 35. p. 189; donc la correction des log des côtés, p. 142, est $-48,1$.

Pour le triangle auxiliaire 12° = No. 145, le logarithme du côté de départ employé 4,3419045.3, p. 143, est à échanger contre 4,3419035.8, du triangle I. 5, p. 171, et la correction est $-9,5$.

Enfin pour le triangle auxiliaire 13° = No. 126 du nouveau tableau, étant calculé sur le logarithme du côté de départ 3,8264194.6, p. 143, qui est en définitif 3,8264161.3, Tr. I. 22, p. 173, la correction est $-33,3$.

Tableau II, des triangles définitifs

entre

le Danube et le Golfe de Finlande.

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.			Log. des côtés exp. en toises.
No. 1. 11°. p. 142.	SSAFIANOWKA.....	41°	39'	35,84	3,5277623.3
	ISMAÏL.....	75	14	16,29	3,6905541.3
	STARO-NEKRASSOWKA.....	63	6	8,01	3,6554060.5
		180	0	0,14	
No. 2. 10°. p. 142.	BORSKA.....	58	15	21,63	3,6554060.5
	SSAFIANOWKA.....	49	6	39,34	3,6042883.3
	ISMAÏL.....	72	37	59,20	3,7055154.0
		180	0	0,17	
No. 3. 9°. p. 142.	KAIRAKLIA.....	50	53	30,21	3,7055154.0
	SSAFIANOWKA.....	70	28	21,45	3,7899517.6
	BORSKA.....	53	38	8,60	3,7470732.1
		180	0	0,26	

Renvoi.	Station.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 4. 8°. p. 142.	KATLABUCH-SSUCHOI.....	63° 14' 48,92	3,7470732.1
	KAIRAKLIA.....	53 20 27,44	3,7005278.5
	SSAFIANOWKA.....	63 24 43,88	3,7477024.7
		180 0 0,24	
No. 5. 7°. p. 142.	TASCHBUNAR II.....	62 57 58,18	3,7477024.7
	KATLABUCH-SSUCHOI.....	62 19 30,36	3,7451885.7
	KAIRAKLIA.....	54 42 31,70	3,7097629.9
		180 0 0,24	
No. 6. V. 35. p. 189.	KATLABUCH.....	48 27 20,93	3,7097629.9
	KATLABUCH-SSUCHOI.....	41 41 57,53	3,6585695.8
	TASCHBUNAR II.....	89 50 41,76	3,8356019.4
		180 0 0,22	
No. 7. V. 34. p. 189.	KARAKURT.....	38 50 21,42	3,8356019.4
	KATLABUCH.....	91 42 26,16	4,0380465.2
	KATLABUCH-SSUCHOI.....	49 27 12,96	3,9189839.2
		180 0 0,54	
No. 8. V. 33. p. 189.	PANDAKLIA.....	45 25 9,12	3,9189839.2
	KARAKURT.....	56 42 38,11	3,9885036.4
	KATLABUCH.....	77 52 13,53	4,0565394.6
		180 0 0,76	
No. 9. V. 32. p. 189.	BOLGRAD.....	68 16 36,28	4,0565394.6
	PANDAKLIA.....	52 49 52,08	3,9899128.2
	KARAKURT.....	58 53 32,56	4,0211062.1
		180 0 0,92	
No. 10. V. 31. p. 189.	TARAKLIA.....	70 43 58,48	4,0211062.1
	BOLGRAD.....	61 51 15,70	3,9914846.2
	PANDAKLIA.....	47 24 46,55	3,9131634.4
		180 0 0,73	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 11. V. 30. p. 189.	KAMBOLI.....	43° 22' 1,30	3,9131634.4
	TARAKLIA.....	78 27 33,72	4,0675462.9
	DOLGRAD.....	58 10 25,76	4,0056571.1
		180 0 0,78	
No. 12. V. 29. p. 189.	DAURTSCHI.....	53 26 48,25	4,0056571.1
	TARAKLIA.....	58 46 40,32	4,0328269.2
	KAMBOLI.....	67 46 32,40	4,0672525.9
		180 0 0,97	
No. 13. V. 28. p. 189.	MALOJAROSLAWETZKAJA.....	57 5 28,99	4,0672525.9
	DAURTSCHI.....	70 46 20,35	4,1182843.2
	TARAKLIA.....	52 8 11,82	4,0405512.3
		180 0 1,16	
No. 14. V. 27. p. 189.	KULMSKAJA.....	46 46 5,65	4,0405512.3
	DAURTSCHI.....	41 35 54,43	4,0001751.1
	MALOJAROSLAWETZKAJA.....	91 38 0,98	4,1778928.3
		180 0 1,06	
No. 15. V. 26. p. 188.	BASCHKALIA.....	86 34 56,76	4,1778928.3
	KULMSKAJA.....	56 16 20,78	4,0986253.7
	DAURTSCHI.....	37 8 43,56	3,9595869.3
		180 0 1,10	
No. 16. V. 25. p. 188.	NESSELRODE.....	39 19 0,49	3,9595869.3
	KULMSKAJA.....	83 43 38,38	4,1551594.8
	DASCHKALIA.....	56 57 22,18	4,0811423.3
		180 0 1,05	
No. 17. V. 24. p. 188.	NIKOLAJEWKA.....	46 18 36,72	4,0811423.3
	NESSELRODE.....	77 18 27,33	4,2112063.3
	KULMSKAJA.....	56 22 57,52	4,1424667.1
		180 0 1,57	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 18.	NOWO-KAUSCHANI.....	50° 41' 36",17	4,1424667.1
V. 23.	NESSELRODE.....	62 46 13,64	4,2028469.3
p. 188.	NIKOLAJEWKA.....	66 32 12,15	4,2163756.8
		180 0 1,96	
No. 19.	DSCHAMANA.....	57 44 46,83	4,2163756.8
V. 22.	NOWO-KAUSCHANI.....	77 16 58,27	4,2783765.1
p. 188.	NESSELRODE.....	44 58 17,03	4,1384301.0
		180 0 2,13	
No. 20.	PLOSKA.....	35 6 8,32	4,1384301.0
V. 21.	DSCHAMANA.....	81 32 57,90	4,3739949.2
p. 188.	NOWO-KAUSCHANI.....	63 20 56,58	4,3299539.8
		180 0 2,80	
No. 21.	WODOLUI.....	66 59 52,66	4,3299539.8
V. 20.	DSCHAMANA.....	74 52 25,18	4,3506208.5
p. 188.	PLOSKA.....	38 7 45,01	4,1565250.0
		180 0 2,85	
No. 22.	HESENI.....	48 6 48,21	4,1565250.0
V. 19.	WODOLUI.....	46 42 11,57	4,1466978.6
p. 188.	DSCHAMANA.....	85 11 2,15	4,2831442.2
		180 0 1,93	
No. 23.	SSURUTSCHENI.....	58 52 36,50	4,2831442.2
V. 18.	WODOLUI.....	74 26 55,05	4,3344440.8
p. 188.	HESENI.....	46 40 31,35	4,2124602.0
		180 0 2,90	
No. 24.	PERESSETSCHINO.....	63 11 50,08	4,2124602.0
V. 17.	SSURUTSCHENI.....	73 54 14,91	4,2444537.2
p. 187.	WODOLUI.....	42 53 56,88	4,0947820.5
		180 0 1,87	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.			Log. des côtés exp. en loises.
No. 25. V. 16. p. 187.	ZIGANESCHTI	55°	32'	37,52	4,0947820.5
	PERESSETSCHIKO	83	21	2,31	4,1756298.5
	SSURUTSCHENI	41	6	21,35	3,9964250.7
		180	0	1,18	
No. 26. V. 15. p. 187.	BOLOGAN	45	21	38,12	3,9964250.7
	ZIGANESCHTI	54	18	52,24	4,0539039.5
	PERESSETSCHIKO	80	19	30,71	4,1380034.9
		180	0	1,07	
No. 27. V. 14. p. 187.	SAGAIKANI	75	30	52,66	4,1380034.9
	BOLOGAN	45	10	11,64	4,0028016.9
	ZIGANESCHTI	59	18	56,84	4,0865278.4
		180	0	1,14	
No. 28. V. 13. p. 187.	ROPOPENI	45	27	59,21	4,0865278.4
	SAGAIKANI	79	58	51,52	4,2268628.0
	BOLOGAN	54	33	10,88	4,1445086.2
		180	0	1,61	
No. 29. V. 12. p. 187.	TSCHUTULESCHTI	55	3	30,32	4,1445086.2
	ROPOPENI	79	11	29,96	4,2230614.1
	SAGAIKANI	45	45	1,33	4,0859329.1
		180	0	1,61	
No. 30. V. 11. p. 187.	UNKITESCHTI	68	46	21,93	4,0859329.1
	TSCHUTULESCHTI	58	38	30,46	4,0478686.8
	ROPOPENI	52	35	8,65	4,0164105.2
		180	0	1,04	
No. 31. V. 10. p. 187.	WODENI	45	57	58,72	4,0164105.2
	TSCHUTULESCHTI	56	51	27,35	4,0826119.2
	UNKITESCHTI	77	10	35,11	4,1487542.6
		180	0	1,18	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.			Log. des côtés exp. en toises.
No. 32. V. 9. p. 187.	BELZY.....	58°	32'	52",60	4,1487542.6
	WODENI.....	66	43	2,61	4,1808767.5
	TSCHUTULESCHTI.....	54	44	6,47	4,1297176.8
		180	0	1,68	
No. 33. V. 8. p. 186.	KETROS.....	61	45	33,16	4,1297176.8
	WODENI.....	40	38	31,21	3,9985591.0
	BELZY.....	77	35	56,89	4,1745058.4
		180	0	1,26	
No. 34. V. 7. p. 186.	BOKSANO.....	87	7	8,60	4,1745058.4
	KETROS.....	38	18	18,35	3,9673399.9
	WODENI.....	54	34	34,13	4,0861517.7
		180	0	1,08	
No. 35. V. 6. p. 186.	TYRNOWO.....	46	59	44,58	4,0861517.7
	BOKSANO.....	47	44	54,79	4,0914044.0
	KETROS.....	85	15	22,07	4,2205651.9
		180	0	1,44	
No. 36. V. 5. p. 186.	RUDY.....	79	21	20,56	4,2205651.9
	TYRNOWO.....	52	49	22,34	4,1294361.8
	BOKSANO.....	47	49	18,70	4,0979562.0
		180	0	1,60	
No. 37. V. 4. p. 186.	LIPNIK.....	55	13	51,32	4,0979562.0
	TYRNOWO.....	67	53	48,07	4,1502202.5
	RUDY.....	56	52	22,04	4,1063350.5
		180	0	1,43	
No. 38. V. 3. p. 186.	ROTUNDA.....	64	45	17,20	4,1063350.5
	LIPNIK.....	66	44	37,42	4,1131273.6
	TYRNOWO.....	48	30	6,58	4,0243989.9
		180	0	1,20	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.			Log. des côtés exp. en toises.
No. 39. V. 2. p. 186.	GWOSDAUTZI	66 [°]	6'	17,67	4,0243989.9
	ROTUNDA	45	38	33,05	3,9176163.8
	LIPNIK	68	15	10,06	4,0312508.4
		180	0	0,78	
No. 40. V. 1. p. 186.	BRITSCHANI	71	32	56,02	4,0312508.4
	GWOSDAUTZI	57	44	9,23	3,9813333.8
	ROTUNDA	50	42	55,52	3,9429171.6
		180	0	0,77	
No. 41. IV. 13. p. 185.	WOLTSCHENETZ	34	11	39,21	3,9429171.6
	GWOSDAUTZI	42	10	32,81	4,0201671.3
	BRITSCHANI	103	37	48,84	4,1807752.1
		180	0	0,86	
No. 42. IV. 12. p. 185.	SAGORJANE	48	43	21,65	4,1807752.1
	WOLTSCHENETZ	72	15	54,16	4,2836865.0
	GWOSDAUTZI	59	0	46,60	4,2379566.3
		180	0	2,41	
No. 43. IV. 11. p. 185.	SSUPRUNKOWZI	71	34	5,97	4,2379566.3
	SAGORJANE	66	36	42,88	4,2235926.3
	WOLTSCHENETZ	41	49	13,01	4,0848193.3
		180	0	1,86	
No. 44. IV. 10. p. 185.	HANOWKA	55	15	25,18	4,0848193.3
	SSUPRUNKOWZI	79	51	5,14	4,1632490.9
	SAGORJANE	44	53	30,88	4,0187611.8
		180	0	1,20	
No. 45. IV. 9. p. 185.	KARATSCHKOWZI	50	28	41,93	4,0187611.8
	HANOWKA	68	21	36,28	4,0997496.5
	SSUPRUNKOWZI	61	9	42,89	4,0739882.0
		180	0	1,10	

Renvoi.	Stations	Angles sphériques.	Log des côtés exp. en toises.
No. 46. IV. 8. p. 185.	TSCHERNOWODY	49° 18' 38,54	4,0739882.0
	HANOWKA	63 4 42,56	4,1443560.8
	KARATSCHKOWZI	67 36 40,37	4,1601362.0
		180 0 1,47	
No. 47. IV. 7. p. 185.	BARANOWKA	64 59 32,56	4,1601362.0
	TSCHERNOWODY	57 38 4,06	4,1295640.6
	HANOWKA	57 22 24,96	4,1283045.8
		180 0 1,58	
No. 48. IV. 6. p. 184.	FELSCHTIN	57 34 31,64	4,1283045.8
	TSCHERNOWODY	77 13 3,69	4,1910135.6
	BARANOWKA	45 12 26,10	4,0529614.8
		180 0 1,43	
No. 49. IV. 5. p. 184.	ALEXANDROWKA	46 56 37,24	4,0529614.8
	FELSCHTIN	68 36 9,96	4,1582169.8
	TSCHERNOWODY	64 27 14,21	4,1445545.8
		180 0 1,41	
No. 50. IV. 4. p. 184.	KRIWOTSCHINZI	67 32 5,32	4,1445545.8
	FELSCHTIN	59 2 46,98	4,1121064.8
	ALEXANDROWKA	53 25 9,09	4,0835545.2
		180 0 1,39	
No. 51. IV. 3. p. 184.	KATERINOWKA	55 46 49,45	4,0835545.2
	KRIWOTSCHINZI	69 32 53,26	4,1378317.7
	FELSCHTIN	54 40 18,60	4,0777197.4
		180 0 1,31	
No. 52. IV. 2. p. 184.	BASALIA	59 33 21,61	4,0777197.4
	KATERINOWKA	57 32 51,20	4,0684082.0
	KRIWOTSCHINZI	62 53 48,39	4,0916309.6
		180 0 1,20	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.			Log. des côtés exp. en toises.
No. 53. IV. 1. p. 184. III. 27. p. 183.	MONTSCHINZI.....	68°	1'	24,69	4,0916309.6
	BASALIA.....	45	50	31,42	3,9801675.4
	KATERINOWKA.....	66	8	4,92	4,0855764.0
		180	0	1,03	
No. 54. III. 26. p. 183.	TUROWKA.....	57	52	57,28	4,0855764.0
	BASALIA.....	73	23	41,95	4,1392139.9
	MONTSCHINZI.....	48	43	21,99	4,0336573.7
		180	0	1,22	
No. 55. III. 25. p. 183.	DELOSENKA.....	57	57	35,58	4,0336573.7
	TUROWKA.....	53	34	2,61	4,0109832.1
	BASALIA.....	68	28	22,80	4,0740244.3
		180	0	0,99	
No. 56. III. 24. p. 182.	SSIWKI.....	51	39	11,26	4,0740244.3
	DELOSENKA.....	54	32	2,82	4,0904297.1
	TUROWKA.....	73	48	47,27	4,1619927.4
		180	0	1,35	
No. 57. III. 23. p. 182.	MATWEJEWZI.....	66	10	31,64	4,1619927.4
	SSIWKI.....	69	37	54,56	4,1726328.5
	DELOSENKA.....	44	11	35,25	4,0439542.8
		180	0	1,45	
No. 58. III. 22. p. 182.	MOSTY.....	48	40	56,05	4,0439542.8
	MATWEJEWZI.....	69	52	22,22	4,1409142.0
	SSIWKI.....	61	26	43,03	4,1119533.3
		180	0	1,30	
No. 59. III. 21. p. 182.	KREMENETZ.....	62	5	8,95	4,1119533.3
	MOSTY.....	58	46	57,71	4,0977447.2
	MATWEJEWZI.....	59	7	54,68	4,0993376.8
		180	0	1,34	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 60. III. 20. p. 182.	GURNIKI..... KREMENETZ..... MOSTY.....	46° 22' 18,97 44 21 54,60 89 15 47,90 <hr/> 180 0 1,47	4,0993376.8 4,0843179.6 4,2396638.2
No. 61. III. 19. p. 182.	SMORDWA..... GURNIKI..... KREMENETZ.....	60 28 21,71 81 52 20,58 37 39 19,73 <hr/> 180 0 2,02	4,2396638.2 4,2957005.6 4,0860618.3
No. 62. III. 18. p. 182.	BORBIN..... SMORDWA..... GURNIKI.....	42 51 24,94 69 59 14,83 67 9 22,05 <hr/> 180 0 1,82	4,0860618.3 4,2263965.1 4,2179717.5
No. 63. III. 17. p. 182.	KRUPL..... SMORDWA..... BORBIN.....	72 49 47,09 43 49 2,15 63 21 12,47 <hr/> 180 0 1,71	4,2179717.5 4,0781035.2 4,1890074.4
No. 64. III. 16. p. 182.	SCHABTSCHA..... KRUPL..... SMORDWA.....	59 34 5,66 53 57 5,08 66 28 51,23 <hr/> 180 0 1,97	4,1890074.4 4,1610724.8 4,2157178.6
No. 65. III. 15. p. 181.	TORTSCHN..... KRUPL..... SCHABTSCHA.....	62 34 2,53 60 45 48,58 56 40 11,02 <hr/> 180 0 2,13	4,2157178.6 4,2083441.1 4,1894786.9
No. 66. III. 14. p. 181.	ROSCHSCHITSCHIE..... TORTSCHN..... KRUPL.....	62 31 50,10 58 57 11,78 58 31 0,02 <hr/> 180 0 1,90	4,1894786.9 4,1742816.8 4,1722722.8

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 67. III. 13. p. 181.	OSMIGOWITSCHI	55° 58' 55,57	4,1722722.8
	ROSCHISCHITSCHÉ	44 51 48,79	4,1022374.4
	TORTSCHIN	79 9 17,41	4,2459632.5
		180 0 1,77	
No. 68. III. 12. p. 181.	GOLOBI	76 40 0,37	4,2459632.5
	OSMIGOWITSCHI	52 18 27,61	4,1561735.4
	ROSCHISCHITSCHÉ	51 1 33,91	4,1484920.5
		180 0 1,89	
No. 69. III. 11. p. 181.	KOWEL	46 22 20,63	4,1484920.5
	GOLOBI	93 13 26,59	4,2881630.2
	OSMIGOWITSCHI	40 24 14,48	4,1005406.9
		180 0 1,70	
No. 70. III. 10. p. 181.	TSCHEREMOSCHNA	56 56 18,22	4,1005406.9
	KOWEL	59 18 2,52	4,1116799.0
	GOLOBI	63 45 40,67	4,1300260.7
		180 0 1,41	
No. 71. III. 9. p. 181.	DATIN	50 12 19,28	4,1300260.7
	TSCHEREMOSCHNA	62 20 15,81	4,1917575.6
	KOWEL	67 27 26,77	4,2099528.8
		180 0 1,86	
No. 72. III. 8. p. 181.	GUTAKAMENSKAJA	78 4 54,79	4,2099528.8
	TSCHEREMOSCHNA	44 51 7,21	4,0677764.9
	DATIN	57 3 59,53	4,1433350.6
		180 0 1,53	
No. 73. III. 7. p. 181.	TSCHERWISCHITSCHÉ	47 41 21,09	4,1433350.6
	GUTAKAMENSKAJA	85 55 41,52	4,2732979.3
	TSCHEREMOSCHNA	46 22 59,21	4,1341141.4
		180 0 1,82	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log des côtés exp. en toises.
No. 74.	DOLSCHAJA-GLUSCHA	46° 20' 52,52	4,1341141.4
III. 6.	TSCHERWISCHTSCHIE	44 7 16,52	4,1173696.4
p. 180.	GUTAKAMENSKAJA	89 31 52,68	4,2746353.5
		180 0 1,72	
No. 75.	SCHLÄPAN	69 34 8,61	4,2746353.5
III. 5.	BOLSCHAJA-GLUSCHA	56 51 16,55	4,2257255.4
p. 180.	TSCHERWISCHTSCHIE	53 34 37,29	4,2084618.8
		180 0 2,45	
No. 76.	BELIN	69 25 32,03	4,2084618.8
III. 4.	SCHLÄPAN	60 19 28,57	4,1760273.0
p. 180.	BOLSCHAJA-GLUSCHA	50 15 1,19	4,1229242.0
		180 0 1,79	
No. 77.	LESKOWITSCHI	50 7 44,35	4,1229242.0
III. 3.	BELIN	75 10 48,41	4,2231597.2
p. 180.	SCHLÄPAN	54 41 28,98	4,1495690.2
		180 0 1,74	
No. 78.	BESDESCU	55 27 24,88	4,1495690.2
III. 2.	LESKOWITSCHI	71 13 2,95	4,2100345.7
p. 180.	BELIN	53 19 33,93	4,1380000.7
		180 0 1,76	
No. 79.	OSSOWNITZA	78 45 52,07	4,1380000.7
III. 1. p. 180.	BESDESCU	34 4 10,06	3,8947446.7
II. 39. p. 179.	LESKOWITSCHI	67 9 58,82	4,1109633.1
		180 0 0,95	
No. 80.	GATH	43 58 9,98	4,1109633.1
II. 38.	BESDESCU	58 56 34,38	4,2022378.3
p. 179.	OSSOWNITZA	77 5 17,57	4,2583109.4
		180 0 1,93	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 81. II. 37. p. 179.	BRONNA	60° 42' 13,46	4,2583109.4
	GATH	55 30 41,80	4,2337979.8
	BESDESCU	63 47 7,42	4,2706072.4
		180 0 2,68	
No. 82. II. 36. p. 179.	IWAZEWITSCH	98 19 28,44	4,2706072.4
	BRONNA	46 38 4,22	4,1367337.2
	GATH	35 2 28,75	4,0342440.7
		180 0 1,41	
No. 83. II. 35. p. 179.	SCHOMEIZÄKI	65 32 50,61	4,0342440.7
	IWAZEWITSCH	60 43 27,80	4,0157121.9
	BRONNA	53 43 42,46	3,9815122.3
		180 0 0,87	
No. 84. II. 34. p. 179.	MARINUS	31 55 48,21	3,9815122.3
	SCHOMEIZÄKI	49 42 18,98	4,1405223.8
	IWAZEWITSCH	98 21 54,07	4,2535086.2
		180 0 1,26	
No. 85. II. 33. p. 179.	RINKI	69 2 16,45	4,2535086.2
	SCHOMEIZÄKI	49 6 15,28	4,1617114.9
	MARINUS	61 51 30,48	4,2286093.4
		180 0 2,21	
No. 86. II. 32. p. 179.	DSERGELI	53 50 22,86	4,2286093.4
	RINKI	85 27 37,20	4,3201736.0
	SCHOMEIZÄKI	40 42 2,16	4,1358549.6
		180 0 2,22	
No. 87. II. 31. p. 178.	SOLOTEJEWO	69 18 34,73	4,1358549.6
	RINKI	40 25 54,07	3,9767462.5
	DSERGELI	70 15 32,37	4,1385048.1
		180 0 1,17	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 88.	TARASSOWZI.....	36° 17' 32,36	4,1385048.1
II. 30.	SOLOTEJEWO.....	73 41 33,94	4,3484218.4
p. 178.	RINKI.....	70 0 56,47	4,3392836.6
		180 0 2,77	
No. 89.	LOPATI.....	67 29 3,39	4,3392836.6
II. 29.	TARASSOWZI.....	49 18 49,88	4,2535531.8
p. 178.	SOLOTEJEWO.....	63 12 10,08	4,3243782.7
		180 0 3,35	
No. 90.	FALKOWTSCHISNA.....	71 57 32,07	4,3243782.7
II. 28.	TARASSOWZI.....	49 1 16,50	4,2241919.5
p. 178.	LOPATI.....	59 1 14,34	4,2794322.8
		180 0 2,91	
No. 91.	PUTZEWITSCHI.....	66 44 24,24	4,2794322.8
II. 27.	FALKOWTSCHISNA.....	47 26 56,23	4,1835228.8
p. 178.	TARASSOWZI.....	65 48 42,08	4,2763395.5
		180 0 2,55	
No. 92.	DOKUDOWO.....	98 40 43,56	4,2763395.5
II. 26.	PUTZEWITSCHI.....	29 28 5,21	3,9732504.8
p. 178.	FALKOWTSCHISNA.....	51 51 12,58	4,1770023.0
		180 0 1,35	
No. 93.	AMALIENHOF.....	91 18 8,26	4,1770023.0
II. 25.	DOKUDOWO.....	28 2 55,20	3,8494156.9
p. 178.	PUTZEWITSCHI.....	60 38 57,43	4,1174491.6
		180 0 0,89	
No. 94.	IWJE.....	55 36 22,43	4,1174491.6
II. 24.	DOKUDOWO.....	74 54 16,14	4,1856527.4
p. 178.	AMALIENHOF.....	49 29 22,90	4,0818817.7
		180 0 1,47	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 95. II. 23. p. 178.	DAUKNI..... IWJE..... DOKUDOWO.....	57° 56' 40,22 71 52 14,20 50 11 6,79 <hr/> 180 0 1,21	4,0818817.7 4,1316110.8 4,0391523.8
No. 96. II. 22. p. 177.	WIDNAPOL..... DAUKNI..... IWJE.....	46 35 54,71 39 18 20,48 94 5 45,81 <hr/> 180 0 1,00	4,0391523.8 3,9796001.0 4,1767726.2
No. 97. II. 21. p. 177.	LOITZI..... WIDNAPOL..... DAUKNI.....	51 27 55,09 94 10 35,43 34 21 31,04 <hr/> 180 0 1,56	4,1767726.2 4,2822836.7 4,0350015.0
No. 98. II. 20. p. 177.	TUPISCHKI..... LOITZI..... WIDNAPOL.....	65 39 31,24 70 49 38,80 43 30 50,76 <hr/> 180 0 0,80	4,0350015.0 4,0506500.0 3,9133569.2
No. 99. II. 19. p. 177.	DEIBISSI..... LOITZI..... TUPISCHKI.....	35 11 44,38 77 13 42,18 67 34 34,44 <hr/> 180 0 1,00	3,9133569.2 4,1417760.1 4,1185101.6
No. 100. II. 18. p. 177.	MEDNIKI..... DEIBISSI..... LOITZI.....	63 43 15,90 72 19 24,74 43 57 20,59 <hr/> 180 0 1,23	4,1185101.6 4,1448831.6 4,0073104.3
No. 101. II. 17. p. 177.	KONRADI..... MEDNIKI..... DEIBISSI.....	53 58 24,96 67 5 0,49 58 56 35,52 <hr/> 180 0 0,97	4,0073104.3 4,0637926.3 4,0323050.1

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 102.	BERESNÄKI.....	61° 15' 46,08	4,0323050.1
II. 16.	KONRADI.....	46 4 35,05	3,9468798.9
p. 177.	MEDNIKI.....	72 39 39,74	4,0691901.8
		180 0 0,87	
No. 103.	CHORUNSCHISCHKI.....	53 2 54,78	4,0691901.8
II. 15.	KONRADI.....	83 19 7,54	4,1636055.8
p. 177.	BERESNÄKI.....	43 37 58,81	4,0054363.9
		180 0 1,13	
No. 104.	NEMESCH.....	38 3 57,21	4,0054363.9
II. 14.	CHORUNSCHISCHKI.....	66 37 27,67	4,1782631.9
p. 177.	KONRADI.....	75 18 36,54	4,2010238.4
		180 0 1,42	
No. 105.	MESCHKANZI.....	69 8 14,72	4,2010238.4
II. 13.	NEMESCH.....	40 21 15,87	4,0417217.3
p. 176.	CHORUNSCHISCHKI.....	70 30 30,99	4,2048433.5
		180 0 1,58	
No. 106.	NADOROWTSCHISNA.....	47 25 10,61	4,2048433.5
II. 12.	MESCHKANZI.....	52 58 36,02	4,2399872.2
p. 176.	NEMESCH.....	79 36 15,99	4,3305850.3
		180 0 2,62	
No. 107.	KONGEDI.....	58 42 16,62	4,3305850.3
II. 11.	MESCHKANZI.....	67 15 31,47	4,3637265.4
p. 176.	NADOROWTSCHISNA.....	54 2 15,76	4,3070375.1
		180 0 3,85	
No. 108.	AMBROSCHISCHKI.....	85 49 35,45	4,3070375.1
II. 10.	KONGEDI.....	36 0 7,79	4,0774301.3
p. 176.	MESCHKANZI.....	58 10 18,74	4,2374217.5
		180 0 1,98	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp en toises.
No. 109. II. 9. p. 176.	BOLNIKI	82° 26' 14,52	4,2374217.5
	AMBROSCHISCHKI	64 19 30,69	4,1960693.6
	KONGEDI	33 14 16,22	3,9800867.3
		180 0 1,43	
No. 110. II. 8. p. 176.	TSCHIWILI	51 11 15,37	3,9800867.3
	BOLNIKI	69 45 36,05	4,0607562.2
	AMBROSCHISCHKI	59 3 9,49	4,0217417.4
		180 0 0,91	
No. 111. II. 7. p. 176.	STWORÄNZI	46 29 21,15	4,0217417.4
	TSCHIWILI	54 15 37,00	4,0706415.4
	BOLNIKI	79 15 3,02	4,1535695.7
		180 0 1,17	
No. 112. II. 6. p. 176.	LIPSK	80 54 24,66	4,1535695.7
	STWORÄNZI	63 0 58,03	4,1090049.2
	TSCHIWILI	36 4 38,35	3,9290853.8
		180 0 1,04	
No. 113. II. 5. p. 176.	KINDERTI	30 7 23,13	3,9290853.8
	LIPSK	75 15 44,10	4,2139761.9
	STWORÄNZI	74 36 54,05	4,2126559.6
		180 0 1,28	
No. 114. II. 4. p. 175	MARTINTSCHUNI	64 59 25,65	4,2126559.6
	KINDERTI	45 38 46,25	4,1097414.7
	LIPSK	69 21 49,99	4,2266146.2
		180 0 1,89	
No. 115. II. 3. p. 175.	KARISCHKI	86 6 7,11	4,2266146.2
	KINDERTI	44 20 59,05	4,0721192.5
	MARTINTSCHUNI	49 32 55,30	4,1089801.2
		180 0 1,46	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 116. II. 2. p. 175.	JAKSCHTI.....	87° 38' 22,06	4,1089801.2
	KARISCHKI.....	44 59 16,90	3,9587424.6
	KINDERTI.....	47 22 21,86	3,9760933.2
		180 0 0,82	
No. 117. II. 1. p. 175. I. 31. p. 174.	PONEDELI.....	67 42 31,23	3,9760933.2
	KARISCHKI.....	36 17 49,20	3,7821262.3
	JAKSCHTI.....	75 59 40,10	3,9967199.3
		180 0 0,53	
No. 118. I. 30. p. 174.	CHANUSCHISCHKI.....	43 31 16,28	3,9967199.3
	PONEDELI.....	81 7 34,22	4,1535094.9
	KARISCHKI.....	55 21 10,62	4,0739643.1
		180 0 1,12	
No. 119. I. 29. p. 174.	PILKALN.....	64 48 57,67	4,0739643.1
	CHANUSCHISCHKI.....	47 23 37,60	3,9842330.8
	PONEDELI.....	67 47 25,74	4,0838625.5
		180 0 1,01	
No. 120. I. 28. p. 174.	URMEN.....	70 58 13,36	4,0838625.5
	PILKALN.....	29 28 26,66	3,8002604.0
	CHANUSCHISCHKI.....	79 33 20,70	4,1010141.8
		180 0 0,72	
No. 121. I. 27. p. 174.	DAUDSEWAS.....	46 7 58,54	4,1010141.8
	URMEN.....	67 12 33,47	4,2078062.0
	PILKALN.....	66 39 29,79	4,2060275.0
		180 0 1,80	
No. 122. I. 26. p. 174.	ARMIDANI.....	75 26 28,78	4,2060275.0
	DAUDSEWAS.....	52 54 5,47	4,1219857.5
	URMEN.....	51 39 27,35	4,1146924.5
		180 0 1,60	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 123. I. 25. p. 174.	DRISTEN	92° 56' 25,22	4,1146924.5
	ARVIDÄNI	35 36 1,29	3,8802823.8
	DAUDSEWAS	51 27 34,23	4,0085642.1
		180 0 0,74	
No. 124. I. 24. p. 173.	DABORS-KALNS	70 18 4,57	4,0085642.1
	ARVIDÄNI	75 21 14,37	4,0204079.3
	DRISTEN	34 20 41,64	3,7861660.4
		180 0 0,58	
No. 125. I. 23. p. 173.	KREUTZBURG	50 55 56,06	3,7861660.4
	DABORS-KALNS	70 39 36,59	3,8708545.2
	ARVIDÄNI	58 24 27,72	3,8264161.3
		180 0 0,37	
No. 126. Triang. aux. 13*. p. 143.	JACOBSTADT	53 53 24,47	3,8264161.3
	DABORS-KALNS	3 56 2,37	2,7554339.9
	KREUTZBURG	122 10 33,19	3,8466493.6
		180 0 0,03	
No. 127. I. 22. p. 173.	GAISSA-KALNS	18 29 19,00	3,8264161.3
	DABORS-KALNS	101 11 57,16	4,3168506.5
	KREUTZBURG	60 18 45,00	4,2640892.9
		180 0 1,16	
No. 128. I. 21. p. 173	SESTU-KALNS	92 59 8,18	4,2640892.9
	GAISSA-KALNS	53 11 6,57	4,1680810.9
	DABORS-KALNS	33 49 46,70	4,0103186.6
		180 0 1,45	
No. 129. I. 20. p. 173.	ELKAS-KALNS	37 34 54,10	4,0103186.6
	GAISSA-KALNS	56 19 51,80	4,1453226.2
	SESTU-KALNS	86 5 15,47	4,2240536.4
		180 0 1,37	

Renvoi.	Stations	Angles sphériques.			Log des côtés exp. en toises.
No. 130.	NESSAULE-KALNS.....	57°	8'	32",94	4,2240536.4
I. 19.	ELKAS-KALNS.....	25	57	51,26	3,9410471.8
p. 173.	GAISSA-KALNS.....	96	53	37,19	4,2966124.9
		180	0	1,39	
No. 131.	RAMKAU.....	78	49	32,78	4,2966124.9
I. 18.	NESSAULE-KALNS.....	63	47	33,73	4,2578144.9
p. 173.	ELKAS-KALNS.....	37	22	55,58	4,0882031.4
		180	0	2,09	
No. 132.	KORTENHOF.....	27	7	14,05	4,0882031.4
I. 17.	RAMKAU.....	103	24	0,34	4,4173835.9
p. 173.	NESSAULE-KALNS.....	49	28	47,95	4,3102851.2
		180	0	2,34	
No. 133.	PALZMAR.....	66	52	53,12	4,3102851.2
I. 16.	KORTENHOF.....	47	28	46,94	4,2141305.1
p. 173.	RAMKAU.....	65	38	22,87	4,3061453.9
		180	0	2,93	
No. 134.	OPPEKALN.....	61	59	47,01	4,3061453.9
I. 15.	PALZMAR.....	42	46	58,92	4,1922368.2
p. 172.	KORTENHOF.....	75	13	16,99	4,3456154.6
		180	0	2,92	
No. 135.	MARIO-MÄGGI.....	102	16	9,71	4,3456154.6
I. 14.	OPPEKALN.....	31	22	57,50	4,0722778.2
p. 172.	PALZMAR.....	46	20	54,61	4,2151182.1
		180	0	1,82	
No. 136.	LENARD.....	30	48	40,07	4,2151182.1
I. 13.	MARIO-MÄGGI.....	111	4	47,59	4,4755934.7
p. 172.	OPPEKALN.....	38	6	35,25	4,2960763.2
		180	0	2,91	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 137. I. 12. p. 172.	HUMMELSHOF	79° 30' 16,38	4,2960763.2
	LENARD	64 27 2,28	4,2587129.4
	MARIO-MÄGGI.....	36 2 43,37	4,0730938.6
		180 0 2,03	
No. 138. I. 11. p. 172.	HELMET	55 2 8,25	4,0730938.6
	LENARD	31 51 12,64	3,8819675.2
	HUMMELSHOF.....	93 6 39,98	4,1589002.8
		180 0 0,87	
No. 139. I. 10. p. 172.	ARROL	90 57 14,32	4,1589002.8
	HELMET	15 41 30,64	3,5910676.7
	LENARD	73 21 15,56	4,1403687.2
		180 0 0,52	
No. 140. I. 9. p. 172.	ANNIKATZ.....	48 40 1,04	4,1403687.2
	ARROL	30 4 1,35	3,9646444.7
	HELMET	101 15 58,81	4,2563463.9
		180 0 1,20	
No. 141. I. 8. p. 172.	ARROHOF.....	60 56 25,24	4,2563463.9
	ANNIKATZ.....	39 55 35,70	4,1221805.2
	ARROL	79 8 1,32	4,3069209.8
		180 0 2,26	
No. 142. I. 7. p. 172.	HOLSTFENSHOF.....	81 39 27,26	4,3069209.8
	ARROHOF.....	25 4 3,12	3,9385829.7
	ANNIKATZ.....	73 16 31,24	4,2927696.6
		180 0 1,62	
No. 143. I. 6. p. 171.	OBERPAULEN	49 27 23,07	4,2927696.6
	ARROHOF.....	58 6 21,00	4,3409278.9
	HOLSTFENSHOF.....	72 26 19,87	4,3912810.8
		180 0 3,94	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.	Log. des côtés exp. en toises.
No. 144. I. 5. p. 171.	KERSEL.....	79° 31' 55,77	4,3912810.8
	ODERPAHLEN.....	61 21 48,06	4,3419035.8
	ARROHOF.....	39 6 19,44	4,1984240.3
		180 0 3,27	
No. 145. tr. aux. 12'. p. 143.	DORPAT.....	95 58 26,95	4,3419035.8
	ARROHOF.....	51 41 51,39	4,2389990.6
	KERSEL.....	32 19 43,61	4,0724390.0
		180 0 1,95	
No. 146. I. 4. p. 171.	SALL.....	49 57 1,91	4,1984240.3
	ODERPAHLEN.....	52 19 50,45	4,2129639.7
	KERSEL.....	77 43 10,06	4,3044330.5
		180 0 2,42	
No. 147. I. 3. p. 171.	MARIEN-MAGD.....	87 37 8,54	4,3044330.5
	SALL.....	61 47 59,13	4,2499319.6
	ODERPAHLEN.....	30 34 54,08	4,0113244.4
		180 0 1,75	
No. 148. I. 2. p. 171.	EDDAFER.....	60 37 26,03	4,0113244.4
	MARIEN-MAGD.....	63 21 51,50	4,0223745.9
	SALL.....	56 0 43,33	3,9897334.1
		180 0 0,86	
No. 149. I. 1. p. 171.	TAMMIK.....	71 15 4,28	3,9897334.1
	EDDAFER.....	63 40 14,85	3,9658465.7
	MARIEN-MAGD.....	45 4 41,48	3,8634889.3
		180 0 0,61	
No. 150. I. p. 140.	RAEKÜLL.....	49 26 29,42	3,8634889.3
	EDDAFER.....	96 23 29,28	3,9801149.7
	TAMMIK.....	34 10 1,68	3,7322562.6
		180 0 0,38	

Renvoi.	Stations.	Angles sphériques.			Log. des côtés exp. en toises.
No. 151. 2°. p. 140.	LEWALA.....	34°	17'	24,85	3,7322562.6
	RAEKÜLL.....	103	14	59,57	3,9697334.7
	EDBAFER.....	42	27	35,91	3,8108028.9
		180	0	0,33	
No. 152. 3°. p. 141.	WARRES-MÄGGI.....	38	50	50,92	3,8108028.9
	LEWALA.....	87	6	48,57	4,0128117.1
	RAEKÜLL.....	54	2	21,02	3,9215360.5
		180	0	0,51	
No. 153. 4°. p. 141	HALLJALL.....	47	4	18,47	3,9215360.5
	WARRES-MÄGGI.....	57	48	12,26	3,9843876.6
	LEWALA.....	75	7	30,02	4,0420986.5
		180	0	0,75	
No. 154. 5°. p. 141.	HOHENKREUTZ.....	64	56	24,62	4,0420986.5
	HALLJALL.....	35	55	4,94	3,8533965.3
	WARRES-MÄGGI.....	79	8	31,19	4,0771892.4
		180	0	0,75	
No. 155. 6°. p. 141.	MÄKI-PÄÄLYS.....	16	20	16,96	4,0771892.4
	HALLJALL.....	64	36	5,27	4,5838766.4
	HOHENKREUTZ.....	99	3	42,12	4,6225699.2
		180	0	4,35	

CHAPITRE XIV.

LES AZIMUTS OBSERVÉS.

§ 40. Tableau des latitudes des 9 points où l'azimut a été observé.

Notre arc méridional se partage, par les 9 points astronomiques sur lesquels la latitude et l'azimut ont été observés, en 8 arcs partiels. Les opérations géodésiques devant conduire finalement à la connaissance des distances entre les parallèles successifs de ces points, nous rangeons les azimuts des signaux, déterminés sur ces points, au nombre des données géodésiques, quoiqu'ils résultent d'opérations en partie astronomiques et dont le calcul suppose même les latitudes déjà connues, au moins très-approximativement. Je donnerai ici l'énumération des latitudes de ces points astronomiques, comme ils se succèdent à partir du terme méridional, situé au bord du Danube. Ces latitudes, si elles ne sont pas encore définitives, ont en tout cas une exactitude plus que suffisante pour le calcul des azimuts et des distances entre les parallèles, vu que l'erreur probable de ces latitudes ne s'élève guères à 0",5.

	Latitude.
I. STARO-NEKRASSOWKA, sur le Danube, terme méridional de l'arc de Bessarabie et de l'arc total compris entre le Danube et la Mer Glaciale;	45° 20' 2",8
II. WODOLUI, point trigonométrique central de Bessarabie	47 1 25,2
III. SSI PRUNKOWZI, point méridional de l'arc de Volynie et de Podolie	48 45 3,1
IV. KREMENETZ, point central de l'arc de Volynie et de Podolie	50 5 50,0
V. BELIN, terme méridional de l'arc de Lithuanie	52 2 42,2
VI. NEMESCH, point central de l'arc de Lithuanie	54 39 5,9

	Latitude.
VII. JACOBSTADT, terme méridional de l'arc Baltique.....	56° 30' 4,8
VIII. DONPAT, centre de la tour mobile de l'Observatoire, point central de l'arc Baltique	58 22 47.6
IX. MÄKI-PÄÄLYS, point extrême septentrional de l'arc méridional, sur l'île de Hogland dans le Golfe de Finlande, station trigonométrique <i>E</i>	60 4 29.4

A plusieurs de ces stations, le lieu où l'observation de la latitude a été faite, n'a pas été entièrement identique avec la station trigonométrique, où l'azimut a été observé. Mais les réductions à faire étaient exactement connues par de directes mesures des distances et des directions. Ce n'est qu'à l'île de Hogland, que j'ai dû exécuter une petite opération trigonométrique d'une base et de plusieurs triangles, pour effectuer la jonction entre la station trigonométrique *E*, située sur la cime du rocher MÄKI-PÄÄLYS, et la tente astronomique placée, pour l'observation de la latitude, dans la vallée voisine. Cette opération ayant donné la tente astronomique de 645,896 toises ou de 40,68 plus septentrionale que la station trigonométrique, *Gradmessung I.* p. 337, nous avons en partant de la latitude de la tente 60° 5' 10,05, celle de la station trigonométrique 60° 4' 29,4.

§ 50. Instruments et méthodes d'observation employés pour la détermination de l'azimut. Sur l'exactitude des azimuts observés à l'aide de l'instrument universel.

La difficulté de la détermination de l'azimut d'un objet terrestre augmente avec l'accroissement de la latitude du lieu d'observation. C'est que la projection du pôle sur l'horizon, à l'aide de nos appareils, devient plus incertaine, soit mécaniquement soit optiquement, en proportion que le zénith approche du pôle céleste. Supposons que le carré de l'erreur moyenne, dans la mesure de l'angle horizontal entre deux objets, situés près de l'horizon, s'exprime par η^2 : ce carré se transforme en $\eta^2 + \theta^2 \sec^2 h$, si l'un des deux points est élevé de l'angle h au dessus de l'horizon. Par conséquent le carré de l'erreur moyenne pour un azimut, h étant $= \varphi$, s'exprime par $\eta^2 + \theta^2 \sec^2 \varphi = \xi^2 + \theta^2 \tan^2 \varphi$. Si les coefficients ξ et θ étaient connus, cette formule donnerait une expression précise de la difficulté croissante dans la détermination de l'azimut, depuis l'équateur jusqu'au pôle terrestres. La projection du pôle sur l'horizon s'exécute à l'aide d'un instrument, dans lequel l'axe optique de la lunette est réuni à un axe horizontal tournant sur des supports invariables. Dans le cas que l'axe de rotation est effectivement horizontal, l'axe optique décrit un cercle céleste vertical, si les deux axes forment un angle droit précis. Mais dès qu'il existe un défaut dans cet angle, la projection n'est point exacte, car l'axe optique décrit, au lieu d'un grand cercle, un cercle parallèle, distant du grand cercle d'une petite quantité, dite erreur de collimation.

L'effet de cette erreur de collimation se détruit en employant l'instrument dans les deux positions opposées de l'axe de rotation. Quant à l'horizontalité de cet axe, s'il y a un défaut, c'est le niveau qui l'indique, et la correction qui en résulte peut être calculée. La perfection dont jouissent les niveaux de nos jours, élève la détermination de l'inclinaison d'un axe à peu près horizontal, au rang des opérations les plus exactes dans l'astronomie pratique, dès qu'on élimine l'effet de la différence dans l'épaisseur des tourillons, en employant l'instrument encore dans ses deux positions opposées.

Une difficulté à vaincre pour la détermination effective d'un azimut, provient de ce qu'il est impossible d'exécuter directement la projection du pôle, le lieu du pôle sur le ciel n'étant donné qu'en ce qu'il est le centre commun des cercles parallèles des étoiles circompolaires. L'étoile la plus voisine du pôle est naturellement la plus favorable pour la détermination du lieu du pôle, sous condition qu'elle soit assez luisante pour être vue, dans les lunettes des instruments géodésiques de première qualité, à toutes les heures de la journée. Par suite de la réunion d'un éclat suffisant et de la proximité du pôle, l'étoile polaire, α Ursae min., est choisie par préférence pour étoile de repère dans l'observation des azimuts. L'ascension droite et la déclinaison de la polaire étant données à l'aide des éphémérides, on peut calculer, la latitude étant connue, pour chaque moment de temps sidéral, l'azimut de l'étoile, et cet azimut ne sera sujet qu'à une très-petite inexactitude, à cause du mouvement lent de l'étoile dans son parallèle. Donc, en mesurant l'angle horizontal entre l'objet terrestre et la polaire, on obtient, par l'addition de l'azimut connu de l'étoile, l'azimut cherché de l'objet terrestre. Cette méthode de déterminer l'azimut a été employée, dans nos opérations, chaque fois que l'astronome avait à sa disposition un instrument universel, c. à d. sur tous les points astronomiques de notre arc, depuis le Danube jusqu'à la Mer Glaciale, à l'exception de deux.

M. de Tenner, dans ses premières opérations, celles de l'arc de Lithuanie, n'avait pas encore un tel instrument à sa disposition. Pour déterminer les azimuts à BELIN et à NEMESCU, il établit sur chacune de ces stations un instrument des passages, de dimensions considérables, en l'employant tant à la détermination du temps absolu, qu'à celle de l'azimut d'une mire, placée sur le terrain près de la méridienne.

Dans mon ouvrage, *Gradmessung I.* p. 100 à 107 et p. 324 à 334, j'ai détaillé tout ce qui concerne l'emploi de l'instrument universel, soit pour déterminer l'azimut d'un objet terrestre par la polaire, soit pour trouver le temps absolu à l'aide des différences azimutales entre la polaire et une étoile fondamentale. Il résulte de cet exposé, que pour la juste détermination de la différence azimutale entre l'objet terrestre et la polaire, il ne s'agit que de connaître la vraie inclinaison de l'axe horizontal de rotation, dans l'observation de la polaire, même si l'angle entre les deux axes de rotation, vertical et horizontal, s'écarte d'un petit nombre de secondes de 90° , et de faire les observations dans les deux positions opposées

de l'instrument, produites en tournant l'instrument de 180° sur son axe vertical. Il faut en outre que le niveau reste toujours sur l'axe; car il se peut que, si le niveau est ôté, l'inclinaison change un peu. Le niveau ne pouvant donner l'inclinaison que par sa transposition, il faut combiner deux observations de la polaire, pour les deux positions renversées du niveau. L'observation faite dans les deux positions opposées de l'instrument donne l'erreur de l'axe optique, par l'objet terrestre, et fait disparaître l'effet qu'exercent, sur la projection de l'étoile, soit la différence des tourillons, soit une flexion inconnue de l'axe, ou tout autre défaut constant dans l'instrument. C'est ainsi que, par la combinaison indiquée, on parvient finalement à une mise azimutale complète, et par là à une détermination moyenne de la différence azimutale, entre l'objet terrestre et la polaire; détermination dont l'exactitude n'est limitée que par les effets des erreurs d'observation accidentelles, et par l'imperfection dans la rondeur des tourillons. Heureusement, cette rondeur est si parfaite dans les instruments modernes, qu'il est difficile d'en découvrir les défauts, même à l'aide d'appareils d'épreuve aussi sensibles, que le niveau et le levier de touche ou le microscope.

On voit qu'une mise azimutale complète se compose des 8 opérations que voici, symétriquement arrangées et divisées en deux groupes pour les deux positions de l'instrument *R* et *L*, le cercle divisé étant une fois à droite, l'autre fois à gauche de l'axe vertical.

I. Position de l'instrument *R* (ou *L*).

1. Première observation de l'objet terrestre.
2. Première " de l'étoile polaire; position du niveau (1).
3. Seconde " " " " " " " (2).
4. Seconde " de l'objet terrestre.

II. Position de l'instrument *L* (ou *R*).

5. Troisième observation de l'objet terrestre.
6. Troisième " de l'étoile polaire; position du niveau (2).
7. Quatrième " " " " " " " (1).
8. Quatrième " de l'objet terrestre.

C'est l'arrangement le plus avantageux d'une mise. On peut aussi commencer par les deux observations terrestres, et finir la mise par les autres deux observations terrestres. Dans ce dernier arrangement, l'observation céleste s'absout dans un espace de temps plus court, ce qui présente un avantage, surtout si l'état du ciel est douteux.

Pour l'exécution d'une telle mise il faut en moyenne près de 40 minutes de temps. Six mises distribuées de 15° à 15° sur le quart du limbe ont été regardées comme indispensables pour l'évaluation finale

d'un azimut. C'est le même nombre de mises que celui qui s'emploie pour la détermination d'un angle terrestre et qui suffit pour réduire l'incertitude du résultat à une fraction de seconde, quant aux erreurs accidentelles.

Pour préciser numériquement l'exactitude des azimuts, j'ai recherché la somme des carrés des écarts entre les azimuts isolés que donne chaque mise, et leur moyenne, pour les différentes stations depuis $45^{\circ} 20'$ jusqu'à $70^{\circ} 40'$, en supposant que dans des instruments d'égales dimensions, employés par des astronomes également exercés, l'exactitude primitive des observations est sensiblement la même. En réunissant les chiffres à deux groupes, séparés par la latitude de Hogland = $60^{\circ} 4'$, et en représentant chaque écart par $\sqrt{(\xi^2 + \varrho^2 \tan^2 \varphi)}$, enfin eu égard au nombre de mises, observées dans chaque lieu, je suis parvenu aux deux équations :

$$58 \xi^2 + 113,8 \varrho^2 = 107,87 ; \text{ latitudes depuis } 45^{\circ} 20' \text{ jusqu'à } 60^{\circ} 4'$$

$$66 \xi^2 + 357,3 \varrho^2 = 276,54 ; \text{ latitudes depuis } 62^{\circ} 38' \text{ jusqu'à } 70^{\circ} 42'$$

et aux valeurs : $\xi^2 = 0,536 \quad \varrho^2 = 0,675$.

Donc le carré de l'erreur moyenne d'une mise isolée, pour la latitude φ , est

$$\pi = 0,536 + 0,675 \tan^2 \varphi.$$

La table suivante a été calculée sur cette formule, depuis $\varphi = 0^{\circ}$ jusqu'à $\varphi = 75^{\circ}$.

Latitude.	Pour une mise azimutale isolée,			Pour la moyenne de six mises, erreur probable.
	carré de l'erreur moyenne.	erreur moyenne.	erreur probable ψ .	
$\varphi = 0^{\circ}$	0,536	0,732	0,494	0,202
5	0,541	0,736	0,497	0,203
10	0,557	0,746	0,503	0,205
15	0,585	0,765	0,516	0,210
20	0,625	0,791	0,533	0,218
25	0,683	0,826	0,557	0,228
30	0,761	0,872	0,588	0,240
35	0,867	0,930	0,627	0,256
40	1,011	1,005	0,678	0,277
45	1,211	1,100	0,742	0,303
50	1,494	1,222	0,824	0,336
55	1,913	1,383	0,933	0,380
60	2,561	1,600	1,079	0,440
65	3,640	1,908	1,287	0,525
70	5,630	2,373	1,600	0,653
75	9,935	3,152	2,126	0,868

Pour $\varphi = 0^\circ$, nous avons $\psi = 0,494$, c'est l'erreur probable de la mesure de l'angle horizontal entre l'objet terrestre et la polaire, placée tout près de l'horizon mais offrant une image calme et précise comme dans des élévations de 45° à 70° au-dessus de l'horizon. Ce ψ est directement comparable à l'erreur probable de l'angle terrestre observé, par une seule mise faite avec l'instrument universel, entre deux objets terrestres, et qui a été trouvée, p. 147, = $0,955$ ou presque le double de notre ψ . Cette supériorité des mesures angulaires, dans les observations azimutales, s'explique parfaitement par les circonstances suivantes.

- a. Pour l'observation des azimuts, toujours les heures des images les plus calmes ont été choisies, et très-souvent l'objet terrestre a été une mire de forme avantageuse, placée à une assez petite distance pour que les ondulations de l'image devinssent à peu près insensibles; l'étoile polaire, le second objet de visée, étant sans exception d'une précision parfaite.
- b. Dans chaque mise, les deux objets, la mire et l'étoile, ont été pointés quatre fois, tandis que, pour un angle terrestre, il n'y avait d'ordinaire que deux pointages de chaque objet.
- c. L'importance de la détermination de l'azimut engageait l'astronome à faire les observations azimutales avec le plus grand soin possible. Dans la mesure des angles terrestres il a fallu quelquefois se dépêcher, pour parvenir à la mise complète de tous les objets terrestres.

Le ψ que donne la table précédente contient déjà l'effet des inexactitudes dans la détermination du temps absolu, effet qui a été toujours très-insignifiant à cause des grands soins voués à cet élément important.

Maintenant il reste à déterminer l'exactitude des azimuts a calculés de l'étoile polaire. Ces a , abstraction faite de l'inexactitude dans la détermination du temps absolu, peuvent être en défaut, par suite d'une erreur $d\alpha$ dans l'ascension droite, d'une erreur $d\delta$ dans la déclinaison de l'étoile, adoptées pour le calcul, enfin par une erreur $d\varphi$ dans la latitude supposée du lieu d'observation. Pour un azimut, compté du nord par l'est, et pour l'angle horaire de la polaire $t = (\text{asc. dr.} - \text{temps sid.})$, exprimé en temps, nous avons, en mettant

$$15 \sec \varphi \cos \delta \cos t = m, \quad - \sin t \sec \varphi = n, \quad \sin a \operatorname{tg} \varphi = p,$$

avec une exactitude suffisante pour le but :

$$da = m d\alpha + n d\delta + p d\varphi.$$

Dans cette expression p est toujours une petite fraction, car nous avons pour le plus grand a , l'étoile étant dans son élongation,

pour $\varphi = 45^\circ 20'$, le maximum $p =$	0,037
60 5	0,090
70 40	0,223.

On voit que pour la moyenne de deux mises, observées dans des angles horaires qui diffèrent de 12 heures, da devient zéro. Il est par conséquent le plus avantageux de partager les 6 mises à faire de sorte, que les angles horaires forment des couples opposés. Mais il est difficile de remplir cette condition, surtout si l'objet terrestre éloigné n'est distinctement visible que pendant les heures favorables de l'après-midi. En employant une mire peu distante, on a plus de chances pour cet arrangement. Dans ce cas, il faut ajouter l'observation de l'angle entre la mire et l'objet terrestre éloigné, pour obtenir l'azimut de ce dernier.

Le premier calcul des azimuts a été fait sur tous les points astronomiques, depuis le Danube jusqu'à la Mer Glaciale, en employant les ascensions droites et les déclinaisons apparentes, que présentent les *Tabulae Regiomontanae*, eu égard toujours à l'effet de l'aberration diurne. Mais les coefficients de l'aberration et de la nutation que Bessel a adoptés, 20,255 et 8,977, doivent être corrigés de + 0,190 et de + 0,246, voyez *Stellarum fixarum pos. med.* 1852, p. XXIV. Les corrections à porter sur les positions Besseliennes, par suite de ces défauts, se trouvent avec une exactitude suffisante à l'aide des quantités a, b, c, f , qu'offrent les tables p. XXV et XXVI du même ouvrage. Ces corrections sont

$$d'\alpha = -(a + b) \sec \delta \quad \text{et} \quad d'\delta = -(c + f).$$

Quant à la recherche des corrections pour les positions moyennes, adoptées dans les *Tabulae Regiom.*, j'ai suivi la voie que voici. Les observations de Bradley réduites avec la nutation 9,223 donnent

$$\begin{array}{l} \text{pour 1755,0, l'ascension dr. moyenne } \alpha = 0^h 43^m 42,74 \\ \text{la déclinaison } \delta = 87^\circ 59' 41,11 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Voyez } \textit{Fundam.} \text{ p. 325} \\ \text{et } \textit{Tab. Reg.} \text{ p. XLIII.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{Les } \textit{Tabulae Regiom.} \text{ présentent } \alpha = 0^h 43^m 43,00 \\ \delta = 87^\circ 59' 41,12; \end{array}$$

$$\text{done pour 1755,0 : } d\alpha = -0,26, \quad d\delta = -0,01.$$

Les observations de Poulkova, faites par M. Schweizer à l'aide d'un instrument des passages, contrôlé pour chaque observation de l'étoile polaire par deux mires et par un nivellement complet de l'axe, ont donné pour

$$1843,0 : \alpha = 1^h 3^m 1,91$$

$$\text{au lieu de } 1 \quad 3 \quad 1,17 \text{ dans les } \textit{Tab. Reg.},$$

$$\text{done pour 1843,0 : } d\alpha = +0,74.$$

Voyez le mém. de M. Lindhagen dans *le Recueil de mém. prés. par les astr. de Poulkova etc.*, vol. I. p. 263

Les déclinaisons de la polaire observées à Poulkova par M. Peters, présentent pour 1842,0 une correction $d\delta = -0,03$, *Recueil*, vol. I. p. 121. L'exactitude parfaite des déclinaisons moyennes des *Tabulae Regiom.* ayant été confirmée en outre par les observations de Dorpat qui avaient donné pour 1824,0 $d\delta = +0,04$ par les observations de Struve, et pour 1832,0 $d\delta = +0,04$ par les observations de Preuss, nous sommes autorisés à regarder $d\delta = 0$, au moins pour la durée des observations astronomiques de la mesure de nos degrés, ou depuis 1824 jusqu'en 1853.

La réunion des $d\alpha$ et $d\delta$ pour l'aberration et la nutation, avec $d\alpha = -0,26$ en 1755, et $d\alpha = +0,74$ en 1843, $d\delta$ étant $= 0$, donne finalement l'expression complète des corrections à porter sur les lieux apparents de la polaire puisés dans les *Tabulae Reg.*, T indiquant l'époque de l'observation :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= +0,74 + 0,0114 (T - 1843,0) - (a + b) \sec\delta, \\ \Delta\delta &= - (c + f).\end{aligned}$$

Ces $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ ne peuvent être sujets qu'à des inexactitudes minimales. Admettons cependant que dans les positions de l'étoile polaire corrigées de $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$, et qui ont été employées dans le calcul final des azimuts, il subsiste encore des erreurs probables $\nu\alpha$, $\nu\delta$, et pour la latitude supposée un $\nu\varphi$. En mettant $\nu\alpha = \mp 0,5$, $\nu\delta = \mp 0,2$ et $\nu\varphi = \mp 0,5$, nous sommes à l'abri de l'objection d'avoir exagéré l'exactitude des azimuts, et nous aurons pour l'erreur probable de l'azimut a d'un objet terrestre, directement comparé avec l'étoile polaire à l'aide de z mises

$$\nu a = \mp \frac{\psi}{z} \mp 0,5 m \mp 0,2 n \mp 0,5 p.$$

Dans cette expression m , n , p sont les moyennes des valeurs de ces coefficients, qui conviennent aux différents angles horaires des mises.

§ 51. Les 9 azimuts déterminés.

Je présenterai les azimuts selon l'ordre dans lequel les points astronomiques se suivent, en partant de la station la plus méridionale.

1. AZIMUT DÉTERMINÉ A STARO-NEKRASSOWKA PAR M. PRAZMOVSKI; 1852, SEPT. 16 A 19;

$$\varphi = 45^{\circ} 20' 2,8''.$$

L'instrument employé pour la détermination de l'azimut, à l'aide des différences azimutales entre l'objet terrestre et la polaire, a été, sur six des points astronomiques de l'arc méridional, l'instrument universel d'Ertel, soit celui dont j'ai parlé p. 17, soit un autre exemplaire de construction analogue et de dimensions identiques. A STARO-NEKRASSOWKA un instrument universel de Repsold a été choisi pour

ce but, des mêmes dimensions que celui d'Ertel, mais dans lequel les quatre verniers étaient remplacés, pour chacun des deux cercles, horizontal et vertical, par deux microscopes à micromètres. La lunette avait 22,5 pouces de foyer et 22 lignes d'ouverture, avec un grossissement de 54 fois, de près le même que celui de l'instrument d'Ertel, qui était de 60 fois. Une différence essentielle existe cependant entre les deux instruments, savoir que l'instrument de Repsold n'était pas pourvu d'une lunette de vérification. voir p. 33. Cette circonstance désavantageuse a dû engager M. Prazmovski à établir son instrument le plus solidement possible sur un pilier massif, les expériences faites à Poulkova, avant le départ de l'expédition de Bessarabie, ayant prouvé que cet instrument, tellement établi, jouissait par son poids considérable et par l'excellente réunion de ses pièces, d'une invariabilité incontestable du porte-microscopes, pendant le mouvement du cercle divisé, avec la lunette, autour de l'axe vertical. M. Prazmovski, dans son rapport dressé après son retour de Bessarabie, donne les renseignements suivants sur ses dispositions relatives à l'observation de l'azimut.

«La solidité du pilier était une des conditions les plus importantes pour l'exactitude des observations. J'ai pris toutes les précautions possibles pour ce but. Une excavation, de trois pieds environ de profondeur, a été creusée dans le sol qui était d'une fermeté remarquable (terre glaise). Au fond, on a enfoncé trois pilotis en bois dur, d'un pied et demi de long. Tout ce fond a été couvert d'une couche d'un excellent mortier en chaux et sable. Un bloc d'une pierre calcaire très-poreuse, à deux surfaces horizontales, a été placé dessus. Sur le bloc j'ai fait sceller en mortier un cube de la même pierre, et sur cette pierre une dalle, d'un calcaire plus dur, qui devait servir de base à l'instrument. Les observations devant commencer avant que le mortier eût le temps de dessécher complètement, surtout sous terre, j'espérai que les trois pilotis contribueraient essentiellement à augmenter la stabilité du pilier. Si le changement hygrométrique du bois pouvait donner quelques petits mouvements au pilier, ils devaient être d'une marche régulière, et par cela même peu à craindre. L'expérience a justifié l'attente. Le pilier était d'une solidité qui ne laissait rien à désirer.»

«Pour déterminer l'azimut d'un des sommets de triangle du premier ordre, dans ce climat où les images des objets terrestres distants sont rarement tranquilles, j'ai préféré d'observer l'azimut d'une mire pas trop éloignée, donc mieux visible, et de transporter cet azimut sur le point trigonométrique par l'angle intermédiaire mesuré avec soin. Donc j'ai fait enfoncer au nord de l'observatoire, à une distance d'au delà d'une verste, un pieu sur lequel se trouvait un carré noir, d'un pied de côté, au milieu duquel j'ai fait placer un autre carré blanc de deux pouces de côté. La déviation de cette mire était de quelques minutes du méridien. Le pieu

était solidement fixé dans le sol très-dur. S'il y avait un déplacement du pieu dans le sol (ce qui n'aurait pas été étonnant, dans un pays où les pluies très-rares permettent au sol de dessécher si fortement qu'il fait des crévasses de plusieurs lignes de large et d'une étendue considérable), ce déplacement s'éliminait par les mesures de l'angle entre la mire et la flèche du clocher de l'église de St. Nicolas à ISMAÏL, mesures entreposées entre les déterminations de l'azimut.»

«L'azimut a été déterminé par 12 mises, dans chacune desquelles la polaire a été observée deux fois et la mire autant de fois, pour chaque position du cercle. Le premier pointage sur la mire précédait, le second suivait les deux observations de la polaire. L'angle entre la mire et le clocher a été déterminé par le même nombre de mises.»

Pour la date moyenne 1852, sept 18, j'ai trouvé $\Delta\alpha = + 1;17$, $\Delta\delta = - 0;26$. Ces corrections ayant été appliquées aux positions des *Tabulae Reg.* prises dans l'éphéméride de Berlin, les azimuts suivants de la mire ont été calculés :

		Azimut.			
1852. Sept. 16.	8 ^h 1 temps sid.	359° 54' 51 ^h 74	— 0,16 $d\alpha$	+ 1,35 $d\delta$	— 0,04 $d\varphi$
	9,1	51,42	— 0,28 $d\alpha$	+ 1,18 $d\delta$	— 0,03 $d\varphi$
	9,8	52,00	— 0,35 $d\alpha$	+ 1,02 $d\delta$	— 0,03 $d\varphi$
» 17.	15,7	53,10	— 0,41 $d\alpha$	— 0,83 $d\delta$	+ 0,02 $d\varphi$
	17,7	51,85	— 0,21 $d\alpha$	— 1,28 $d\delta$	+ 0,03 $d\varphi$
» 18.	6,1	52,65	+ 0,12 $d\alpha$	+ 1,41 $d\delta$	— 0,04 $d\varphi$
	6,8	52,21	+ 0,02 $d\alpha$	+ 1,42 $d\delta$	— 0,04 $d\varphi$
	8,2	51,27	— 0,18 $d\alpha$	+ 1,33 $d\delta$	— 0,03 $d\varphi$
	9,7	51,69	— 0,34 $d\alpha$	+ 1,04 $d\delta$	— 0,02 $d\varphi$
» 19.	15,9	49,95	— 0,40 $d\alpha$	— 0,88 $d\delta$	+ 0,02 $d\varphi$
	16,4	51,36	— 0,35 $d\alpha$	— 1,02 $d\delta$	+ 0,03 $d\varphi$
	16,9	50,44	— 0,30 $d\alpha$	— 1,14 $d\delta$	+ 0,03 $d\varphi$
Moyenne $a =$		359° 54' 51 ^h 72	— 0,24 $d\alpha$	+ 0,30 $d\delta$	+ 0,01 $d\varphi$.

En remplaçant $d\alpha$, $d\delta$ et $d\varphi$ par les erreurs probables $b\alpha = \mp 0;5$, $b\delta = \mp 0;2$, $b\varphi = \mp 0;5$, nous aurons l'erreur probable de la moyenne :

$$b_a = \frac{\mp 0;75}{\sqrt{12}} \mp 0;12 \mp 0;06 \mp 0;01 = \mp 0;26.$$

L'azimut de la mire a été transporté sur la flèche de l'église d'ISMAÏL, par l'angle intermédiaire, mesuré également par 12 mises = $88^{\circ} 58' 44''52 \pm 0''36$. Ainsi nous avons l'azimut d'ISMAÏL =

$$270^{\circ} 56' 7''20 \mp 0''44$$

$$\text{Réduction au centre} \quad - 1,69.$$

Donc finalement :

AZIMUT DE L'ÉGLISE ST. NICOLAS A ISMAÏL,

pris du centre de la station STARO-NEKRASSOWKA :

$$\mathbf{A' = 270^{\circ} 56' 5''51 \mp 0''11.}$$

Le même azimut avait été déterminé, en 1849, = $270^{\circ} 56' 3''92$, par M. Schidlovsky, Professeur de l'Université de Charkow, à l'aide d'un instrument des passages transportable, d'une mire et de l'angle mesuré entre la mire et l'objet terrestre, détermination qui ne s'éloigne de celle que je viens de donner, que de $1''59$. Malgré cet accord assez satisfaisant, j'ai préféré de ne point considérer cette détermination antérieure, par la raison que l'instrument des passages employé n'avait pas été assez solidement établi, pour faire la projection de la polaire avec ce degré de certitude que réclame cette opération.

2. AZIMUT DÉTERMINÉ A WODOLUI, PAR M. SABLER, 1848, OCTOBRE 5 ET 6; $\varphi = 47^{\circ} 1' 25''2$.

Les observations ont été faites par l'instrument universel d'Ertel, établi exactement dans la verticale du centre de la station. M. Sabler choisit la pyramide de Kischenev, station trigonométrique de seconde classe, pour objet d'observation, parce qu'elle se présentait, par suite de sa distance modique de 5000 toises = 9 verstes, beaucoup mieux que les signaux lointains des stations principales. Avec les corrections $\Delta\alpha = + 1;81$ et $\Delta\delta = - 0''10$, qui conviennent à la date moyenne du 6 octobre, les six mises de M. Sabler, présentent les azimuts suivants de Kischenev :

		Azimut.			
1848. Oct. 5.	17 ^h 21'	temps sid. 282° 6' 23,96	— 0,27 $d\alpha$	— 1,31 $d\delta$	+ 0,04 $d\varphi$
	18 16	22,30	— 0,16 $d\alpha$	— 1,46 $d\delta$	+ 0,04 $d\varphi$
" 6.	13 10	21,45	— 0,57 $d\alpha$	— 0,02 $d\delta$	+ 0,00 $d\varphi$
	16 0	25,05	— 0,42 $d\alpha$	— 0,98 $d\delta$	+ 0,03 $d\varphi$
	17 15	25,79	— 0,28 $d\alpha$	— 1,30 $d\delta$	+ 0,04 $d\varphi$
	18 0	21,68	— 0,18 $d\alpha$	— 1,42 $d\delta$	+ 0,04 $d\varphi$
Moyenne $\alpha =$		282° 6' 23,37	— 0,31 $d\alpha$	— 1,08 $d\delta$	+ 0,03 $d\varphi$.

Quant à $\delta\alpha$, il faut remarquer que la détermination du temps absolu, le 5 et le 6 octobre, avait été sujette à une incertitude de $\mp 1;5$, et que par conséquent $\delta\alpha = \mp 0;5$ doit être remplacé ici par $\delta\alpha = \mp 1;5 \mp 0;5 = \mp 1;58$. Donc nous aurons pour l'erreur probable en α :

$$\delta\alpha = \frac{\mp 0;78}{\sqrt{6}} \mp 0;49 \mp 0;22 \mp 0;02 = \mp 0;63.$$

L'angle entre le signal de DSCHAMANA, point principal, et KISCHENEW pyramide ayant été mesuré $= 124^{\circ} 24' 56;29 \mp 0;40$, nous parvenons à

L'AZIMUT DU SIGNAL DE DSCHAMANA,

pris du centre de la station WODOLUI:

$$\Lambda'' = 157^{\circ} 41' 27;08 \mp 0;34.$$

3. AZIMUT OBSERVÉ AU POINT ASTRONOMIQUE SIGNAL DE SSUPRUNKOWZI, PAR LE CAPITAINE MELAN,

1838, SEPT. 8 A 14; $\varphi = 48^{\circ} 45' 3;1$.

Les observations détaillées faites à SSUPRUNKOWZI, par MM. Melan et Uexküll-Güldenband, pour la détermination du temps absolu, depuis le 2 jusqu' au 23 septembre, et celles qu'a faites Melan pour la détermination de l'azimut, sont publiées *Zanucku XII*, section troisième p. 65 à 72 et p. 90 à 92. Ces observations avaient été exécutées à l'aide de l'instrument universel d'Ertel *U*, mentionné p. 19, établi exactement au-dessus du centre de la station. Le calcul de ces observations se trouve dans le même volume, seconde section, p. 211 à 224 et p. 264 à 267. En examinant ce calcul, j'ai vu qu'il a été fait avec une parfaite exactitude; cependant, pour trouver l'angle horaire de la polaire, l'ascension droite de l'étoile culminante avait été employée à la place de l'ascension droite pour le moment de l'observation. J'ai corrigé cette petite inadvertance, correction qui ne s'élève qu'à $+ 0;09$ pour l'azimut. Pour la date moyenne du 11 septembre, j'ai trouvé: $\Delta\alpha = + 0;46$, $\Delta\delta = - 0;03$. Dans le calcul des azimuts, M. de Tenner a employé la latitude de SSUPRUNKOWZI qu'il avait déduite, $\varphi = 48^{\circ} 45' 0;48$, de la jonction géodésique avec NEMESCH, point astronomique de l'arc de Lithuanie, voir *Zanucku XII*, sect. 2, p. 373. Le vrai φ étant $48^{\circ} 45' 3;1$, nous avons à considérer encore la correction de l'azimut, correspondante à $d\varphi = + 2;62$. Les différentes petites corrections indiquées ayant été appliquées aux résultats donnés par M. de Tenner, les 7 azimuts suivants du signal de KARATSCHKOWZI ont été obtenus:

		Azimut.					
1848. Sept.	8.	16 ^h 45'	temps sid.	311° 35' 47",91	— 0,44 <i>da</i>	— 1,48 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>
	9.	16 50		50,53	— 0,43 <i>da</i>	— 1,51 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>
	10.	16 52		45,52	— 0,42 <i>da</i>	— 1,53 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>
	11.	17 0		48,10	— 0,40 <i>da</i>	— 1,57 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>
	12.	16 13		47,38	— 0,51 <i>da</i>	— 1,32 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>
	13.	16 43		48,09	— 0,44 <i>da</i>	— 1,48 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i>
	14.	17 14		45,66	— 0,37 <i>da</i>	— 1,62 <i>dδ</i>	+ 0,04 <i>dφ</i>
Moyenne <i>a</i> =				311° 35' 47",60	— 0,43 <i>da</i>	— 1,50 <i>dδ</i>	+ 0,03 <i>dφ</i> .

Cette moyenne ne diffère que de 0",04 de celle qu'a donnée M. de Tenner, *Zanucku XII*, sect. 2, p. 267, les différentes corrections s'étant, en majeure partie, réciproquement détruites. Notre moyenne qui repose sur 7 mises, une d'entre elles ayant été deux fois observée, le 8 et le 14 sept., donne pour l'erreur probable :

$$da = \mp \frac{0,30}{7} \mp 0",22 \mp 0",30 \mp 0",02 = \mp 0",48.$$

Nous avons par conséquent :

L'AZIMUT DU SIGNAL DE KARATSCHKOWZI,

pris du centre de la station de Ssuprunkowzi :

$$A''' = 311^{\circ} 35' 47",60 \mp 0",48.$$

4. AZIMUT OBSERVÉ AU POINT ASTRONOMIQUE SIGNAL DE KREMENETZ, PAR LE CAPITAINE MELAN, 1837, AOÛT 30 A SEPT. 2; $\varphi = 50^{\circ} 5' 50",0$.

Les observations faites, pour déterminer le temps et l'azimut à KREMENETZ, par les mêmes officiers qui ont observé en 1838 à Ssuprunkowzi, sont publiées *Zanucku XII*, section 3, p. 17 à 28. Les calculs se trouvent section 2, p. 183 à 185. L'instrument était le même qu'en 1838, établi également au centre de la station. La petite inadvertance relative aux ascensions droites de la polaire, que j'ai indiquée pour Ssuprunkowzi, a été commise aussi à KREMENETZ; mais la correction ne fut que de 0",01 pour l'azimut moyen. En outre, le signe de l'aberration diurne devant être changé pour toutes les six mises, les déclinaisons apparentes de la polaire étaient à corriger de $d\delta = -0",30, +0",40, -0",24, +0",40, -0",20, +0",40$. Pour l'époque du 1 sept., les corrections des *Tabulae Reg.* furent $\Delta\alpha = +0",68, \Delta\delta = -0",12$. Le calcul des azimuts ayant été fait avec la latitude = $50^{\circ} 5' 43",48$, déduite de celle de NEMESCU par la jonction géodésique avec KREMENETZ,

voir *Zanucku XII*, sect. 2, p. 303, à la place de la latitude effective = $50^{\circ} 5' 50''_0$, nous avons $d\varphi = + 6''_52$. Les différentes corrections requises ayant été appliquées aux résultats du calcul de Melan, nous avons les 6 azimuts du signal de GURNIKI que voici :

		Azimut.				
1837.	30 Août.	16 ^h 20'	temps sid.	18° 7' 15'' ₆₇	— 0,40 da	— 1,12 dδ + 0,03 dφ
	31 "	7 21		17,33	— 0,07 da	+ 1,54 dδ — 0,04 dφ
	1 Sept.	15 31		18,60	— 0,49 da	— 0,89 dδ + 0,03 dφ
	1 "	7 12		17,70	— 0,07 da	+ 1,54 dδ — 0,04 dφ
	2 "	15 12		17,85	— 0,52 da	— 0,79 dδ + 0,02 dφ
	2 "	6 50		17,27	— 0,00 da	+ 1,56 dδ — 0,04 dφ
Moyenne a =				18° 7' 17 40	— 0,26 da	+ 0,31 dδ — 0,01 dφ.

La moyenne, donnée par M. de Tenner, *Zanucku XII*, sect. 2, p. 185, est $18^{\circ} 7' 17''_22$, plus petite de $0''_18$. Pour l'erreur probable de notre moyenne nous trouvons :

$$da = \mp \frac{0,33}{\sqrt{6}} \mp 0''_13 \mp 0''_06 \mp 0''_01 = \mp 0''_35.$$

Nous avons donc :

L'AZIMUT DU SIGNAL DE GURNIKI.

pris du centre de la station KREMENETZ :

$$A''' = 18^{\circ} 7' 17''_40 \mp 0''_35.$$

5. AZIMUT OBSERVÉ AU POINT ASTRONOMIQUE SIGNAL DE BELIN, PAR LE LIEUTENANT CHODZKO,

1827, JUILLET 18 A SEPT. 27.

A BELIN la détermination de l'azimut fut faite à l'aide d'un instrument des passages, placé dans le méridien. Cet instrument avait un axe de 28,5 pouces, un tube de 41,6 pouces, avec un objectif de 29,6 lignes d'ouverture, et trois oculaires qui grossissaient 60, 37 et 24 fois. Cinq fils étaient au foyer, pour l'observation des passages. L'illumination du champ se faisait par l'axe. L'instrument reposait sur deux piliers réunis sous terre par un fondement commun. Le niveau à suspension donnait $6''_0$, pour un mouvement d'une ligne dans la bulle. Voyez *Zanucku IX*, p. 6. M. de Tenner était occupé à cette époque de la détermination de la latitude de BELIN, à l'aide d'un autre instrument des passages, plus grand, placé dans le premier vertical. Un observatoire avait été construit pour l'emplacement des deux instruments, l'un à côté de l'autre. Une excellente pendule de Hardy, propriété de l'Observatoire de Vilna, servait pour les deux instruments. Voyez la description de l'observatoire *Zanucku IX*, p. 9. Les

observations de M. Chodzko avaient un double but: celui de fixer la marche de la pendule, et de déterminer l'azimut de la mire méridienne, visible le jour et la nuit, et distante de 1073 toises, ou près de deux verstes, du côté sud. M. de Tenner avait prescrit: que l'erreur de la collimation du fil du milieu de la lunette méridienne dût être détruite chaque jour en renversant l'instrument sur la mire; que l'axe de rotation ne dût avoir aucune inclinaison; et que le fil du milieu fût constamment tenu sur la mire; tout cela à l'aide des différentes vis qui servaient à corriger soit les supports soit l'axe optique. Par suite de ces arrangements, les observations faites par M. Chodzko donnent directement les passages des étoiles par le cercle vertical de la mire. Le journal détaillé et le calcul des observations se trouvent: *Zanucku IX*, p. 51 à 69. M. Chodzko observait 12 étoiles depuis $16^h 19'$ jusqu'à $22^h 48'$ d'ascension droite, savoir trois étoiles très-australes, Antares, α^2 Capricorni et α Piscis austrini, dont la déclinaison moyenne est $-23^\circ 3'$, et 9 étoiles boréales, des constellations du Dragon, de la Lyre et du Cygne, avec une déclinaison moyenne de $46^\circ 6'$. Ces passages tombaient sur les heures favorables de l'après-midi jusqu'aux environs de minuit, heures dans le courant desquelles on trouve toujours des moments d'une image calme de la mire. La réduction donnant preuve d'une exactitude distinguée des passages observés et d'une marche excellente de la pendule, le premier des deux buts de ces observations, savoir celui de donner les corrections à appliquer aux intervalles de temps entre les deux passages par le premier vertical, observés par M. de Tenner pour la détermination de la latitude, a été parfaitement atteint. Car cette marche était indépendante d'un petit défaut, soit dans l'azimut supposé du vertical de la mire, soit dans les ascensions droites des étoiles. L'azimut de la mire devait être trouvé à l'aide des mêmes observations des 12 étoiles indiquées. L'exactitude de l'azimut trouvé dépendait par conséquent du degré de précision dont jouissaient les différences en ascension entre les étoiles zénithales et les étoiles voisines de l'horizon. Bessel avait publié en 1821, dans le volume VI des *Königsberger Beobachtungen*, les ascensions dr. de 58 étoiles circompolaires, déterminées par des observations faites à l'aide du cercle méridien de Reichenbach, dans les deux positions de l'instrument et dans les deux culminations, supérieure et inférieure. En 1825, dans le vol. X des *Königsberger Beobachtungen*, parut le nouveau catalogue fondamental des 36 étoiles principales. En possession de ces moyens, M. de Tenner se vit autorisé de remplacer la détermination de l'azimut à l'aide des passages de l'étoile polaire, par l'observation des étoiles hautes et basses indiquées, d'autant plus que les nouvelles tables des positions apparentes de l'étoile polaire, basées sur des observations faites également par le dit cercle méridien et publiées en 1826, dans le vol. XI des *Königsberger Beobachtungen*, n'étaient pas encore venues à sa connaissance. Aussi l'azimut de la mire = a se prononçait-il, dans les différences des passages des étoiles hautes et basses, en moyenne avec un coefficient à peine inférieur à l'unité, ou en moyenne de 0,94. Donc, par un

grand nombre d'observations, l'azimut devait provenir avec une exactitude presque égale à celle avec laquelle les différences en ascension droite des étoiles comparées étaient connues. M. de Tenner commença ses calculs en réduisant les positions moyennes de 1820 et 1825, données aux endroits cités, à l'époque de 1827,0, eu égard au mouvement propre de chaque étoile, que lui fournissait la comparaison soignée des positions que contiennent les *Fundamenta*. Le catalogue des positions moyennes de ces étoiles pour 1827,0 a été donné *Zanucku IX*, p. 23 et 24; les positions apparentes se trouvent p. 37 à 39. Ces dernières ont été calculées avec les chiffres 20",255 et 8",977 de l'aberration et de la nutation, adoptés dans les *Tabulae Regiom.*

Une circonstance avait cependant échappé à l'attention minutieuse de M. de Tenner, savoir que les ascensions droites Besseliennes de 1820, vol. VI, et celles de 1825, vol. X, ne sont pas directement comparables entre elles; circonstance difficile à reconnaître pour quiconque n'a pu poursuivre l'histoire des grands travaux de Bessel, dans tous les détails que fournissent les introductions des *Königsberger Beobachtungen*, les *Tabulae Regiom.*, et les différents ouvrages séparés et mémoires de ce grand astronome. En effet, les ascensions droites des étoiles circumpolaires de 1820, quoique déduites d'observations faites au cercle méridien de Reichenbach, ont pour base le premier catalogue fondamental de Koenigsberg de l'an 1815, obtenu à l'aide des anciens instruments, moins parfaits et moins puissants, de Dollond et de Cary; et Bessel n'a pas donné plus tard une nouvelle réduction de ces ascensions droites boréales pour les rattacher à son catalogue fondamental de 1825, adopté pour la confection des *Tabulae Regiomontanae*.

Les ascensions droites du catalogue fondamental de 1815 étant en moyenne de 0;050 plus fortes que celles de 1825, nous pourrions, au moins approximativement, corriger les ascensions dr. des 7 étoiles zénithales, basées sur le catalogue de 1815, de la quantité — 0;050, pour les rendre comparables aux ascensions dr. des trois étoiles australes α Scorpii, α^2 Capricorni et α Piscis austrini et des deux étoiles boréales α Lyrae et α Cygni, lesquelles ont été prises du catalogue de 1825; ce qui produirait pour la moyenne des 9 étoiles boréales une correction de — 0;050.7:9 = — 0;039. Le résultat déduit par M. de Tenner des calculs de M. Chodzko s'énonce par un azimut de la mire $a = - 0;69 \mp 0;21$, *Zanucku IX*, p. 67, c. à. d. que cette mire était à l'ouest du point sud. Un changement moyen dans les ascensions droites des étoiles zénithales de — 0;039, produit un $da = + 0;58:0,94 = + 0;62$, et nous parvenons par cette correction à un $a = - 0;07 \mp 0;21$, ou presque exactement zéro.

Cet azimut ne peut cependant être regardé comme la valeur définitive des observations de M. Chodzko, parce que la moyenne des différentes valeurs n'a pas été déduite conformément à la nature des données. Le tableau de M. Chodzko nous présente 113 différents a , trouvés par la comparaison des trois étoiles

australes avec les différentes étoiles zénithales à peu près simultanées. Il est évident qu'il faut former de ces données trois groupes distincts, l'un pour α Scorpii, l'autre pour α^2 Capricorni, le troisième pour α Piscis austrini. Par cette voie j'ai trouvé les azimuts que voici :

par α Scorpii	, comparée à 4 étoiles boréales,	30 jours d'obs.,	$a = - 0,76 \mp 0,39$
» α^2 Capricorni	» » 4 » »	7 » »	$a = + 0,41 \mp 0,78$
» α Pisc. austr.	» » 2 » »	3 » »	$a = + 4,95 \mp 1,38.$

Les erreurs probables que je viens de donner sont celles qui conviendraient aux trois a , si les ascensions droites adoptées avaient été parfaitement exactes. Supposons maintenant que les ascensions dr. apparentes fussent sujettes pour chaque étoile à une erreur probable de $\mp 0,050$, erreur qui n'est pas trop forte, car à côté des erreurs des positions moyennes il faut encore considérer les défauts dans l'aberration et dans la nutation, employées par Bessel. Dans cette supposition, nous avons pour nos trois groupes, les trois nouvelles erreurs probables $b'a$, correspondantes aux inexactitudes des ascensions droites, savoir $b'a = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 0,050^2} = \mp 0,056$ pour les deux premiers groupes, $b'a = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 0,050^2} = \mp 0,061$ pour le troisième groupe, et dont les effets sur l'azimut sont: $b'a = \mp 0,84$, $b'a = \mp 1,05$ et $b'a = \mp 0,93$.
Donc :

par α Scorpii	$a = - 0,76 \mp 0,39 \mp 0,84 = - 0,76 \mp 0,93$
par α^2 Capricorni	$a = + 0,41 \mp 0,78 \mp 1,05 = + 0,41 \mp 1,05$
par α Pisc. austr.	$a = + 4,95 \mp 1,38 \mp 0,93 = + 4,95 \mp 1,59$

$$\text{Moyenne } a = + 0,52 \mp 0,69.$$

Cet a diffère de celui qui se trouve dans les *Zanucku*, de $+ 1,21$, et présente une erreur plus que triple de celle qui y a été donnée. Mais même ce résultat n'est pas encore définitif, car il y reste toujours l'effet des aberrations et nutations defectueuses, soit sur les positions moyennes de Bessel, soit dans le calcul des positions apparentes. En outre, on peut encore contester, qu'il soit admissible de corriger les ascensions droites de 1820 de la quantité identique de $- 0,050$ pour toutes les étoiles, vu que pour les différentes étoiles fondamentales la réduction du catalogue de 1815 à celui de 1825 varie entre $- 0,078$ et $+ 0,166$, *Königsb. Beob. X*, p. X. Par ces raisons combinées j'ai cru devoir entièrement refaire le calcul de l'azimut de BELIN, en le basant sur les ascensions droites moyennes de mes *Positiones mediae* p. XXXI et suiv., trouvées par l'emploi des valeurs exactes de l'aberration et de la nutation. Dans ce travail, j'ai cru pouvoir et même devoir rejeter le groupe des trois jours d'observation de α Piscis austrini, étoile non observée à Dorpat, parce qu'il paraît douteux que la rectification

de l'instrument des passages, opérée d'ordinaire à 16^h temps sid., se soit parfaitement maintenue jusqu'à 22^h 48^m. Aussi cette circonstance a-t-elle été probablement la cause, pourquoi l'observation de α Piscis a été abandonnée à BELIN depuis le 28 juillet. Parmi les 8 étoiles boréales de comparaison, pour α Scorpii et α^2 Capricorni, il n'y a cependant que quatre, γ Draconis, α Lyrae, γ et α Cygni, déterminées à Dorpat, et j'ai combiné α Scorpii avec γ Draconis et α Lyrae, α^2 Capricorni avec γ et α Cygni. La diminution du nombre d'étoiles de comparaison est de peu de conséquence, car pour la combinaison d'une étoile avec deux ou avec quatre autres, le poids varie seulement de $\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{3}$, et cette diminution du poids est largement compensée par l'exactitude des positions moyennes des 6 étoiles.

Voici les ascensions moyennes de nos 6 étoiles, puisées dans les *Posit. med.*, et les corrections qui s'en déduisent pour les positions employées dans les *Žanucku* :

		1827,0	Correction des asc. dr. de Tenner.
α Scorpii	16 ^h 18 ^m	48,884 \mp 0,026	+ 0,013
γ Draconis	17 52	35,538 \mp 0,015	— 0,025
α Lyrae	18 31	4,887 \mp 0,008	— 0,007
α^2 Capricorni	20 8	27,038 \mp 0,011	+ 0,052
γ Cygni	20 16	1,234 \mp 0,018	— 0,124
α Cygni	20 35	32,166 \mp 0,010	— 0,001.

Les erreurs probables assignées à ces positions moyennes comprennent même les irrégularités des tourillons de l'instrument de Dorpat. De ces positions moyennes j'ai déduit les ascensions apparentes, à l'aide des coefficients exacts de l'aberration et de la nutation 20,445 et 9,223, et je les ai corrigées finalement de l'effet de l'aberration diurne. Avec ces données les deux valeurs suivantes de l'azimut ont été trouvées :

$$\text{par } \alpha \text{ Scorpii, } 29 \text{ jours, } a' = + 0,29 \mp 0,36 \mp 0,42 = + 0,29 \mp 0,56$$

$$\text{» } \alpha^2 \text{ Capric. } 7 \text{ » } a' = + 2,44 \mp 0,77 \mp 0,27 = + 2,44 \mp 0,81$$

$$\text{Moyenne } a' = + 1,00 \mp 0,46$$

à l'est du point sud. C'est cet $a' = + 1,00$ que je regarde comme l'azimut définitif provenant des observations de M. Chodzko, et qui diffère de $+ 1,69$ de l'azimut $- 0,69$ donné *Žanucku IX*, p. 67.

Cet azimut de la mire, observé au centre de la lunette méridienne, devait être transformé en l'azimut du signal LESKOWITSCH, pris du centre du signal de BELIN. Cette réduction a été faite par M. de Tenner avec la plus grande précision, par l'établissement, sur le terrain, d'une seconde mire qui était exactement autant à l'ouest de la première que le centre du signal de BELIN était à l'ouest de la ligne

tirée du centre de la lunette méridienne à la première mire. Puis l'angle entre cette seconde mire et le signal LESKOWITSCHI fut mesuré à l'aide du cercle répétiteur de Troughton, établi au centre de la station BELIN. Voyez les détails *Zanucku IX*, p. 67 à 69. La valeur de l'azimut de LESKOWITSCHI trouvée par M. de Tenner est $A' = 61^{\circ} 44' 6''.48$, du nord à l'est. Nous y ajoutons $- 1''.69$, ce qui donne $A'' = 61^{\circ} 44' 4''.79$. L'erreur probable de cet A' sera $\delta A' = \mp 0''.46 \mp 0''.78 = \mp 0''.91$, le second terme étant l'erreur probable de l'angle terrestre mesuré, voyez p. 155. Mais cette erreur est certainement encore trop faible. La lunette méridienne n'a été employée que dans une même position de l'axe, apparemment parce que, comme dans plusieurs anciens instruments, l'illumination du champ n'avait été arrangé que pour un des coussinets, perforé pour ce but. M. de Tenner s'était cependant convaincu que l'épaisseur des deux tourillons était exactement la même, *Zanucku IX*, p. 6. Mais il peut y avoir eu une flexion de l'axe, par suite de laquelle la collimation de l'axe optique change depuis l'horizon jusqu'au zénith, où elle atteint son maximum. Une telle flexion qui avait lieu dans l'ancienne lunette méridienne de Greenwich, a été indiquée par Pond; dans l'ancienne lunette de Dollond à Dorpat elle était de $4''.2$, voyez *Observ. Dorp.* vol. III, p. XXIX. Pour l'instrument de BELIN, de plus petites dimensions, il est permis de présumer que cette flexion n'ait pas été considérable, mais il se peut très-bien qu'elle ait exercé une influence de $2''$ sur l'azimut. Regardons ces deux secondes comme l'erreur probable à ajouter pour cet effet, et nous aurons $\delta A'' = \mp 0''.91 \mp 2''.00 = \mp 2''.20$.

Donc enfin :

AZIMUT DU SIGNAL DE LESKOWITSCHI,

pris du centre de la station BELIN :

$$A'' = 61^{\circ} 44' 4''.79 \mp 2''.20.$$

6. AZIMUT OBSERVÉ AU POINT ASTRONOMIQUE SIGNAL DE NEMESCH, PAR M. HLUSCHNEWITSCH,

ASTRONOME DE VILNA, 1832, JUILLET 31 A OCTOBRE 18.

Un rapport détaillé sur cette opération a été donné par M. de Tenner, *Zanucku* vol. IX, p. 843 à 881, contenant soit le journal complet, soit le calcul des observations.

M. de Tenner avait placé, en 1818, le signal de MESCHKANZI de sorte que le côté NEMESCH-MESCHKANZI coïncidât avec la méridienne, *Zanucku VIII*, p. 12. L'instrument des passages, employé à NEMESCH pour exécuter cette opération, ayant été de qualité inférieure, il fut trouvé indispensable de vérifier cet azimut. Ce travail de vérification a été fait en 1832 par M. Hluschnewitsch, alors second astronome de Vilna, à l'aide du même instrument des passages de RAMSDEN, de $5\frac{1}{2}$ pieds, propriété

de l'Observatoire de Vilna, dont M. de Tenner s'était servi en 1827, pour la détermination de la latitude de BELIN. Voyez *Zanucku* vol. IX, p. 843 et suiv. Un observatoire temporaire fut construit, en 1832, pour placer le dit instrument exactement au-dessus du centre de la station de NEMESCU, et à côté de l'instrument une pendule de Lepaute obtint sa place. L'établissement de ces appareils était entièrement analogue à celui qui avait été pratiqué en 1827 à BELIN.

Le signal de MESCHKANZI fut reconstruit de sorte que le point de visée coïncidât avec le centre de la station, conservé dans un massif de maçonnerie souterraine. Dans une distance méridionale de 834,33 toises une mire fut placée, de très-près dans la prolongation du côté MESCHKANZI-NEMESCU. Par de fréquentes observations, faites dans les deux positions de l'instrument et dans les moments de la meilleure visibilité du signal de MESCHKANZI, M. de Tenner détermina, en commun avec M. Hluschnewitsch, que la mire était à $1^{\text{m}}54 \mp k$ à l'est de la dite prolongation*). Les observations s'étendaient sur les trois étoiles α , δ et β Ursae min. et sur un nombre suffisant d'étoiles fondamentales. Pour chaque étoile observée, l'inclinaison de l'axe a été mesurée à l'aide du niveau. La collimation a été contrôlée par le renversement sur la mire, chaque fois que la mire était distinctement visible. Enfin la déviation du fil du milieu, dans le sens de l'azimut, a été soit faite exactement zéro, soit estimée par l'épaisseur connue du fil du milieu. De telles observations, continuées par l'espace de près de trois mois, alternativement dans les deux positions de l'instrument, et faites uniquement dans le but de déterminer l'azimut, devaient donner un résultat d'un degré d'exactitude éminent.

M'étant chargé du calcul des observations, j'obtins de M. de Tenner une copie vérifiée du journal. Mes calculs d'alors sont insérés dans les *Zanucku* vol. IX, p. 875 à 880. La réduction des fils latéraux au fil du milieu avait manifesté une exactitude distinguée des passages observés, lesquels avaient fait connaître la marche extrêmement régulière de l'horloge que voici :

1832, depuis le 31 juill. jusqu'au 4 sept.	: 24 ^h temps sid. = 24 ^h — 3 ^m 51;93	Lepaute
» » » 4 sept. » 14 oct.	— 3 51,43	»
» » » 14 oct. » 18 »	— 3 51,05	» ;

avec des inégalités journalières qui étaient rarement de 0,2. J'avais choisi les deux étoiles α et δ Ursae min. combinées aux étoiles fondamentales simultanées, pour la détermination de l'azimut de la mire, en le calculant pour chaque passage à part, à l'aide des ascensions droites données dans les éphémérides de Berlin. Si dans les positions employées il y avait quelques défauts, l'effet en devait disparaître par la combinaison des passages opposés; et l'effet de la différence dans l'épaisseur des tourillons ou d'une flexion de l'axe s'ané-

*) L'épaisseur connue du fil du milieu de l'instrument des passages servait d'unité dans cette détermination.

antissait par la combinaison des azimuts, obtenus dans les deux positions de l'axe. Cependant pour l'uniformité des calculs des différents azimuts, j'ai refait mes calculs relatifs à l'azimut de NEMESCU, en employant encore les positions apparentes tirées des *Positiones mediae*, avec les coefficients exacts de la nutation et de l'aberration, eu égard à l'aberration diurne, et en corrigeant les inclinaisons observées de l'axe pour la différence des tourillons, soigneusement déterminée par M. de Tenner à l'aide de renversements réitérés; *Zanucku* vol. IX, p. 3.

A cette nouvelle rédaction des observation de α et δ Ursae min. j'ajoute maintenant le calcul de la belle série d'azimuts que présentent les observations de la troisième étoile circumpolaire, β Ursae min., série jadis omise exprès. J'ai pu entreprendre ce calcul à l'époque actuelle, en me servant des ascensions droites puisées dans les *Positiones mediae*:

Azimut de la mire méridienne de NEMESCU, par l'étoile polaire α Ursae min. en 1832.

Pour les corrections des ascensions droites des *Tabulae Reg.* nous avons:

$$\Delta\alpha = \begin{array}{cccc} 0 \text{ août} & 0 \text{ sept.} & 0 \text{ oct.} & 0 \text{ nov.} \\ + 0^{\circ}98 & + 1^{\circ}12 & + 1^{\circ}34 & + 1^{\circ}21. \end{array}$$

Passage supérieur, tourillon I		Passage inférieur, tourillon I	
à l'Ouest,	à l'Est,	à l'Ouest,	à l'Est,
azimut.	azimut.	azimut.	azimut.
31 juill. + 5 ^h 50	8 sept. + 3 ^h 41	31 juill. + 4 ^h 30	17 août + 6 ^h 88
1 août + 0,81	9 » + 1,21	1 août + 1,98	22 » + 3,49
4 » + 8,06	14 oct. — 0,94	6 » + 4,27	26 » + 5,09
9 » + 8,35	15 » — 2,77	9 » + 1,57	30 » + 5,55
11 » + 8,41	16 » + 5,91	12 » + 6,64	7 sept. — 0,29
12 » + 7,98	17 » — 0,63	13 sept. + 1,61	8 » + 7,76
13 sept. + 3,59		6 oct. + 4,73	9 » + 10,26
27 » + 5,36			10 oct. + 4,86
4 oct. + 0,64			15 » + 0,99
6 » + 4,86			16 » + 9,60
Moyenne + 5,36	+ 1,03	+ 3,66	+ 5,42
poids 10	6	7	10.
Moyenne 14 sept. + 3 ^h 20 — 0,75	$d\alpha \mp 0^{\circ}52$	15 sept. + 4 ^h 54 + 0,69	$d\alpha \mp 0^{\circ}49$
poids 15,0		16,5.	
Résultat	+ 3 ^h 90 $\mp 0^{\circ}36$		
poids 31,4.			

La comparaison des 33 azimuts isolés avec leurs moyennes respectives, donne l'erreur probable d'un azimut isolé = $\mp 2,00$ et celle du résultat = $\mp 2,00:\sqrt{31,4} = \mp 0,36$.

Azimut de la mire méridienne de NEMESCH, par l'étoile δ Ursae min. en 1832.

J'avais employé, dans mon calcul antérieur, 9 passages supérieurs et 5 passages inférieurs de cette étoile, pour lesquels le journal indiquait la relation exacte entre l'axe optique et la mire. Un des passages supérieurs cependant doit être rejeté, celui du 7 oct., parce que l'axe optique n'avait point été vérifié. Quant aux passages inférieurs, ceux du 7 et du 16 septembre étaient tout à fait incertains. L'étoile avait été à peine visible dans cet instrument d'une force optique trop faible, pour la montrer une heure après le lever du soleil. Aussi, les deux fois, il n'y a eu qu'un seul fil observé et qui était taxé de grande incertitude par le signe :: ajouté. Des trois passages inférieurs du 15, 16 et 17 oct., il est indispensable de rejeter encore celui du 16 oct., parce que la mire était trop ondulante et indistincte. Les deux autres sont irréprochables. Une combinaison régulière des positions et passages opposés est par conséquent impossible. D'après les observations de Dorpat, nous avons pour 1832,7 la correction de l'ascension droite moyenne de l'étoile δ Ursae min., prise dans les *Tab. Reg.*, $d\alpha = -0,50$, et pour

0 août 0 sept. 0 oct. 0 nov.

correct. de l'asc. app. $\Delta\alpha = -0,14 \quad -0,20 \quad -0,33 \quad -0,45$;

puis $\mp 0,20$ pour l'aberration diurne. Ayant ajouté ces corrections aux ascensions droites des éphémérides de Berlin, je suis parvenu aux azimuts isolés suivants, en désignant les passages inférieurs par la fraction 0,5 dans la date :

Tourillon I

	à l'ouest.		à l'est.
21 sept.	+ 7,28	8 sept.	+ 9,46
22 " "	+ 7,55	14 oct.	+ 4,94
4 oct.	+ 9,88	15,5 " "	- 2,15
6 " "	+ 6,49	16 " "	+ 5,83
		16,5 " "	+ 4,61
		17 " "	+ 7,02
		17,5 " "	- 4,93
Moyenne	+ 7,80		+ 3,54
poids	4		7.
Résultat	+ 5,67 \mp 0,93		
poids	10,2.		

L'erreur probable d'un azimut isolé se trouve = $\mp 2''97$, par les 41 valeurs comparées aux deux moyennes respectives, et nous avons pour le résultat l'erreur pr. $\mp 2''97 : \sqrt{10,2} = \mp 0''93$.

Azimut de la mire de NEMESCH, par l'étoile β Ursae min. en 1832.

Passage supérieur, tourillon I		Passage inférieur, tourillon I	
à l'ouest,	à l'est,	à l'ouest,	à l'est,
azimut.	azimut.	azimut.	azimut.
1 août + 1',12	13 août + 12',56	31 juill. + 6',58	13 août + 4',33
9 » + 4,05	17 » + 10,16	1 août + 7,43	22 » + 1,04
12 » + 2,96	23 » + 15,82	11 » + 9,20	23 » — 6,84
14 sept. + 1,25	26 » + 14,36	12 » + 8,67	26 » — 3,15
	7 sept. + 12,03	13 sept. + 12,46	31 » + 1,97
	9 » + 14,38	19 » + 4,36	8 sept. — 4,77
	16 » + 5,19	27 » + 4,94	9 » — 3,99
		4 oct. + 2,68	14 oct. — 0,46
			15 » — 4,10
			16 » + 3,53
			17 » — 1,91
Moyenne + 2,35	+ 12,07	+ 7,04	— 1,30
poids 4	7	8	11.
Moyenne + 7',21			+ 2',87
poids 10,2			18,5.
Résultat	+ 5',04 \mp 0',44		
poids	26,3.		

Erreur pr. d'un azimut isolé = $\mp 2''23$, celle du résultat $\mp 2''23 : \sqrt{26,3} = \mp 0''44$.

En réunissant les trois résultats partiels nous avons :

	l'azimut de la mire	poids relatif.
par les obs. de la polaire	+ 3',90 \mp 0',36	6,67
» » » » δ Ursae min.	+ 5,67 \mp 0,93	1,00
» » » » β Ursae min.	+ 5,04 \mp 0,44	4,47
Moyenne	+ 4',47 \mp 0',27 à l'est du point sud.	

Ces trois chiffres présentent un accord très-satisfaisant, car si nous cherchons l'erreur probable de la moyenne, en la dérivant des trois écarts de la moyenne et des trois poids relatifs, nous la trouvons

$\mp 0''30$, ou à $0''03$ près celle qui suit de la combinaison directe des trois chiffres d'après leurs erreurs spéciales. Il se manifeste cependant dans les différents tableaux ce fait frappant que, dans la valeur de l'erreur de l'axe optique, il y a une différence d'un sens constant entre les observations faites le jour et la nuit. Heureusement l'effet de cette différence a dû disparaître par la combinaison des azimuts obtenus dans les deux positions renversées de l'axe.

La mire étant à l'est de la prolongation méridionale du côté NEMESCH-MESCHKANZI de $1''54 \mp k$, nous avons :

$$\text{L'azimut de cette prolongation} = 2''93 \mp 0''27 \mp k \text{ à l'est du point sud.}$$

En estimant $k = \mp 0''5$, le résultat devient :

AZIMUT DU SIGNAL DE MESCHKANZI,

pris du centre de la station NEMESCH :

$$\mathbf{A'' = 359^\circ 59' 52''07 \mp 0''57.}$$

7. AZIMUT OBSERVÉ AU POINT ASTRONOMIQUE JACOBSTADT, PAR STRUVE, 1826, MAI 25 A 29;

$$\varphi = 56^\circ 30' 4''8.$$

Les observations sur l'azimut de DABORS-KALNS ont été faites au centre exact de la station astronomique de JACOBSTADT; voyez en les détails *Gradmessung* II. p. 178 et suiv., et les calculs I. p. 314 à 317. Pour la date moyenne du 27 mai, j'ai trouvé les corrections des *Tabulae Reg.* $\Delta\alpha = + 0''63$, $\Delta\delta = - 0''03$. Avec ces corrections les 6 mises donnent :

		Azimut.			
1826. Mai 25.	$10^h 26^m$ temps sid.	$312^\circ 22' 3''30$	$- 0,57 d\alpha$	$+ 1,05 d\delta$	$- 0,05 d\varphi$
	26. 10 46	4,45	$- 0,61 d\alpha$	$+ 0,91 d\delta$	$- 0,04 d\varphi$
	26. 11 37	4,40	$- 0,67 d\alpha$	$+ 0,59 d\delta$	$- 0,03 d\varphi$
	27. 10 53	4,02	$- 0,62 d\alpha$	$+ 0,87 d\delta$	$- 0,04 d\varphi$
	27. 11 33	2,34	$- 0,67 d\delta$	$+ 0,59 d\delta$	$- 0,02 d\varphi$
	28. 11 23	3,15	$- 0,66 d\alpha$	$+ 0,68 d\delta$	$- 0,03 d\varphi$
Moyenne $\alpha =$		$312^\circ 22' 3''61$	$- 0,63 d\alpha$	$+ 0,78 d\delta$	$- 0,03 d\varphi$.

$$\text{avec : } \delta\alpha = \mp \frac{0''97}{\sqrt{6}} \mp 0''31 \mp 0''16 \mp 0''02 = \mp 0''53.$$

L'objet terrestre était la poutre verticale du signal de DABORS-KALNS, mais qui avait une petite excentricité, pour laquelle l'azimut doit être corrigé de $- 1''26$. Donc :

L'AZIMUT DU SIGNAL DE DABORS-KALNS,

pris du centre du point astronomique JACONSTADT :

$$A''' = 312^{\circ} 22' 2''35 \mp 0''53.$$

8. AZIMUT OBSERVÉ A DORPAT, PAR STRUVE; $\varphi = 58^{\circ} 22' 47''6$.

1824. Juin 5 à 15 6 mises

1827. Juill. 29 à août 7 6 »

1831. Août 25 à sept. 18 12 »

J'ai observé l'azimut du signal de KERSEL, à l'aide de l'instrument universel, à trois reprises, en 1824, 1827 et 1831, les deux premières fois directement, en 1831 par l'emploi d'une mire blanche sur un fond noir et par l'angle $= \omega$ compris entre cette mire et le signal de KERSEL. Voir les observations et les calculs *Gradmessung* II. p. 66 à 71, p. 312 et suiv., p. 418 à 424; et I. p. 324 à 331. Ces observations ont été faites à une certaine distance du centre de la station, c. à d. du centre de la tour mobile de l'Observatoire. Les mesures qui donnaient les réductions, ayant été faites le plus exactement, j'ai pu réduire tous les azimuts au centre indiqué. Je donnerai le tableau complet des 24 azimuts, déjà réduits au centre.

Pour les trois dates moyennes nous avons les corrections suivantes des *Tabulae Reg.* :

1824.	10 juin	$\Delta\alpha = + 0,36$	$\Delta\delta = - 0''35$
1827.	0 août	$\Delta\alpha = + 1,24$	$\Delta\delta = - 0,10$
1831.	1 sept.	$\Delta\alpha = + 1,30$	$\Delta\delta = - 0,27$.

		Azimut.				
1824.	Jun 5. 11 ^h 39 ^m temps sid.	337° 36' 36,85	— 0,73 dα	+ 0,66 dδ	— 0,03 dφ	
	» 7. 12 2	35,80	— 0,76 dα	+ 0,45 dδ	— 0,02 dφ	
	» 13. 12 22	37,33	— 0,77 dα	+ 0,27 dδ	— 0,01 dφ	
	» 14. 11 21	36,16	— 0,71 dα	+ 0,72 dδ	— 0,03 dφ	
	» » 12 21	39,68	— 0,76 dα	+ 0,27 dδ	— 0,01 dφ	
	» 16. 12 51	36,70	— 0,78 dα	+ 0,09 dδ	— 0,00 dφ	
1827.	Juill. 30. 14 56	37,22	— 0,68 dα	— 0,84 dδ	+ 0,04 dφ	
	» 31. 14 13	39,94	— 0,73 dα	— 0,54 dδ	+ 0,02 dφ	
	» » 14 40	39,40	— 0,69 dα	— 0,75 dδ	+ 0,03 dφ	
	» » 15 7	40,85	— 0,66 dα	— 0,92 dδ	+ 0,04 dφ	
	Août 1. 14 47	38,80	— 0,68 dα	— 0,79 dδ	+ 0,04 dφ	
	» 3. 14 58	39,01	— 0,68 dα	— 0,84 dδ	+ 0,04 dφ	
1831.	Août 25. 17 17	41,20	— 0,36 dα	— 1,65 dδ	+ 0,07 dφ	+ dα
	» 29. 16 47	37,95	— 0,44 dα	— 1,52 dδ	+ 0,07 dφ	+ dα
	» » 17 20	39,53	— 0,36 dα	— 1,65 dδ	+ 0,07 dφ	+ dα
	» » 5 8	41,27	+ 0,36 dα	+ 1,75 dδ	— 0,08 dφ	+ dα
	» » 5 47	40,58	+ 0,21 dα	+ 1,85 dδ	— 0,08 dφ	+ dα
	» 30. 16 30	41,08	— 0,48 dα	— 1,42 dδ	+ 0,06 dφ	+ dα
	Sept. 1. 5 19	41,14	+ 0,32 dα	+ 1,79 dδ	— 0,08 dφ	+ dα
	» » 5 53	44,26	+ 0,19 dα	+ 1,86 dδ	— 0,08 dφ	+ dα
	» 3. 6 26	41,34	+ 0,09 dα	+ 1,89 dδ	— 0,08 dφ	+ dα
	» » 7 13	38,43	— 0,08 dα	+ 1,88 dδ	— 0,08 dφ	+ dα
	» 5. 17 2	40,93	— 0,41 dα	— 1,58 dδ	+ 0,07 dφ	+ dα
	» 7. 17 14	39,49	— 0,36 dα	— 1,61 dδ	+ 0,07 dφ	+ dα
Moyenne a =		337° 36' 39,37	— 0,41 dα	— 0,24 dδ	+ 0,01 dφ	+ 0,5 dα

L'erreur probable de la moyenne arithmétique 337° 36' 39,37 se trouve $\mp 0,25$ par l'accord des valeurs isolées; elle aurait été $\frac{1,03}{\sqrt{24}} = \mp 0,21$ par la table p. 218. Les azimuts de 1824 sont les moins exacts de la série, étant les premières observations de cette espèce que j'ai faites. Je les ai pourtant retenus, en n'admettant aucun choix arbitraire. Aux différentielles de 1831 j'ai ajouté le $d\alpha$, correspondant à l'erreur produite par la mesure de l'angle terrestre. En remplaçant donc $d\alpha$ par $b\alpha = \mp 0,50$ etc., et en mettant $b\omega = \mp 0,252$, *Gradmessung* I. p. 328, nous avons :

$$b\alpha = \mp 0,25 \mp 0,21 \mp 0,05 \mp 0,01 \mp 0,13 = \mp 0,35.$$

Une seconde détermination de cet azimut a été faite en 1824, parfaitement indépendante de l'autre, à l'aide de l'angle mesuré entre la mire méridienne septentrionale du cercle méridien et le signal de KENSEL situé à l'ouest de cette mire. Cet angle, les réductions requises ayant été appliquées, fut trouvé =

$$22^{\circ} 23' 30,33 \mp 0,28;$$

l'azimut de la mire était	$10,07 \mp 0,16$	à l'est du nord;
donc KENSEL	$22^{\circ} 23' 20,26 \mp 0,32$	à l'ouest du nord;

ou $a = 337^{\circ} 36' 39,74 \mp 0,32$. *Gradmessung* I. p. 331.

En prenant à présent la moyenne des deux valeurs :

par l'obs. de la polaire	$a = 337^{\circ} 36' 39,37$	$\mp 0,35$
par la mire méridienne	$39,74$	$\mp 0,32$.

nous parvenons finalement au résultat :

AZIMUT DU SIGNAL DE KENSEL,
pris du centre de la tour de l'Observatoire de DORPAT :

$$\mathbf{A}^{VIII} = 337^{\circ} 36' 39,55 \mp 0,21.$$

9. AZIMUT OBSERVÉ A MÄKI-PÄÄLYS, PAR STRUVE; 1826, AOÛT 15 ET 16 :

$$\varphi = 60^{\circ} 4' 29,4.$$

La station la plus septentrionale de notre arc méridional était située sur une des cimes de l'île de Hogland, masse imposante de porphyre qui s'élève, des eaux du Golfe de Finlande, jusqu'à une hauteur de 90 toises. L'objet dont l'azimut devait être déterminé, le clocher de HALLJALL, situé sur le continent de l'Ehstonie, se trouvait à une distance de près de 42000 toises = 74 verstes. En outre, il me restait à mesurer l'angle entre ce clocher et le signal de HOHENKREUTZ, également placé sur le continent. L'exécution de ces opérations rencontra une difficulté très-grave dans la circonstance que, pendant 7 semaines de mon séjour à Hogland, la visibilité des objets terrestres distants avait presque entièrement cessé, malgré un ciel continuellement serein, à cause d'une fumée épaisse qui enveloppait l'île. Cette fumée provenait des incendies de forêts en Finlande, favorisés par l'extrême sécheresse de cet été. La fumée était portée vers l'île, sur tout le Golfe et à des distances immenses dans l'intérieur des provinces continentales, par un vent

nord constant. Non seulement la flèche de HALLJALL et le signal de HÖHENKRÜTZ se dérobaient à la vue, mais même l'éclat des héliotropes puissants, établis à ces stations, ne pouvait pénétrer par ce voile épais. Enfin, après une attente pénible de plusieurs semaines, un vent de l'ouest s'étant levé, nous eûmes le bonheur de voir pour quelques heures de l'après-midi, le 29 et le 30 août, les deux héliotropes. Le 29 août les 6 mises de l'angle entre une mire dont j'avais déterminé l'azimut le 15 et le 16 août, furent mesurées, et l'autre jour j'obtins les 6 mises requises entre les deux héliotropes, ou le troisième angle du triangle le plus septentrional de notre arc méridional.

La mire destinée à l'observation de l'azimut était placée sur le mur de la maisonnette voisine du phare qui se trouve sur la cime septentrionale de l'île. Cette maisonnette étant éloignée de 1230 toises de la station *E* sur MÄKI-PÄÄLYS, la mire était toujours visible et d'une tranquillité distinguée, par suite de l'élevation considérable du rayon visuel au-dessus des vallées intermédiaires. Le journal des observations azimutales se trouve *Gradm.* II. p. 228 à 236. Les calculs sont donnés *Gradm.* I. p. 317 à 324.

Avec $\Delta\alpha = + 4,16$ et $\Delta\delta = - 0,03$ pour les *Tabulae Reg.*, nous avons les azimuts suivants de la mire, réduits au centre de la station *E* :

		Azimut.			
1826. Août 15.	16 ^h 24 ^m temps sid.	335° 56' 28,06	+ x — 0,53 dα	— 1,46 dδ	+ 0,07 dφ
» »	16 57	26,36	+ x — 0,44 dα	— 1,64 dδ	+ 0,08 dφ
» »	3 2	32,23	+ x + 0,75 dα	+ 1,09 dδ	— 0,05 dφ
» »	3 36	30,42	+ x + 0,66 dα	+ 1,33 dδ	— 0,07 dφ
» 16.	15 31	28,19	+ x — 0,64 dα	— 1,12 dδ	+ 0,06 dφ
» »	16 19	25,49	+ x — 0,55 dα	— 1,43 dδ	+ 0,07 dφ
	Moyenne	335° 56' 28,46	+ x — 0,12 dα	— 0,54 dδ	+ 0,03 dφ.

L'angle entre la mire et

HALLJALL est: $126\ 47\ 11,19 + x \mp 0,39$, voyez *Gradm.* I. p. 323.

Azimut de HALLJALL: $209\ 9\ 17,27 - 0,12 d\alpha - 0,54 d\delta + 0,03 d\phi \mp 0,39$.

Pour l'erreur probable de cet azimut nous avons, avec la table p. 218 :

$$b\alpha = \mp \frac{4,08}{\sqrt{6}} \mp 0,06 \mp 0,11 \mp 0,01 \mp 0,39 = \mp 0,60.$$

Donc finalement :

L'AZIMUT DE LA FLÈCHE DE HALLJALL,

pris du point E sur MÄKI-PÄÄLYS :

$$A^{IX} = 209^{\circ}\ 9'\ 17,27 \mp 0,60.$$

§ 52. Azimuts et distances des stations voisines des points astronomiques.

Nous déduisons, de l'azimut primitivement observé sur chaque point astronomique, les azimuts des autres stations voisines, en ajoutant les différents angles compris entre les côtés de triangles qui ont le point astronomique pour sommet commun. Ces nouveaux azimuts ont des erreurs probables plus fortes que l'azimut primitif; car si A est l'azimut primitif, nous avons pour un autre azimut $A^x = A + w + w' + \dots$, l'erreur probable

$$bA^x = \sqrt{\{(bA)^2 + (bw)^2 + (bw')^2 + \dots\}}.$$

Les angles $w, w' \dots$ sont les angles définitifs des triangles respectifs du tableau III, § 48, p. 191 à 213. Les erreurs probables bw, bw' etc. peuvent être regardées comme identiques avec les erreurs probables respectives ϵ' , p. 155, des angles compensés à $180^\circ +$ l'excès, dans chaque triangle à part. En dernière rigueur bw est même plus petit que ϵ' , et nos bA^x seront tant soit peu trop forts, mais d'une quantité qui s'élevera rarement au-dessus de $0,01$. Dans le tableau ci-joint j'ai placé avec les azimuts, aussi les logarithmes des distances en toises, ou des côtés compris entre le point astronomique et les différentes stations voisines.

I. STARO-NEKRASSOWKA.

	Log. de la distance.	Azimut.	Renvoi.
1. ISMAÏL	3,5277623.3	$270^\circ 56' 5,51 \mp 0,44 = A'$	P. 224.
2. SSAPIANOWKA	3,6905541.3	$334 \quad 2 \quad 13,52 \mp 0,71$	Tr. No. 1. p. 191.

II. WODOLUI.

1. PLOSKA	4,3506208.5	$90^\circ 41' 34,42 \mp 0,93$	Tr. No. 21. p. 194.
2. DSCHAMANA	4,1565250.0	$157 \quad 41 \quad 27,08 \mp 0,74 = A''$	P. 225.
3. RESENI	4,2831442.2	$204 \quad 23 \quad 38,65 \mp 0,93$	Tr. No. 22. p. 194.
4. SSURUTSCHENI	4,2124602.0	$278 \quad 50 \quad 33,70 \mp 1,09$	Tr. No. 23. p. 194.
5. PERESSETCHINO	4,2444537.2	$321 \quad 44 \quad 30,58 \mp 1,23$	Tr. No. 24. p. 194.

III. SSUPRUNKOWZI.

1. KARATSCHIKOWZI	4,0997496.5	$311^\circ 35' 47,60 \mp 0,48 = A'''$	P. 226.
2. HANOWKA	4,0187611.8	$12 \quad 45 \quad 30,49 \mp 0,84$	Tr. No. 45. p. 197.
3. SAGORJANE	4,0848193.3	$92 \quad 36 \quad 35,63 \mp 1,09$	Tr. No. 44. p. 197.
4. WOLTSCHENETZ	4,2235926.3	$164 \quad 10 \quad 41,60 \mp 1,42$	Tr. No. 43. p. 197.

IV. KREMENTZ.

	Log. de la distance.	Azimut.	Renvol.
1. SMORDWA	4,2957005.6	340° 27' 57",67 ± 0",78	Tr. No. 61. p. 200.
2. GURNIKI	4,2396638.2	18 7 17,40 ± 0,35 = A''	P. 227.
3. MOSTY	4,0993376.8	62 29 12,00 ± 0,78	Tr. No. 60. p. 200.
4. MATWEJEWZI	4,0977447.2	124 34 20,95 ± 1,04	Tr. No. 59. p. 199.

V. BELIN.

1. BESDESCH	4,2100345.7	8° 24' 30",86 ± 2",29	Tr. No. 78. p. 202.
2. LESKOWITSCHI	4,1495690.2	61 44 4,79 ± 2,20 = A'	P. 232.
3. SCHLÄPAN	4,1229242.0	136 54 53,20 ± 2,29	Tr. No. 77. p. 202.
4. BOLSCHAJA-GLUSCHA	4,1760273.0	206 20 25,23 ± 2,38	Tr. No. 76. p. 202.

VI. NEMESCH.

1. NABOROWTSCHSNA	4,2399872.2	280° 23' 41",08 ± 0",85	Tr. No. 106. p. 206.
2. MESCHKANZI	4,2048433.5	359 59 57,07 ± 0,57 = A''	P. 237.
3. СНОРУНСЧИШКИ	4,2010238.4	40 21 12,94 ± 0,85	Tr. No. 105. p. 206.
4. KONRADI	4,1782631.9	78 25 10,15 ± 1,06	Tr. No. 104. p. 206.

VII. JACOBSTADT.

1. DADORS-KALNS	3,8466493.6	312° 22' 2",35 ± 0",53 = A'''	P. 238.
2. KREUTZBURG	2,7554339.9	6 15 26,82 ± 0,66	Tr. No. 126. p. 209.

VIII. DORPAT.

1. ANROHOF	4,0724390.0	241° 38' 12",60 ± 0",40	Tr. No. 145. p. 212.
2. KENSEL	4,2389990.6	337 36 39,55 ± 0,24 = A''''	P. 240.

IX. MÄKI-PÄÄLÛS.

1. HOHENKREUTZ	4,5838766.4	192° 49' 0",31 ± 0",73	Tr. No. 155. p. 213.
2. HALLJALL	4,6225699.2	209 9 17,27 ± 0,60 = A''	P. 241.

CHAPITRE XV.

TRIANGLES POLAIRES ET COORDONNÉES POLAIRES DANS LES DIFFÉRENTS ARCS PARTIELS.

§ 53. Formules pour le calcul des coordonnées polaires.

En prenant pour point initial un des deux points astronomiques situés aux extrémités d'un arc partiel, nous pouvons chercher la longueur de la ligne géodésique qui joint une station trigonométrique intermédiaire quelconque à ce point initial, et l'azimut de cette ligne, les deux azimuts des stations voisines du point initial étant donnés, § 52. La ligne géodésique cherchée et son azimut forment les deux coordonnées polaires qui déterminent la position de la station, relativement au point initial. Les chapitres XIII et XIV contiennent les matériaux complets desquels se déduisent ces coordonnées polaires, pour toutes les stations des 8 arcs partiels de notre arc méridional. Une méthode très-facile de calculer ces coordonnées a été donnée par Bessel dans les *Astronom. Nachr.* vol. I., p. 34 et suiv., méthode qui, par l'emploi des tables à l'aide desquelles se trouvent les logarithmes des sommes et des différences de deux chiffres donnés par leurs logarithmes, se simplifie encore de beaucoup, depuis que M. Zech de Tubingue a élargi ces tables à l'emploi commode dans les calculs qui se font à 7 places décimales^{*)}. En effet, en

^{*)} *Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen für sieben Stellen, berechnet von J. Zech. Leipzig, 1849. 8°.* L'emploi de ces tables, dans l'étendue actuelle, produit une réforme essentielle dans les calculs trigonométriques. Elles dispensent de la transformation des formules primitives en d'autres formules adaptées au calcul logarithmique, chaque formule composée de plusieurs termes, réunis par addition ou par soustraction, étant maintenant une formule logarithmique. En outre, l'emploi de ces tables produit un profit en exactitude, par suite de la diminution des entrées dans les tables.

faisant usage du théorème de Legendre, dans sa forme exacte donnée par Gauss, voyez p. 77 et suiv., tout le calcul se réduit à une suite de résolutions de triangles plans, dans lesquels deux côtés et l'angle compris sont connus; et ce calcul donne des résultats d'une exactitude conforme au nombre des places décimales employées. La règle de retenir partout, dans le courant du calcul, la huitième décimale que donne l'interpolation des tables à sept décimales, a été strictement observée dans nos résolutions des triangles polaires, voyez p. 94.

Examinons la marche de ce calcul dans ses différentes parties. Nous supposons que, pl. XXVI, fig. 1, le point Z se trouve en jonction avec le point initial E , par une suite de 7 triangles de continuation, EIK , IKL , KLM , LMN , MNP , NPQ et PQZ , dans lesquels tous les angles et les côtés sont donnés. p. 191 et suiv., la ligne EF indiquant la direction septentrionale de la méridienne en E .

1. Les deux azimuts FEI et FEK sont connus, p. 242 et 243.
2. Pour parvenir à la distance EL , et l'azimut FEL , il faut résoudre le triangle polaire EKL , dans lequel sont donnés les deux côtés EK et KL , avec l'angle compris EKL , ce dernier étant la somme des deux angles EKI et IKL , qui appartiennent aux deux premiers triangles de continuation.
3. Vient la résolution du triangle polaire ELM , dans lequel EL et LM et l'angle compris ELM sont donnés, ce dernier en additionnant l'angle KLM du troisième triangle de continuation et l'angle KLE , obtenu par la résolution du triangle polaire précédent. L'angle trouvé LEM ajouté à l'azimut précédent FEL donne l'azimut cherché FEM de la ligne EM .
4. 5. etc. Le calcul continue de la manière indiquée, par une marche en zig-zag, pour déterminer successivement les coordonnées des stations N , P , Q , Z .

Il se présente ici un moyen simple de contrôler les résultats obtenus. Les coordonnées cherchées de L , qu'a données plus haut la résolution du triangle EKL , peuvent être trouvées aussi à l'aide du triangle EIL . Les résultats des deux calculs seront identiques. De même, les coordonnées de M seront obtenues une fois par le triangle ELM , une seconde fois par la résolution du triangle EKM ; et ainsi de suite. On voit que le polygone, formé par les 7 triangles de continuation entre E et Z , présente deux rangées de côtés, situées sur les deux flancs, savoir 5 côtés sur le flanc occidental et 4 sur le flanc oriental du polygone, et 6 côtés transversaux qui réunissent les flancs opposés. Donc, au lieu d'avancer d'une station à la suivante, comme nous l'avons fait plus haut, par une marche en zig-zag, qui effectivement offre le calcul le plus direct, donnant pour chaque station un seul résultat, nous pouvons déterminer les coordonnées de chaque point par deux jonctions distinctes dont une occidentale, l'autre orientale:

et ces deux jonctions doivent chaque fois conduire à des chiffres identiques, sauf l'inexactitude minime que produit l'usage des tables logarithmiques.

Pour mieux faire comprendre l'arrangement des calculs et les différentes notations que présenteront les paragraphes suivants, § 54 à § 61, je crois devoir résumer ce qui a été dit, par l'exposition que voici. Un point quelconque Q étant directement rattaché aux deux stations précédentes N et P , par le triangle de continuation NPQ , nous supposons :

$$\begin{array}{l} N \text{ déterminé par la distance } EN = 'r \text{ et par l'azimut } FEN = 'R \\ P \quad \text{ » } \quad \text{ » } \quad \text{ » } \quad EP = 'r \quad \text{ » } \quad \text{ » } \quad FEP = 'R. \end{array}$$

Nous aurons à chercher les coordonnées pour le nouveau point Q , savoir :

$$EQ = r \text{ et } FEQ = R.$$

En partant en premier lieu des quantités occidentales connues, $EN = 'r$, $NQ = a$ et $ENQ = W$, mettons, dans le triangle ENQ , $NEQ = z$, $NQE = y$, l'excès sphérique = c , calculé d'après § 27, et nous aurons les équations que voici :

$$\begin{aligned} \lg m &= \lg a + \lg \sin (W - \frac{1}{3}c); & \lg n &= \lg a + \lg \cos (W - \frac{1}{3}c); \\ \lg \text{tang } \xi &= \lg m - \lg ('r - n); \\ \lg r &= \lg ('r - n) - \lg \cos \xi. \\ z &= \xi + \frac{1}{3}c & y &= 180^\circ + c - (W + z). \\ R &= 'R + z. \end{aligned}$$

Un second calcul se fait du côté oriental, en partant de $EP = 'r$, $PQ = b$ et $EPQ = \mathfrak{B}$, l'excès sphérique étant ici = f . Nous avons, en mettant $QEP = \delta$, $EQP = \mathfrak{y}$:

$$\begin{aligned} \lg m &= \lg b + \lg \sin (\mathfrak{B} - \frac{1}{3}f); & \lg n &= \lg b + \lg \cos (\mathfrak{B} - \frac{1}{3}f); \\ \lg \text{tang } \eta &= \lg m - \lg ('r - n); \\ \lg r &= \lg ('r - n) - \lg \cos \eta. \\ \delta &= \eta + \frac{1}{3}f & \mathfrak{y} &= 180^\circ + f - (\mathfrak{B} + \delta). \\ R &= 'R + \delta. \end{aligned}$$

Enfin le résultat du calcul double sera :

$$\lg r^* = \frac{1}{2} (\lg r + \lg r). \quad \text{et} \quad R^* = \frac{1}{2} (R + \mathfrak{R}).$$

Les deux calculs distincts pour chaque station présentent un contrôle triple, 1) par les deux valeurs identiques $\lg r = \lg r$, 2) par les deux azimuts $R = \mathfrak{R}$, 3) par $y + \mathfrak{y} = PQN$, angle connu du

triangle de continuation *NPO*. Ces contrôles sont de telle portée, qu'ils comprennent la résolution des triangles de continuation du Chap. XIII., p. 191 à 213. Car toute erreur commise dans le calcul d'un triangle de continuation se manifesterait par une différence entre les résultats obtenus par les deux calculs des coordonnées, dans la détermination desquelles ce triangle entre pour la première fois.

Par la voie de calcul que nous avons choisie, on parvient aux logarithmes des distances et aux azimuts, sans avoir dû chercher un seul nombre naturel d'une ligne. C'est pourquoi dans nos différents tableaux des triangles § 34 à 36, p. 113 à 143, et § 48, p. 191 à 213, les nombres naturels n'ont pas même été donnés. Les tableaux suivants, § 54 à 61, ne présenteront également que les logarithmes des distances. Nous voyons par conséquent, que dans la longue suite de calculs qui, en partant des bases, conduisent finalement à la déduction des distances des parallèles, on ne rencontre nulle part des nombres naturels, à l'exception des nombres naturels des longueurs des bases elles-mêmes, au commencement des calculs, p. 76, et des nombres naturels des distances des parallèles, comme dernières quantités cherchées, à la fin des calculs, chap. XVII.

Les paragraphes suivants § 54 à § 61, présentent les différents triangles polaires des 8 arcs partiels successifs, en partant du Danube. Pour un arrangement symétrique, j'aurais dû placer le point initial de chaque arc à son extrémité méridionale. Cette règle n'a pas été observée, et le point initial se trouve tantôt du côté sud, tantôt du côté nord. Du reste, ce choix est entièrement indifférent pour les résultats.

Chaque paragraphe est destiné à un des arcs partiels. Il commence par l'indication du point initial *E* et des coordonnées des deux stations voisines, visibles de *E*. Suivent les triangles polaires des autres stations dans leur succession.

Pour chaque station il y a 9 lignes horizontales.

La ligne 1 donne le nom de la station, dont les coordonnées doivent être trouvées.

	du côté gauche	du côté droit.
» 2 contient :	l'angle <i>y</i> et le log. du côté opposé = $\lg r$	l'angle <i>y</i> et $\lg r$
» 3 »	» <i>z</i> » » » » $\lg a$	» <i>z</i> » $\lg b$
» 4 »	» <i>W</i> » » » » $\lg r$	» <i>W</i> » $\lg r$
» 5 »	la somme des trois angles = $180^\circ + e$	= $180^\circ + e$
» 6 »	l'azimut ' <i>R</i> du côté ' <i>r</i>	' <i>R</i> du côté ' <i>r</i>
» 7 »	' <i>R</i> $\mp z = R$, l'azimut du côté <i>r</i>	' <i>R</i> $\mp z = R$, l'azimut du côté <i>r</i>
» 8 donne :		$\lg r^* = \frac{1}{2} (\lg r + \lg r)$
» 9 »		$R^* = \frac{1}{2} (R + R)$.

Le dernier triangle polaire de chaque paragraphe nous présente le résultat principal des calculs relatifs à l'arc partiel de ce paragraphe, résultat qui comprend la valeur de la diagonale du polygone et l'azimut que fait cette ligne géodésique au point initial. En prenant notre figure 1, pl. XXVI, pour exemple, le calcul conduit à la détermination de la diagonale EZ , et de l'angle $IEZ = g$, que forme la diagonale avec le premier côté EI . Donc l'azimut de ce côté ou l'angle $FEI = G$ étant connu, § 52, nous avons l'azimut que fait la diagonale EZ en E , ou l'angle $FEZ = G + g = \mathfrak{A}$. Mais le calcul nous donne également l'angle $QZE = h$, que forme la diagonale avec le dernier côté ZQ . Donc, comme l'azimut de ce dernier côté ou l'angle $F'ZQ = H$ a été déterminé par l'observation en Z , nous avons encore l'azimut de la diagonale, au point Z , ou l'angle $F'ZE = H - h = \mathfrak{B}$. Nous voilà donc en possession des deux azimuts \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , que fait la ligne géodésique à ses deux termes; mais il faut se rappeler que ces deux azimuts ne sont pas entièrement indépendants l'un de l'autre, à cause de la combinaison des azimuts directement déterminés G, H avec les deux angles calculés g et h . Remarquons encore qu'il a été entièrement indifférent que nous ayons fait notre calcul en partant de E . Nous aurions pu choisir Z pour point initial; et nous aurions trouvé les mêmes valeurs des angles $QZE = h$ et $IEZ = g$.

Pour parvenir aux \mathfrak{B} , j'ai ajouté au dernier triangle de chaque paragraphe les trois lignes 10, 11, 12. Avec les dénominations de notre figure,

$$\begin{array}{l}
 \text{la ligne 10 contient} \\
 \text{» 11 »} \\
 \text{» 12 donne}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \text{du côté gauche} \\
 \text{l'azimut } H \text{ du côté } ZQ \\
 H \mp y = Q, \text{ l'azimut de } ZE \\
 Q^* = \frac{1}{2}(Q + \Omega)
 \end{array} \right.
 \left. \begin{array}{l}
 \text{du côté droit.} \\
 \text{l'azimut } \mathfrak{S} \text{ du côté } ZP \\
 \mathfrak{S} \mp y = \Omega, \text{ l'azimut de } ZE
 \end{array} \right.$$

Ce Q^* est l'azimut cherché de la diagonale ZE , au point Z .

§ 54. Triangles polaires et coordonnées polaires.

DEPUIS

WODOLUI JUSQU'A STARO-NEKRASSOWKA.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
I. 1. WODOLUI = E. Point initial.					
I. 2. DSCHAMANA. p. 242. $\lg r = 4,1565250.0$ $R = 157^{\circ} 41' 27,080.$					
I. 3. PLOSKA. p. 242. $\lg r = 4,3506208.5$ $R = 90^{\circ} 41' 34,420.$					
I. 4. NOWOKAUSCHANI. Tr. No. 20, p. 194.					
NOWOKAUSCHANI....	12° 2' 15",493	4,1565250.0	NOWOKAUSCHANI....	51° 18' 41",100	4,3506208.5
WODOLUI..... —	11 32 22,183	4,1384301.0	WODOLUI..... +	55 27 30,460	4,3739949.2
DSCHAMANA.....	156 25 23,080	4,4393479.4	PLOSKA.....	73 13 53,330	4,4393479.0
Somme	180 0 0,756		Somme	180 0 4,890	
R I. 2	157 41 27,080		R I. 3	90 41 34,420	
R =	146 9 4,897		R =	146 9 4,880	
$\lg r^* = 4,4393479.2$ $R^* = 146^{\circ} 9' 4,889.$					
I. 5. NESSELRODE. Tr. No. 19, p. 194.					
NESSELRODE.....	14° 37' 55",453	4,1565250.0	NESSELRODE.....	59° 36' 12",479	4,4393479.2
WODOLUI..... +	19 32 15,930	4,2783765.1	WODOLUI..... +	31 4 38,120	4,2163756.8
DSCHAMANA.....	145 49 50,090	4,5035377.6	NOWOKAUSCHANI....	89 19 13,760	4,5035377.5
Somme	180 0 1,473		Somme	180 0 4,359	
R I. 2	157 41 27,080		R I. 4	146 9 4,889	
R =	177 13 43,010		R =	177 13 43,009	
$\lg r^* = 4,5035377.6$ $R^* = 177^{\circ} 13' 43,010.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
I. 6. NIKOLAJEWKA. Tr. No. 18, p. 194.					
NIKOLAJEWKA.....	41° 1' 14",187	4,5035377.6	NIKOLAJEWKA.....	25° 30' 57",959	4,4393479.2
WODOLUI..... —	16 36 23,294	4,1424667.1	WODOLUI..... +	14 28 14,826	4,2028469.3
NESSELRODE.....	122 22 26,119	4,6130562.6	NOWOKAUSCHANI....	140 0 49,930	4,6130563.1
Somme	180 0 3,600		Somme	180 0 2,715	
R* I. 5	177 13 43,010		R* I. 4	146 9 4,889	
R =	160 37 19,716		R =	160 37 19,715	
lg r* = 4,6130562.8					
R* = 160° 37' 19",716.					
I. 7. KULMSKAJA. Tr. No. 17, p. 193.					
KULMSKAJA.....	14° 19' 0",879	4,5035377.6	KULMSKAJA.....	70° 41' 58",387	4,6130562.8
WODOLUI..... +	5 21 53,815	4,0811423.3	WODOLUI..... +	21 58 17,123	4,2112063.3
NESSELRODE.....	160 19 6,551	4,6377069.7	NIKOLAJEWKA.....	87 19 50,907	4,6377070.0
Somme	180 0 1,245		Somme	180 0 6,417	
R* I. 5	177 13 43,010		R* I. 6	160 37 19,716	
R =	182 35 36,825		R =	182 35 36,839	
lg r* = 4,6377069.8					
R* = 182° 35' 36",832.					
I. 8. BASCHKALIA. Tr. No. 16, p. 193.					
BASCHKALIA.....	41° 39' 36",248	4,5035377.6	BASCHKALIA.....	98° 36' 58",445	4,6377069.8
WODOLUI..... +	17 20 21,453	4,1551594.8	WODOLUI..... +	11 58 27,621	3,9595869.3
NESSELRODE.....	121 0 6,061	4,6139680.8	KULMSKAJA.....	69 24 37,501	4,6139681.3
Somme	180 0 3,762		Somme	180 0 3,567	
R* I. 5	177 13 43,010		R* I. 7	182 35 36,832	
R =	194 34 4,463		R =	194 34 4,453	
lg r* = 4,6139681.0					
R* = 194° 34' 4",458.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
I. 9. BAURTSCHL. Tr. No. 15, p. 193.					
BAURTSCHL.	3° 59' 1,110	4,6139681.0	BAURTSCHL.	41° 7' 44,665	4,6377069.8
WODOLUI +	1 12 54,545	4,0986253.7	WODOLUI +	13 11 22,169	4,1778928.3
BASCHKALIA	174 48 4,795	4,7293418.3	KULMSKAJA	125 40 58,281	4,7293418.9
Somme	180 0 0,450		Somme	180 0 5,115	
R* I. 8	194 34 4,458		R* I. 7	182 35 36,832	
R =	195 46 59,003		R =	195 46 59,001	
$\lg r^* = 4,7293418.6$ $R^* = 195^\circ 46' 59,002.$					
I. 10. MALOJAROSLAWETZKAJA. Tr. No. 14, p. 193.					
MALOJAROSLAWETZKAJA	85° 29' 45,842	4,7293418.6	MALOJAROSLAWETZKAJA	6° 8' 15,140	4,6377069.8
WODOLUI —	11 46 40,686	4,0405512.3	WODOLUI +	1 24 41,478	4,0001751.1
BAURTSCHL.	82 43 39,095	4,7271769.6	KULMSKAJA	172 27 3,931	4,7271769.8
Somme	180 0 5,623		Somme	180 0 0,549	
R* I. 9	195 46 59,002		R* I. 7	182 35 36,832	
R =	184 0 18,316		R =	184 0 18,310	
$\lg r^* = 4,7271769.7$ $R^* = 184^\circ 0' 18,313.$					
I. 11. TARAKLIA. Tr. No. 13, p. 193.					
TARAKLIA	21° 51' 8,270	4,7293418.6	TARAKLIA	30° 17' 3,549	4,7271769.7
WODOLUI —	4 38 54,976	4,0672525.9	WODOLUI +	7 7 45,717	4,1182843.2
BAURTSCHL.	153 29 59,445	4,8080860.4	MALOJAROSLAWETZKAJA	142 35 14,832	4,8080860.3
Somme	180 0 2,691		Somme	180 0 4,098	
E* I. 9	195 46 59,002		R* I. 10	184 0 18,313	
R =	191 8 4,026		R =	191 8 4,030	
$\lg r^* = 4,8080860.4$ $R^* = 191^\circ 8' 4,028.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
I. 12. KAMBOLI. Tr. No. 12, p. 193.					
KAMBOLI.....	22° 31' 39,039	4,7293418.6	KAMBOLI.....	90° 18' 11,436	4,8080860.4
WODOLI..... +	4 25 11,182	4,0328269.2	WODOLI..... +	9 4 6,158	4,0056571.1
BAURTSCH.....	153 3 12,305	4,8022580.4	TARAKLIA.....	80 37 48,592	4,8022580.5
Somme	180 0 2,526		Somme	180 0 6,186	
R* I. 9	195 46 59,002		R* I. 11	191 8 4,028	
R =	200 12 10,184		R =	200 12 10,186	
$\lg r^* = 4,8022580.4$					
$R^* = 200^\circ 12' 10'',185.$					
I. 13. BOLGRAD. Tr. No. 11, p. 193.					
BOLGRAD.....	39° 35' 22,171	4,8022580.4	BOLGRAD.....	18° 35' 3,593	4,8080860.4
WODOLI..... -	6 44 30,255	4,0675462.9	WODOLI..... +	2 19 35,902	3,9131634.4
KAMBOLI.....	133 40 12,734	4,8572680.3	TARAKLIA.....	159 5 22,314	4,8572680.6
Somme	180 0 5,160		Somme	180 0 1,809	
R* I. 12	200 12 10,185		R* I. 11	191 8 4,028	
R =	193 27 39,930		R =	193 27 39,930	
$\lg r^* = 4,8572680.4$					
$R^* = 193^\circ 27' 39'',930.$					
I. 14. PANDAKLIA. Tr. No. 10, p. 192.					
PANDAKLIA.....	91° 10' 45,287	4,8572680.4	PANDAKLIA.....	43° 45' 58,739	4,8080860.4
WODOLI..... -	8 23 2,596	4,0211062.1	WODOLI..... -	6 3 26,693	3,9914846.2
BOLGRAD.....	80 26 19,293	4,8512837.5	TARAKLIA.....	130 10 39,206	4,8512837.2
Somme	180 0 7,176		Somme	180 0 4,638	
R* I. 13	193 27 39,930		R* I. 11	191 8 4,028	
R =	185 4 37,334		R =	185 4 37,335	
$\lg r^* = 4,8512837.4$					
$R^* = 185^\circ 4' 37'',334.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
I. 15. KARAKURT. Tr. No. 9, p. 192.					
KARAKURT.....	27° 40' 17",658	4,8572680.4	KARAKURT.....	31° 13' 14",908	4,8512837.4
WODOLUI..... —	3 36 50,288	3,9899128.2	WODOLUI..... —	4 46 12,303	4,0565394.6
DOLGRAD.....	148 42 55,573	4,9057911.4	PANDAKLIA.....	144 0 37,367	4,9057911.4
Somme	180 0 3,519		Somme	180 0 4,578	
<i>R</i> * I. 13	193 27 39,930		<i>R</i> * I. 14	185 4 37,334	
<i>R</i> =	189 50 49,642		<i>R</i> =	189 50 49,637	
$\lg r^* = 4,9057911.4$ $R^* = 189^\circ 50' 49",640.$					

I. 16. KATLABUCH. Tr. No. 8, p. 192.					
KATLABUCH.....	86° 9' 58",604	4,9057911.4	KATLABUCH.....	8° 17' 45",073	4,8512837.4
WODOLUI..... —	5 54 14,807	3,9189839.2	WODOLUI..... —	1 8 2,506	3,9885036.4
KARAKURT.....	87 55 53,018	4,9064810.8	PANDAKLIA.....	170 34 13,513	4,9064811.0
Somme	180 0 6,429		Somme	180 0 1,092	
<i>R</i> * I. 15	189 50 49,640		<i>R</i> * I. 14	185 4 37,334	
<i>R</i> =	183 56 34,833		<i>R</i> =	183 56 34,828	
$\lg r^* = 4,9064810.9$ $R^* = 183^\circ 56' 34",830.$					

I. 17. KATLABUCH-SSUCHOI. Tr. No. 7, p. 192.					
KATLABUCH-SSUCHOI.	47° 29' 36",836	4,9057911.4	KATLABUCH-SSUCHOI.	1° 57' 36",130	4,9064810.9
WODOLUI..... —	5 44 15,506	4,0380465.2	WODOLUI..... —	0 9 59,304	3,8356019.4
KARAKURT.....	126 46 14,438	4,9418658.7	KATLABUCH.....	177 52 24,764	4,9418658.8
Somme	180 0 6,780		Somme	180 0 0,198	
<i>R</i> * I. 15	189 50 49,640		<i>R</i> * I. 16	183 56 34,830	
<i>R</i> =	184 6 34,134		<i>R</i> =	184 6 34,134	
$\lg r^* = 4,9418658.8$ $R^* = 184^\circ 6' 34",134.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
I. 18. TASCIBUNAR II. Tr. No. 6, p. 192.					
TASCIBUNAR II.	138° 0' 52,776	4,9418658.8	TASCIBUNAR II.	48° 10' 11,011	4,9064810.9
WODOLUI +	2 14 48,584	3,7097629.9	WODOLUI +	2 24 47,888	3,6585695.8
KATLABUCH-SSUCHOI. .	39 44 21,400	4,9221753.6	KATLABUCH.	129 25 3,834	4,9221753.6
Somme	180 0 2,760		Somme	180 0 2,733	
R* I. 17	184 6 34,134		R* I. 16	183 56 34,830	
R =	186 21 22,718		R =	186 21 22,718	
lg r* = 4,9221753.6					
R* = 186° 21' 22,718.					
I. 19. KAIRAKLIA. Tr. No. 5, p. 192.					
KAIRAKLIA.	19° 41' 46,661	4,9221753.6	KAIRAKLIA.	74° 24' 18,364	4,9418658.8
WODOLUI +	1 17 5,897	3,7451885.7	WODOLUI +	3 31 54,484	3,7477024.7
TASCIBUNAR II.	159 1 9,044	4,9484574.6	KATLABUCH-SSUCHOI .	102 3 51,760	4,9484574.4
Somme	180 0 1,602		Somme	180 0 4,608	
R* I. 18	186 21 22,718		R* I. 17	184 6 34,134	
R =	187 38 28,615		R =	187 38 28,618	
lg r* = 4,9484574.5					
R* = 187° 38' 28,616.					
I. 20. SSAFIANOWKA. Tr. No. 4, p. 192.					
SSAFIANOWKA.	49° 30' 46,349	4,9484574.5	SSAFIANOWKA.	13° 53' 57,533	4,9418658.8
WODOLUI —	2 44 31,624	3,7470732.1	WODOLUI +	0 47 22,858	3,7005278.5
KAIRAKLIA.	127 44 45,804	4,9653621.0	KATLABUCH-SSUCHOI .	165 18 40,680	4,9653620.7
Somme	180 0 3,777		Somme	180 0 1,071	
R* I. 19	187 38 28,616		R* I. 17	184 6 34,134	
R =	184 53 56,992		R =	184 53 56,992	
lg r* = 4,9653620.8					
R* = 184° 53' 56,992.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
I. 21. DORSKA. Tr. No. 3, p. 191.					
DORSKA	1° 16' 25,749	4,9484574.5	DORSKA	57° 21' 42,848	4,9653620.8
WODOLUI —	0 5 18,363	3,7899517.6	WODOLUI +	2 39 13,262	3,7055154.0
KAIRAKLIA	178 38 16,014	4,9775989.0	SSAFIANOWKA	119 59 7,799	4,9775990.1
Somme	180 0 0,126		Somme	180 0 3,909	
<i>R</i> * I. 19	187 38 28,616		<i>R</i> * I. 20	184 53 56,992	
<i>R</i> =	187 33 10,253		<i>R</i> =	187 33 10,254	
$\lg r^* = 4,9775989.6$					
$R^* = 187^\circ 33' 10,254.$					
I. 22. ISMAÏL. Tr. No. 2, p. 191.					
ISMAÏL	62° 14' 9,221	4,9775989.6	ISMAÏL	10° 23' 49,977	4,9653620.8
WODOLUI —	2 8 49,616	3,6042883.3	WODOLUI +	0 30 23,646	3,6554060.5
DORSKA	115 37 4,478	4,9857811.9	SSAFIANOWKA	169 5 47,139	4,9857812.2
Somme	180 0 3,315		Somme	180 0 0,762	
<i>R</i> * I. 21	187 33 10,254		<i>R</i> * I. 20	184 53 56,992	
<i>R</i> =	185 24 20,638		<i>R</i> =	185 24 20,638	
$\lg r^* = 4,9857812.0$					
$R^* = 185^\circ 24' 20,638.$					
I. 23. STARO-NEKRASSOWKA. Tr. No. 1, p. 191.					
STARO-NEKRASSOWKA .	92° 22' 15,861	4,9857812.0	STARO-NEKRASSOWKA .	29° 16' 7,850	4,9653620.8
WODOLUI —	1 59 41,004	3,5277623.3	WODOLUI —	1 29 17,358	3,6905541.3
ISMAÏL	85 38 6,267	4,9848914.7	SSAFIANOWKA	149 14 37,021	4,9848914.2
Somme	180 0 3,132		Somme	180 0 2,229	
<i>R</i> * I. 22	185 24 20,638		<i>R</i> * I. 20	184 53 56,992	
<i>R</i> =	183 24 39,634		<i>R</i> =	183 24 39,634	
$\lg r^* = 4,9848914.4 = r', \S 63.$					
$R^* = 183^\circ 24' 39,634 = \mathfrak{B}', \S 63.$					
p. 242. Az. I. 1.	270 56 5,510		p. 242. Az. I. 2.	334 2 13,520	
<i>Q</i> =	3 18 21,371		<i>Q</i> =	3 18 21,370	
$Q^* = 3^\circ 18' 21,371 = \mathfrak{A}', \S 63.$					

§ 55. Triangles polaires et coordonnées polaires.

DEPUIS

WODOLUI JUSQU'À SSURPRUNKOWZI.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
II. 1. WODOLUI = E. Point initial.					
II. 2. SSURUTSCHENI. p. 242. $\lg r = 4,2124602.0$ $R = 278^{\circ} 50' 33,700.$					
II. 3. PERESSETSCHINO. p. 242. $\lg r = 4,2444537.2$ $R = 321^{\circ} 44' 30,580.$					
II. 4. ZIGANESCHTI. Tr. No. 25, p. 195.					
ZIGANESCHTI	34° 2' 29,102	4,2124602.0	ZIGANESCHTI	21° 30' 8,421	4,2444537.2
WODOLUI +	30 56 56,771	4,1756298.5	WODOLUI —	11 57 0,113	3,9964250.7
SSURUTSCHENI	115 0 36,260	4,4216765.3	PERESSETSCHINO	146 32 52,390	4,4216765.6
Somme	180 0 2,133		Somme	180 0 0,924	
R II. 2	278 50 33,700		R II. 3	321 44 30,580	
R =	309 47 30,471		R =	309 47 30,467	
$\lg r^* = 4,4216765.4$					
$R^* = 309^{\circ} 47' 30,469.$					
II. 5. BOLOGAN. Tr. No. 26, p. 195.					
BOLOGAN	74° 8' 41,332	4,4216765.4	BOLOGAN	28° 47' 3,210	4,2444537.2
WODOLUI +	30 2 21,394	4,1380034.9	WODOLUI +	18 5 21,288	4,0539039.5
ZIGANESCHTI	75 49 0,661	4,4250773.6	PERESSETSCHINO	133 7 36,900	4,4250774.4
Somme	180 0 3,387		Somme	180 0 1,398	
R II. 4	309 47 30,469		R II. 3	321 44 30,580	
R =	339 49 51,863		R =	339 49 51,868	
$\lg r^* = 4,4250774.0$					
$R^* = 339^{\circ} 49' 51,866.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
II. 6. SAGAİKANI. Tr. No. 27, p. 195.					
SAGAİKANI.....	32° 54' 50",247	4,4216765.4	SAGAİKANI.....	42° 36' 2",424	4,4250774.0
WODOLUI..... +	11 57 14,058	4,0028016.9	WODOLUI..... -	18 5 7,331	4,0865278.4
ZIGANESCHTI.....	135 7 57,501	4,5350543.0	BOLOGAN.....	119 18 52,972	4,5350542.2
Somme	180 0 1,806		Somme	180 0 2,727	
R* II. 4	309 47 30,469		R* II. 5	339 49 51,866	
R =	321 44 44,527		R =	321 44 44,535	
lg r* = 4,5350542.6					
R* = 321° 44' 44",531.					

II. 7. ROSPOPENI. Tr. No. 28, p. 195.					
ROSPOPENI.....	41° 42' 42",552	4,5350542.6	ROSPOPENI.....	3° 45' 16",657	4,4250774.0
WODOLUI..... +	15 42 27,383	4,1445086.2	WODOLUI..... -	2 22 39,953	4,2268628.0
SAGAİKANI.....	122 34 53,944	4,6376207.0	BOLOGAN.....	173 52 3,852	4,6376207.3
Somme	180 0 3,879		Somme	180 0 0,462	
R* II. 6	321 44 44,531		R* II. 5	339 49 51,866	
R =	337 27 11,914		R =	337 27 11,913	
lg r* = 4,6376207.2					
R* = 337° 27' 11",914.					

II. 8. TSCHUTULESCHTI. Tr. No. 29, p. 195.					
TSCHUTULESCHTI....	7° 51' 0",513	4,5350542.6	TSCHUTULESCHTI....	47° 12' 29",796	4,6376207.2
WODOLUI..... +	3 49 5,329	4,2230614.1	WODOLUI..... -	11 53 22,063	4,0859329.1
SAGAİKANI.....	168 19 55,274	4,7055355.5	ROSPOPENI.....	120 54 12,512	4,7055354.4
Somme	180 0 1,116		Somme	180 0 4,371	
R* II. 6	321 44 44,531		R* II. 7	337 27 11,914	
R =	325 33 49,860		R =	325 33 49,851	
lg r* = 4,7055355.0					
R* = 325° 33' 49",856.					

Stations.	Angles	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
II. 9. UNKITESCHTI. Tr. No. 30, p. 195.					
UNKITESCHTI	63° 35' 32",889	4,7055355.0	UNKITESCHTI	5° 10' 49",054	4,6376207.2
WODOLUI +	10 33 31,736	4,0164105.2	WODOLUI —	1 19 50,312	4,0478686.8
TSCHUTULESCHTI	105 51 0,256	4,7365642.0	ROSPOPENI	173 29 21,162	4,7365641.2
Somme	180 0 4,881		Somme	180 0 0,528	
R* II. 8	325 33 49,856		R* II. 7	337 27 11,914	
R =	336 7 21,592		R =	336 7 21,602	
$\lg r^* = 4,7365641.6$					
$R^* = 336^\circ 7' 21",597.$					
II. 10. WODENI. Tr. No. 31, p. 195.					
WODENI	13° 33' 43",471	4,7055355.0	WODENI	32° 24' 15",249	4,7365641.6
WODOLUI +	3 43 50,969	4,1487542.6	WODOLUI —	6 49 40,769	4,0826119.2
TSCHUTULESCHTI	162 42 27,606	4,8085232.4	UNKITESCHTI	140 46 7,999	4,8085232.3
Somme	180 0 2,046		Somme	180 0 4,017	
R* II. 8	325 33 49,856		R* II. 9	336 7 21,597	
R =	329 17 40,825		R =	329 17 40,828	
$\lg r^* = 4,8085232.4$					
$R^* = 329^\circ 17' 40",826.$					
II. 11. BELZY. Tr. No. 32, p. 196.					
BELZY	29° 5' 28",297	4,7055355.0	BELZY	87° 38' 20",896	4,8085232.4
WODOLUI —	8 21 10,285	4,1808767.5	WODOLUI —	12 5 1,255	4,1297176.8
TSCHUTULESCHTI	142 33 25,924	4,8026108.9	WODENI	80 16 46,081	4,8026109.1
Somme	180 0 4,506		Somme	180 0 8,232	
R* II. 8	325 33 49,856		R* II. 10	329 17 40,826	
R =	317 12 39,571		R =	317 12 39,571	
$\lg r^* = 4,8026109.0$					
$R^* = 317^\circ 12' 39",571.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
II. 12. KETROS. Tr. No. 33, p. 196.					
KETROS	12° 46' 21,621	4,8026109.0	KETROS	48° 59' 11,538	4,8085232.4
WODOLUI +	1 59 22,147	3,9985591.0	WODOLUI —	10 5 39,112	4,1745058.4
DELZY	165 14 17,786	4,8642630.2	WODENI	120 55 17,291	4,8642630.2
Somme	180 0 1,554		Somme	180 0 7,941	
<i>R</i> * II. 11	317 12 39,571		<i>R</i> * II. 10	329 17 40,826	
<i>R</i> =	319 12 1,718		<i>R</i> =	319 12 1,714	
$\lg r^* = 4,8642630.2$ $R^* = 319^\circ 12' 1,716.$					
II. 13. BOKSANO. Tr. No. 34, p. 196.					
BOKSANO	83° 11' 0,486	4,8642630.2	BOKSANO	3° 56' 8,128	4,8085232.4
WODOLUI +	9 31 38,206	4,0861517.7	WODOLUI —	0 34 0,901	3,9673399.9
KETROS	87 17 29,888	4,8668588.5	WODENI	175 29 51,421	4,8668589.0
Somme	180 0 8,580		Somme	180 0 0,450	
<i>R</i> * II. 12	319 12 1,716		<i>R</i> * II. 10	329 17 40,826	
<i>R</i> =	328 43 39,922		<i>R</i> =	328 43 39,925	
$\lg r^* = 4,8668588.8$ $R^* = 328^\circ 43' 39,924.$					
II. 14. TYRNOWO. Tr. No. 35, p. 196.					
TYRNOWO	6° 22' 42,602	4,8642630.2	TYRNOWO	40° 37' 1,976	4,8668588.8
WODOLUI +	1 4 26,568	4,0914044.0	WODOLUI —	8 27 11,643	4,2205651.9
KETROS	172 32 51,958	4,9315162.8	BOKSANO	130 55 55,276	4,9315163.0
Somme	180 0 1,128		Somme	180 0 8,895	
<i>R</i> * II. 12	319 12 1,716		<i>R</i> * II. 13	328 43 39,924	
<i>R</i> =	320 16 28,284		<i>R</i> =	320 16 28,281	
$\lg r^* = 4,9315162.9$ $R^* = 320^\circ 16' 28,282.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
II. 15. RUDY. Tr. No. 36, p. 196.					
RUDY.....	78° 18' 8,498	4,9315162.9	RUDY.....	1° 3' 12,063	4,8668588.8
WODOLUI..... +	8 15 37,470	4,0979562.0	WODOLUI..... —	0 11 34,168	4,1294361.8
TYRNOWO.....	93 26 24,316	4,9398497.1	BOKSANO.....	178 45 13,976	4,9398497.4
Somme	180 0 10,284		Somme	180 0 0,207	
R* II. 14	320 16 28,282		R* II. 13	328 43 39,924	
R =	328 32 5,752		R =	328 32 5,756	
lg r* = 4,9398497.2					
R* = 328° 32' 5,754.					
II. 16. LIPNIK. Tr. No. 37, p. 196.					
LIPNIK.....	16° 15' 48,082	4,9315162.9	LIPNIK.....	38° 58' 3,241	4,9398497.2
WODOLUI..... +	2 24 2,892	4,1063350.5	WODOLUI..... —	5 51 34,570	4,1502202.5
TYRNOWO.....	161 20 12,386	4,9894481.4	RUDY.....	135 10 30,538	4,9894482.1
Somme	180 0 3,360		Somme	180 0 8,349	
R* II. 14	320 16 28,282		R* II. 15	328 32 5,754	
R =	322 40 31,174		R =	322 40 31,184	
lg r* = 4,9894481.8					
R* = 322° 40' 31,179.					
II. 17. ROTUNDA. Tr. No. 38, p. 196.					
ROTUNDA.....	26° 1' 6,860	4,9315162.9	ROTUNDA.....	90° 46' 24,056	4,9894481.8
WODOLUI..... —	3 49 17,413	4,1131273.6	WODOLUI..... —	6 13 20,306	4,0243989.9
TYRNOWO.....	150 9 41,034	4,9862441.1	LIPNIK.....	83 0 25,502	4,9862440.9
Somme	180 0 5,307		Somme	180 0 9,864	
R* II. 14	320 16 28,282		R* II. 16	322 40 31,179	
R =	316 27 10,869		R =	316 27 10,873	
lg r* = 4,9862441.0					
R* = 316° 27' 10,871.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
II. 18. GWOSDAUTZI. Tr. No. 39, p. 197.					
GWOSDAUTZI.....	39° 32' 11",645	4,9862441.0	GWOSDAUTZI.....	26° 34' 6",026	4,9894481.8
WODOLUI..... →	4 2 58,158	4,0312508.4	WODOLUI..... —	2 10 22,150	3,9176163.8
ROTUNDA.....	136 24 57,106	5,0208917.8	LIPNIK.....	151 15 35,562	5,0208918.2
Somme	180 0 6,909		Somme	180 0 3,738	
<i>R</i> * II. 17	316 27 10,871		<i>R</i> * II. 16	322 40 31,179	
<i>R</i> =	320 30 9,029		<i>R</i> =	320 30 9,029	
<i>lg r</i> * = 5,0208918.0					
<i>R</i> * = 320° 30' 9",029.					
II. 19. BRITSCHANI. Tr. No. 40, p. 197.					
BRITSCHANI.....	6° 29' 27",789	4,9862441.0	BRITSCHANI.....	78° 2' 23",803	5,0208918.0
WODOLUI..... —	0 38 25,947	3,9813333.8	WODOLUI..... —	4 41 24,106	3,9429171.6
ROTUNDA.....	172 52 7,374	5,0269173.7	GWOSDAUTZI.....	97 16 20,875	5,0269174.3
Somme	180 0 1,110		Somme	180 0 8,784	
<i>R</i> * II. 17	316 27 10,871		<i>R</i> * II. 18	320 30 9,029	
<i>R</i> =	315 48 44,924		<i>R</i> =	315 48 44,923	
<i>lg r</i> * = 5,0269174.0					
<i>R</i> * = 315° 48' 44",924.					
II. 20. WOLTSCHENETZ. Tr. No. 41, p. 197.					
WOLTSCHENETZ.....	1° 31' 13",968	5,0269174.0	WOLTSCHENETZ.....	35° 42' 53",179	5,0208918.0
WODOLUI..... —	0 8 58,987	4,0201671.3	WODOLUI..... —	4 50 23,093	4,1807752.1
BRITSCHANI.....	178 19 47,357	5,0676857.0	GWOSDAUTZI.....	139 26 53,685	5,0676857.2
Somme	180 0 0,312		Somme	180 0 9,957	
<i>R</i> * II. 19	315 48 44,924		<i>R</i> * II. 18	320 30 9,029	
<i>R</i> =	315 39 45,937		<i>R</i> =	315 39 45,936	
<i>lg r</i> * = 5,0676857.1					
<i>R</i> * = 315° 39' 45",936.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
II. 21. SAGORJANE. Tr. No. 42, p. 197.					
SAGORJANE	64° 21' 22",187	5,0676857.1	SAGORJANE	15° 38' 0",538	5,0208918.0
WODOLUI +	7 40 8,981	4,2379566.3	WODOLUI +	2 49 45,891	4,2836865.0
WOLTSCHENETZ	107 58 47,339	5,0909856.6	GWOSDAUTZI	161 32 19,715	5,0909856.1
Somme	180 0 18,507		Somme	180 0 6,144	
$R^* \text{ II. } 20$	315 39 45,936		$R^* \text{ II. } 18$	320 30 9,029	
$R =$	323 19 54,917		$R =$	323 19 54,920	
$\lg r^* = 5,0909856.4$					
$R^* = 323^\circ 19' 54",918.$					
II. 22. SSUPRUNKOWZI. Tr. No. 43, p. 197.					
SSUPRUNKOWZI	26° 32' 3",264	5,0676857.1	SSUPRUNKOWZI	45° 2' 2",705	5,0909856.4
WODOLUI +	3 40 5,864	4,2235926.3	WODOLUI —	4 0 3,124	4,0848193.3
WOLTSCHENETZ	149 48 0,340	5,1192467.7	SAGORJANE	130 58 5,067	5,1192468.3
Somme	180 0 9,468		Somme	180 0 10,896	
$R^* \text{ II. } 20$	315 39 45,936		$R^* \text{ II. } 21$	323 19 54,918	
$R =$	319 19 51,800		$R =$	319 19 51,794	
$\lg r^* = 5,1192468.0 = r'', \S 63.$					
$R^* = 319^\circ 19' 51",797 = \mathcal{R}'', \S 63.$					
p. 242. Az. III. 4.	164 10 41,600		p. 242. Az. III. 3.	92 36 35,630	
$Q =$	137 38 38,336		$Q =$	137 38 38,335	
$Q^* = 137^\circ 38' 38",336 = \mathcal{B}'', \S 63.$					

§ 56. Triangles polaires et coordonnées polaires.

DEPUIS

KREMENETZ JUSQU'À SSUPRUNKOWZI.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
III. 1. KREMENETZ = E.					
• Point initial.					
III. 2. MATWEJEWZI. p. 243.					
$\lg r = 4,0977447.2$					
$R = 124^{\circ} 34' 20,950.$					
III. 3. MOSTY. p. 243.					
$\lg r = 4,0993376.8$					
$R = 62^{\circ} 29' 12,000.$					
III. 4. SSIWKI. Tr. No. 58, p. 199.					
SSIWKI.....	27° 11' 14,630	4,0977447.2	SSIWKI.....	34° 15' 28,411	4,0993376.8
KREMENETZ.... —	23 48 29,505	4,0439542.8	KREMENETZ.... →	38 16 39,425	4,1409142.0
MATWEJEWZI.....	129 0 16,900	4,3283971.7	MOSTY.....	107 27 53,760	4,3283971.5
Somme	180 0 1,035		Somme	180 0 1,596	
R. III. 2	124 34 20,950		R. III. 3	62 29 12,000	
R =	100 45 51,445		R =	100 45 51,425	
$\lg r^* = 4,3283971.6$					
$R^* = 100^{\circ} 45' 51,435.$					
III. 5. BELOSERKA. Tr. No. 57, p. 199.					
BELOSERKA.....	6° 56' 0,728	4,0977447.2	BELOSERKA.....	51° 7' 35,961	4,3283971.6
KREMENETZ.... →	8 14 48,280	4,1726328.5	KREMENETZ.... →	32 3 17,804	4,1619927.4
MATWEJEWZI.....	164 49 11,460	4,4340375.9	SSIWKI.....	96 49 9,190	4,4340375.9
Somme	180 0 0,468		Somme	180 0 2,955	
R. III. 2	124 34 20,950		R. III. 4	100 45 51,435	
R =	132 49 9,230		R =	132 49 9,239	
$\lg r^* = 4,4340375.9$					
$R^* = 132^{\circ} 49' 9,234.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
III. 6. TUROWKA. Tr. No. 56, p. 199.					
TUROWKA.....	53° 44' 1",403	4,4340375.9	TUROWKA.....	20° 4' 45",865	4,3283971.6
KREMENETZ... —	20 36 22,801	4,0740244.3	KREMENETZ... +	11 26 55,005	4,0904297.1
BELOSERKA.....	105 39 38,781	4,5111263.6	SSIWKI.....	148 28 20,450	4,5111263.4
Somme	180 0 2,985		Somme	180 0 1,320	
R* III. 5	132 49 9,234		R* III. 4	100 45 51,435	
R =	112 12 46,433		R =	112 12 46,440	
lg r* = 4,5111263.5					
R* = 112° 12' 46",436.					
III. 7. BASALIA. Tr. No. 55, p. 199.					
BASALIA.....	11° 54' 38",548	4,4340375.9	BASALIA.....	56° 33' 44",256	4,5111263.5
KREMENETZ... —	4 28 7,847	4,0109832.1	KREMENETZ... +	16 8 14,953	4,0336573.7
BELOSERKA.....	163 37 14,361	4,5696018.2	TUROWKA.....	107 18 4,013	4,5696018.0
Somme	180 0 0,756		Somme	180 0 3,222	
R* III. 5	132 49 9,234		R* III. 6	112 12 46,436	
R =	128 21 1,387		R =	128 21 1,389	
lg r* = 4,5696018.1					
R* = 128° 21' 1",388.					
III. 8. MONTSCHINZI. Tr. No. 54, p. 199.					
MONTSCHINZI.....	38° 18' 32",461	4,5696018.1	MONTSCHINZI.....	10° 24' 49",522	4,5111263.5
KREMENETZ... —	11 44 4,666	4,0855764.0	KREMENETZ... +	4 24 10,286	4,1392139.9
BASALIA.....	129 57 26,206	4,6618087.7	TUROWKA.....	165 11 1,293	4,6618087.8
Somme	180 0 3,333		Somme	180 0 1,101	
R* III. 7	128 21 1,388		R* III. 6	112 12 46,436	
R =	116 36 56,722		R =	116 36 56,722	
lg r* = 4,6618087.8					
R* = 116° 36' 56",722.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
III. 9. KATERINOWKA. Tr. No. 53, p. 199.					
KATERINOWKA	3° 9' 8",784	4,5696018.1	KATERINOWKA	62° 58' 56",148	4,6618087.8
KREMENETZ —	1 2 53,914	4,0916309.6	KREMENETZ +	10 41 10,751	3,9801675.4
BASALIA	175 47 57,626	4,6941096.7	MONTSCHINZI	106 19 57,151	4,6941096.7
Somme	180 0 0,324		Somme	180 0 4,050	
<i>R</i> * III. 7	128 21 1,388		<i>R</i> * III. 8	116 36 56,722	
<i>R</i> =	127 18 7,474		<i>R</i> =	127 18 7,473	
<i>lg r</i> * = 4,6941096.7					
<i>R</i> * = 127° 18' 7",474.					

III. 10. KRIWOTSCHINZI. Tr. No. 52, p. 198.					
KRIWOTSCHINZI	42° 56' 54",019	4,5696018.1	KRIWOTSCHINZI	105° 50' 42",420	4,6941096.7
KREMENETZ +	12 24 28,658	4,0684082.0	KREMENETZ +	13 27 22,558	4,0777197.4
BASALIA	124 38 40,764	4,6514811.1	KATERINOWKA	60 41 59,984	4,6514810.9
Somme	180 0 3,441		Somme	180 0 4,962	
<i>R</i> * III. 7	128 21 1,388		<i>R</i> * III. 9	127 18 7,474	
<i>R</i> =	140 45 30,046		<i>R</i> =	140 45 30,032	
<i>lg r</i> * = 4,6514811.0					
<i>R</i> * = 140° 45' 30",039.					

III. 11. FELSCHTIN. Tr. No. 51, p. 198.					
FELSCHTIN	3° 37' 35",951	4,6514811.0	FELSCHTIN	51° 2' 42",644	4,6941096.7
KREMENETZ —	0 58 48,789	4,0835545.2	KREMENETZ +	12 28 33,772	4,1378317.7
KRIWOTSCHINZI	175 23 35,680	4,7552006.0	KATERINOWKA	116 28 49,434	4,7552006.3
Somme	180 0 0,420		Somme	180 0 5,850	
<i>R</i> * III. 10	140 45 30,039		<i>R</i> * III. 9	127 18 7,474	
<i>R</i> =	139 46 41,250		<i>R</i> =	139 46 41,246	
<i>lg r</i> * = 4,7552006.2					
<i>R</i> * = 139° 46' 41",248.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
III. 12. ALEXANDROWKA. Tr. No. 50, p. 198.					
ALEXANDROWKA	50° 7' 23",803	4,6514811.0	ALEXANDROWKA	103° 32' 32",898	4,7552006.2
KREMENETZ +	12 48 22,168	4,1121064.8	KREMENETZ +	13 47 10,957	4,1445545.8
KRIWOTSCHINZI	117 4 19,000	4,7160519.9	FELSCHTIN	62 40 22,931	4,7160521.2
Somme	180 0 4,971		Somme	180 0 6,786	
R* III. 10	140 45 30,039		R* III. 11	139 46 41,248	
R =	153 33 52,207		R =	153 33 52,205	
$\lg r^* = 4,7160520.6$					
$R^* = 153^\circ 33' 52",206.$					
III. 13. TSCHERNOWODY. Tr. No. 49, p. 198.					
TSCHERNOWODY	23° 14' 36",077	4,7160520.6	TSCHERNOWODY	41° 12' 38",146	4,7552006.2
KREMENETZ —	6 16 17,334	4,1582169.8	KREMENETZ +	7 30 53,613	4,0529614.8
ALEXANDROWKA	150 29 10,138	4,8123884.6	FELSCHTIN	131 16 32,891	4,8123885.5
Somme	180 0 3,549		Somme	180 0 4,650	
R* III. 12	153 33 52,206		R* III. 11	139 46 41,248	
R =	147 17 34,872		R =	147 17 34,861	
$\lg r^* = 4,8123885.0$					
$R^* = 147^\circ 17' 34",866.$					
III. 14. BARANOWKA. Tr. No. 48, p. 198.					
BARANOWKA	52° 9' 54",461	4,8123885.0	BARANOWKA	6° 57' 28",364	4,7552006.2
KREMENETZ —	9 24 31,086	4,1283045.8	KREMENETZ —	1 53 37,475	4,1910135.6
TSCHERNOWODY	118 25 41,836	4,8590813.9	FELSCHTIN	171 8 55,469	4,8590813.9
Somme	180 0 7,383		Somme	180 0 1,308	
R* III. 13	147 17 34,866		R* III. 11	139 46 41,248	
R =	137 53 3,780		R =	137 53 3,773	
$\lg r^* = 4,8590813.9$					
$R^* = 137^\circ 53' 3",776.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
III. 15. HANOWKA. Tr. No. 47, p. 198.					
HANOWKA	3° 13' 13,762	4,8123885.0	HANOWKA	54 9' 11",188	4,8590813.9
KREMENETZ . . . —	0 43 0,963	4,1601362.0	KREMENETZ . . . +	8 41 30,131	4,1295640.6
TSCHERNOWODY . . .	176 3 45,896	4,8995607.1	BARANOWKA	117 9 27,021	4,8995606.5
Somme	180 0 0,621		Somme	180 0 8,340	
<i>R</i> * III. 13	147 17 34,866		<i>R</i> * III. 14	137 53 3,776	
<i>R</i> =	146 34 33,903		<i>R</i> =	146 34 33,907	
$\lg r^* = 4,8995606.8$					
$R^* = 146^\circ 34' 33,905.$					
III. 16. KARATSCHKOWZI. Tr. No. 46, p. 198.					
KARATSCHKOWZI . . .	37° 48' 33",133	4,8123885.0	KARATSCHKOWZI . . .	105° 25' 13",502	4,8995606.8
KREMENETZ . . . +	7 33 57,504	4,1443560.8	KREMENETZ . . . +	8 16 58,468	4,0739882.0
TSCHERNOWODY . . .	134 37 35,564	4,8772112.5	HANOWKA	66 17 56,322	4,8772111.9
Somme	180 0 6,201		Somme	180 0 8,292	
<i>R</i> * III. 13	147 17 34,866		<i>R</i> * III. 15	146 34 33,905	
<i>R</i> =	154 51 32,370		<i>R</i> =	154 51 32,373	
$\lg r^* = 4,8772112.2$					
$R^* = 154^\circ 51' 32,372.$					
III. 17. SSUPRUNKOWZI. Tr. No. 45, p. 197.					
SSUPRUNKOWZI	20° 42' 59",919	4,8772112.2	SSUPRUNKOWZI	40° 26' 42",977	4,8995606.8
KREMENETZ . . . —	3 23 8,375	4,0997496.5	KREMENETZ . . . +	4 53 50,091	4,1087611.8
KARATSCHKOWZI . . .	155 53 55,432	4,9395650.1	HANOWKA	134 39 32,602	4,9395650.4
Somme	180 0 3,726		Somme	180 0 5,670	
<i>R</i> * III. 16	154 51 32,372		<i>R</i> * III. 15	146 34 33,905	
<i>R</i> =	151 28 23,997		<i>R</i> =	151 28 23,996	
$\lg r^* = 4,9395650.2 = r'''$, § 63.					
$R^* = 151^\circ 28' 23,996 = Q'''$, § 63.					
p. 242. Az. III. 1.	311 35 47,600		p. 242. Az. III. 2.	12 45 30,490	
<i>Q</i> =	332 18 47,519		<i>Q</i> =	332 18 47,513	
$Q^* = 332^\circ 18' 47,516 = Q'''$, § 63.					

§ 57. Triangles polaires et coordonnées polaires.

DEPUIS

BELIN JUSQU'À KREMENETZ.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
IV. 1. BELIN = E. Point initial.					
IV. 2. BOLSCHAJA-GLUSCHA. p. 243. lg r = 4,1760273.0 R = 206° 20' 25,230.					
IV. 3. SCHLÄPAN. p. 243. lg r = 4,1229242.0 R = 136° 54' 53,200.					
IV. 4. TSCHERWISCHTSCHJE. Tr. No. 75, p. 202.					
TSCHERWISCHTSCHJE..	31° 40' 31,935	4,1760273.0	TSCHERWISCHTSCHJE..	21° 54' 5,385	4,1229242.0
BELIN..... —	41 13 12,920	4,2746353.5	BELIN..... +	28 12 19,082	4,2257255.4
BOLSCHAJA-GLUSCHA.	107 6 17,740	4,4361343.1	SCHLÄPAN.....	129 53 37,180	4,4361343.3
Somme	180 0 2,595		Somme	180 0 1,647	
R IV. 2	206 20 25,230		R IV. 3	136 54 53,200	
R =	165 7 12,310		R =	165 7 12,282	
lg r* = 4,4361343.2 R* = 165° 7' 12,296.					
IV. 5. GUTAKAMENSKAJA. Tr. No. 74, p. 202.					
GUTAKAMENSKAJA...	14° 11' 6,049	4,1760273.0	GUTAKAMENSKAJA...	75° 20' 46,629	4,4361343.2
BELIN..... —	12 21 44,534	4,1173696.4	BELIN..... +	28 51 28,381	4,1341141.4
BOLSCHAJA-GLUSCHA.	153 27 10,260	4,4370128.7	TSCHERWISCHTSCHJE..	75 47 48,455	4,4370129.3
Somme	180 0 0,843		Somme	180 0 3,465	
R IV. 2	206 20 25,230		R* IV. 4	165 7 12,296	
R =	193 58 40,696		R =	193 58 40,677	
lg r* = 4,4370129.0 R* = 193° 58' 40,686.					

IV. 6. TSCHEREMOSCHNA. Tr. No. 73, p. 201.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
TSCHEREMOSCHNA ...	12° 26' 15,734	4,4370129.0	TSCHEREMOSCHNA ...	33° 56' 43,479	4,4361343.2
BELIN..... —	6 17 17,293	4,1433350.6	BELIN..... +	22 34 11,083	4,2732979.3
GUTAKAMENSKAJA ...	161 16 28,149	4,6103698.9	TSCHERWISCHTSCHIE ..	123 29 9,545	4,6103699.1
Somme	180 0 1,176		Somme	180 0 4,107	
R* IV. 5	193 58 40,686		R* IV. 4	165 7 12,296	
R =	187 41 23,393		R =	187 41 23,379	

$\lg r^* = 4,6103699.0$

$R^* = 187^\circ 41' 23,386.$

IV. 7. DATIN. Tr. No. 72, p. 201.

DATIN	42° 33' 28,028	4,4370129.0	DATIN	99° 37' 27,572	4,6103699.0
BELIN..... +	16 47 57,557	4,0677764.9	BELIN..... +	23 5 14,836	4,2099528.8
GUTAKAMENSKAJA ...	120 38 37,061	4,5415324.3	TSCHEREMOSCHNA ...	57 17 22,944	4,5415324.4
Somme	180 0 2,646		Somme	180 0 5,352	
R* IV. 5	193 58 40,686		R* IV. 6	187 41 23,386	
R =	210 46 38,243		R =	210 46 38,222	

$\lg r^* = 4,5415324.4$

$R^* = 210^\circ 46' 38,232.$

IV. 8. KOWEL. Tr. No. 71, p. 201.

KOWEL.....	20° 58' 5,418	4,5415324.4	KOWEL.....	46° 29' 21,354	4,6103699.0
BELIN..... —	9 12 10,346	4,1917575.6	BELIN..... +	13 53 4,491	4,1300260.7
DATIN	149 49 46,852	4,6890386.7	TSCHEREMOSCHNA ...	119 37 38,754	4,6890386.8
Somme	180 0 2,616		Somme	180 0 4,599	
R* IV. 7	210 46 38,232		R* IV. 6	187 41 23,386	
R =	201 34 27,886		R =	201 34 27,877	

$\lg r^* = 4,6890386.8$

$R^* = 201^\circ 34' 27,882.$

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
IV. 9. GOLOBI. Tr. No. 70, p. 201.					
GOLOBI.....	61° 9' 13,829	4,6890386.8	GOLOBI.....	2° 36' 26,838	4,6103699.0
BELIN..... —	13 3 28,000	4,1005406.9	BELIN..... +	0 49 36,491	4,1116799.0
KOWEL.....	105 47 23,874	4,7298734.1	TSCHEREMOSCHINA...	176 33 56,974	4,7298733.8
Somme	180 0 5,703		Somme	180 0 0,303	
R* IV. 8	201 34 27,882		R* IV. 6	187 41 23,386	
R =	188 30 59,882		R =	188 30 59,877	
lg r* = 4,7298734.0					
R* = 188° 30' 59,880.					
IV. 10. OSMIGOWITSCHI. Tr. No. 69, p. 201.					
OSMIGOWITSCHI.....	20° 1' 15,032	4,6890386.8	OSMIGOWITSCHI.....	20° 22' 59,450	4,7298734.0
BELIN..... —	7 49 4,724	4,2881630.2	BELIN..... +	5 14 23,275	4,1484920.5
KOWEL.....	152 9 44,504	4,8238539.0	GOLOBI.....	154 22 40,419	4,8238538.1
Somme	180 0 4,260		Somme	180 0 3,144	
R* IV. 8	201 34 27,882		R* IV. 9	188 30 59,880	
R =	193 45 23,158		R =	193 45 23,155	
lg r* = 4,8238538.6					
R* = 193° 45' 23,156.					
IV. 11. ROSCHISCHTSCHJE. Tr. No. 68, p. 201.					
ROSCHISCHTSCHJE....	91° 59' 41,453	4,8238538.6	ROSCHISCHTSCHJE....	40° 58' 7,544	4,7298734.0
BELIN..... —	15 19 2,272	4,2459632.5	BELIN..... —	10 4 38,999	4,1561735.4
OSMIGOWITSCHI.....	72 41 27,060	4,8039874.7	GOLOBI.....	128 57 19,211	4,8039874,7
Somme	180 0 10,785		Somme	180 0 5,754	
R* IV. 10	193 45 23,156		R* IV. 9	188 30 59,880	
R =	178 26 20,884		R =	178 26 20,881	
lg r* = 4,8039874.7					
R* = 178° 26' 20,882.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
IV. 12. TORTSCHIN. Tr. No. 67, p. 201.					
TORTSCHIN.....	43° 46' 50",662	4,8238538.6	TORTSCHIN.....	35° 22' 26",754	4,8039874.7
BELIN..... —	7 32 53,044	4,1022374.4	BELIN..... +	7 46 9,231	4,1722722.8
OSMIGOWITSCH.....	128 40 22,630	4,8763167.3	ROSCHSCHTSCHJE.....	136 51 30,243	4,8763167.2
Somme	180 0 6,336		Somme	180 0 6,228	
<i>R</i> * IV. 10	193 45 23,156		<i>R</i> * IV. 11	178 26 20,882	
<i>R</i> =	186 12 30,112		<i>R</i> =	186 12 30,113	
$\lg r^* = 4,8763167.2$					
$R^* = 186^\circ 12' 30",112.$					
IV. 13. KRUPI. Tr. No. 66, p. 200.					
KRUPI.....	74° 15' 27",235	4,8763167.2	KRUPI.....	15° 44' 27",215	4,8039874.7
BELIN..... —	11 25 5,391	4,1894786.9	BELIN..... —	3 38 56,167	4,1742816.8
TORTSCHIN.....	94 19 38,534	4,8916829.9	ROSCHSCHTSCHJE.....	160 36 39,657	4,8916830.0
Somme	180 0 11,160		Somme	180 0 3,039	
<i>R</i> * IV. 12	186 12 30,112		<i>R</i> * IV. 11	178 26 20,882	
<i>R</i> =	174 47 24,721		<i>R</i> =	174 47 24,715	
$\lg r^* = 4,8916830.0$					
$R^* = 174^\circ 47' 24",718.$					
IV. 14. SCHATTSCHA. Tr. No. 65, p. 200.					
SCHATTSCHA.....	19° 4' 47",677	4,8763167.2	SCHATTSCHA.....	37° 35' 23",354	4,8916830.0
BELIN..... —	4 1 35,846	4,2083441.1	BELIN..... +	7 23 29,540	4,2157178.6
TORTSCHIN.....	156 53 41,064	4,9556893.2	KRUPI.....	135 1 15,815	4,9556894.3
Somme	180 0 4,587		Somme	180 0 8,709	
<i>R</i> * IV. 12	186 12 30,112		<i>R</i> * IV. 13	174 47 24,718	
<i>R</i> =	182 10 54,266		<i>R</i> =	182 10 54,258	
$\lg r^* = 4,9556893.8$					
$R^* = 182^\circ 10' 54",262.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
IV. 15. SMORDWA. Tr. No. 64, p. 200.					
SMORDWA.....	73° 58' 20",119	4,9556893.8	SMORDWA.....	7° 29' 28",894	4,8916830.0
DELIN..... —	8 52 23,356	4,1610724.8	DELIN..... —	1 28 53,807	4,1890074.4
SCHADTSCHA.....	97 9 29,014	4,9695136.2	KRUPI.....	171 1 39,105	4,9695136.6
Somme	180 0 12,489		Somme	180 0 1,806	
R* IV. 14	182 10 54,262		R* IV. 13	174 47 24,718	
R =	173 18 30,906		R =	173 18 30,911	
lg r* = 4,9695136.4					
R* = 173° 18' 30",908.					
IV. 16. BORBIN. Tr. No. 63, p. 200.					
BORBIN.....	136° 41' 41",243	4,9695136.4	BORBIN.....	73° 20' 28",785	4,8916830.0
DELIN..... —	6 58 54,276	4,2179717.5	DELIN..... —	8 27 48,083	4,0781035.2
SMORDWA.....	36 19 33,256	4,9058462.7	KRUPI.....	98 11 52,015	4,9058463.7
Somme	180 0 8,775		Somme	180 0 8,883	
R* IV. 15	173 18 30,908		R* IV. 13	174 47 24,718	
R =	166 19 36,632		R =	166 19 36,635	
lg r* = 4,9058463.2					
R* = 166° 19' 36",634.					
IV. 17. GURNIKI. Tr. No. 62, p. 200.					
GURNIKI.....	66° 47' 7",369	4,9695136.4	GURNIKI.....	0° 22' 14",685	4,9058463.2
DELIN..... —	6 54 15,039	4,0860618.3	DELIN..... +	0 4 39,234	4,2263965.1
SMORDWA.....	106 18 48,086	4,9883405.6	BORBIN.....	179 33 6,183	4,9883406.0
Somme	180 0 10,494		Somme	180 0 0,102	
R* IV. 15	173 18 30,908		R IV. 16	166 19 36,634	
R =	166 24 15,869		R =	166 24 15,868	
lg r* = 4,9883405.8					
R* = 166° 24' 15",868.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
IV. 18. KREMENETZ. Tr. No. 61, p. 200.					
KREMENETZ.....	10° 54' 53",810	4,9695136.4	KREMENETZ.....	26° 44' 25",918	4,9883405.8
BELIN..... —	2 18 0,444	4,2957005.6	BELIN..... +	4 36 14,593	4,2396638.2
SMORDWA.....	166 47 9,796	5,0513246.3	GURNIKI.....	148 39 27,949	5,0513246.3
Somme	180 0 4,050		Somme	180 0 8,460	
R^* IV. 15	173 18 30,908		R^* IV. 17	166 24 15,868	
$R =$	171 0 30,464		$\mathfrak{R} =$	171 0 30,461	
$\lg r^* = 5,0513246.3 = r'', \S 63.$					
$R^* = 171^\circ 0' 30",462 = \mathfrak{B}'', \S 63.$					
p. 243. Az. IV. 1.	340 27 57,670		p. 243. Az. IV. 2.	18 7 17,400	
$Q =$	351 22 51,480		$\Omega =$	351 22 51,482	
$Q^* = 351^\circ 22' 51",481 = \mathfrak{A}'', \S 63.$					

§ 58. Triangles polaires et coordonnées polaires.

DEPUIS

BELIN JUSQU'À NEMESCH.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
V. 1. BELIN = E. Point initial.					
V. 2. BESDESCU. p. 243. $\lg r = 4,2100345.7$ $R = 8^{\circ} 24' 30,860.$					
V. 3. LESKOWITSCHI. p. 243. $\lg r = 4,1495690.2$ $R = 61^{\circ} 44' 4,790.$					
V. 4. OSSOWNITZA. Tr. No. 79, p. 202.					
OSSOWNITZA.....	51° 46' 10,702	4,2100345.7	OSSOWNITZA.....	26° 59' 41,396	4,1495690.2
BELIN..... +	38 42 16,371	4,1109633.1	BELIN..... —	14 37 17,542	3,8947446.7
BESDESCU.....	89 31 34,940	4,3148585.5	LESKOWITSCHI.....	138 23 1,770	4,3148585.9
Somme	180 0 2,013		Somme	180 0 0,708	
R V. 2	8 24 30,860		R V. 3	61 44 4,790	
R =	47 6 47,231		R =	47 6 47,248	
$\lg r^* = 4,3148585.7$ $R^* = 47^{\circ} 6' 47,240.$					
V. 5. GATH. Tr. No. 80, p. 202.					
GATH.....	14° 52' 3,079	4,2100345.7	GATH.....	29° 6' 6,883	4,3148585.7
BELIN..... +	16 39 49,080	4,2583109.4	BELIN..... —	22 2 27,308	4,2022378.3
BESDESCU.....	148 28 9,320	4,5192740.6	OSSOWNITZA.....	128 51 28,272	4,5192740.8
Somme	180 0 1,479		Somme	180 0 2,463	
R V. 2	8 24 30,860		R* V. 4	47 6 47,240	
R =	25 4 19,940		R =	25 4 19,932	
$\lg r^* = 4,5192740.7$ $R^* = 25^{\circ} 4' 19,936.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
V. 6. BRONNA. Tr. No. 81, p. 203.					
BRONNA	15° 40' 27",787	4,2100345.7	BRONNA	76° 22' 41",252	4,5192740.7
BELIN —	16 34 50,378	4,2337979.8	BELIN —	33 14 39,452	4,2706072.4
BESDESCH	147 44 43,260	4,5056859.7	GATH	70 22 44,879	4,5056859.2
Somme	180 0 1,425		Somme	180 0 5,583	
<i>R</i> * V. 2	8 24 30,860		<i>R</i> * V. 5	25 4 19,936	
<i>R</i> =	351 49 40,482		<i>R</i> =	351 49 40,484	
<i>lgr</i> * = 4,5056859.4					
<i>R</i> * = 351° 49' 40",483.					

V. 7. IWAZEWITSCHI. Tr. No. 82, p. 203.					
IWAZEWITSCHI	43° 32' 10",298	4,5056859.4	IWAZEWITSCHI	54° 47' 18",124	4,5192740.7
BELIN +	13 27 7,026	4,0342440.7	BELIN —	19 47 32,447	4,1367337.2
BRONNA	123 0 45,472	4,5911173.5	GATH	105 25 13,629	4,5911173.3
Somme	180 0 2,796		Somme	180 0 4,200	
<i>R</i> * V. 6	351 49 40,483		<i>R</i> * V. 5	25 4 19,936	
<i>R</i> =	5 16 47,509		<i>R</i> =	5 16 47,489	
<i>lgr</i> * = 4,5911173.4					
<i>R</i> * = 5° 16' 47",499.					

V. 8. SCHOMEIZÄKI. Tr. No. 83, p. 203.					
SCHOMEIZÄKI	2° 27' 44",372	4,5056859.4	SCHOMEIZÄKI	63° 5' 6",240	4,5911173.4
BELIN +	0 47 47,879	4,0157121.9	BELIN —	12 39 19,145	3,9815122.3
BRONNA	176 44 27,932	4,6273172.6	IWAZEWITSCHI	104 15 38,098	4,6273172.0
Somme	180 0 0,183		Somme	180 0 3,483	
<i>R</i> * V. 6	351 49 40,483		<i>R</i> * V. 7	5 16 47,499	
<i>R</i> =	352 37 28,362		<i>R</i> =	352 37 28,354	
<i>lgr</i> * = 4,6273172.3					
<i>R</i> * = 352° 37' 28",358.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
V. 9. MARINUS. Tr. No. 84, p. 203.					
MARINUS.....	48° 41' 28",485	4,6273172.3	MARINUS.....	16° 45' 40",288	4,5911173.4
BELIN..... +	18 31 13,033	4,2535086.2	BELIN..... +	5 51 53,875	4,1405223.8
SCHOMEIZÄKI.....	112 47 25,220	4,7162862.8	IWAZEWITSCHI.....	157 22 27,832	4,7162862.3
Somme	180 0 6,738		Somme	180 0 1,995	
R* V. 8	352 37 28,358		R* V. 7	5 16 47,499	
R =	11 8 41,391		R =	11 8 41,374	
lg r* = 4,7162862.6					
R* = 11° 8' 41",382.					
V. 10. RINKI. Tr. No. 85, p. 203.					
RINKI.....	12° 57' 57",180	4,6273172.3	RINKI.....	56° 4' 19",266	4,7162862.6
BELIN..... +	5 8 24,465	4,2286093.4	BELIN..... —	13 22 48,567	4,1617114.9
SCHOMEIZÄKI.....	161 53 40,500	4,7687958.9	MARINUS.....	110 32 58,965	4,7687958.8
Somme	180 0 2,145		Somme	180 0 6,798	
R* V. 8	352 37 28,358		R* V. 9	11 8 41,382	
R =	357 45 52,823		R =	357 45 52,815	
lg r* = 4,7687958.8					
R* = 357° 45' 52",819.					
V. 11. DSERGELI. Tr. No. 86, p. 203.					
DSERGELI.....	15° 10' 44",538	4,6273172.3	DSERGELI.....	69° 1' 7",395	4,7687958.8
BELIN..... —	7 25 1,395	4,3201736.0	BELIN..... —	12 33 25,863	4,1358549.6
SCHOMEIZÄKI.....	157 24 17,340	4,7938790.0	RINKI.....	98 25 34,380	4,7938790.0
Somme	180 0 3,273		Somme	180 0 7,638	
R* V. 8	352 37 28,358		R* V. 10	357 45 52,819	
R =	345 12 26,963		R =	345 12 26,956	
lg r* = 4,7938790.0					
R* = 345° 12' 26",960.					

Stations.	Angles	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
V. 12. SOLOTEJEWO. Tr. No. 87, p. 203.					
SOLOTEJEWO.....	35° 37' 51",037	4,7938790.0	SOLOTEJEWO.....	33° 40' 43",688	4,7687958.8
BELIN..... →	5 5 32,897	3,9767462.5	BELIN..... —	7 27 52,971	4,1385048.1
DSENGELI.....	139 16 39,765	4,8430539.7	RINKI.....	138 51 28,450	4,8430539.9
Somme	180 0 3,699		Somme	180 0 5,109	
R* V. 11	345 12 26,960		R* V. 10	357 45 52,819	
R =	350 17 59,857		R =	350 17 59,848	
lg r* = 4,8430539.8					
R* = 350° 17' 59",852.					
V. 13. TARASSOWZI. Tr. No. 88, p. 204.					
TARASSOWZI.....	57° 19' 47",377	4,8430539.8	TARASSOWZI.....	21° 2' 15",008	4,7687958.8
BELIN..... →	15 18 8,960	4,3392836.6	BELIN..... →	7 50 15,993	4,3484218.4
SOLOTEJEWO.....	107 22 17,628	4,8975838.3	RINKI.....	151 7 35,080	4,8975838.5
Somme	180 0 13,965		Somme	180 0 6,081	
R* V. 12	350 17 59,852		R* V. 10	357 45 52,819	
R =	5 36 8,812		R =	5 36 8,812	
lg r* = 4,8975838.4					
R* = 5° 36' 8",812.					
V. 14. LOPATI. Tr. No. 89, p. 204.					
LOPATI.....	7° 30' 3",380	4,8430539.8	LOPATI.....	59° 59' 0",015	4,8975838.4
BELIN..... →	1 55 30,880	4,2535531.8	BELIN..... —	13 22 38,085	4,3243782.7
SOLOTEJEWO.....	170 34 27,708	4,9415485.0	TARASSOWZI.....	106 38 37,257	4,9415484.9
Somme	180 0 1,968		Somme	180 0 15,357	
R* V. 12	350 17 59,852		R* V. 13	5 36 8,812	
R =	352 13 30,732		R =	352 13 30,727	
lg r* = 4,9415485.0					
R* = 352° 13' 30",730.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
V. 15. FALKOWTSCHISNA. Tr. No. 90, p. 204.					
FALKOWTSCHISNA ...	52° 16' 35",813	4,9415485.0	FALKOWTSCHISNA ...	19° 40' 56",265	4,8975838.4
BELIN +	8 43 22,147	4,2241919.5	BELIN —	4 39 15,933	4,2794322.8
LOPATI	119 0 14,355	4,9852003.7	TARASSOWZI	155 39 53,757	4,9852002.9
Somme	180 0 12,315		Somme	180 0 5,955	
R* V. 14	352 13 30,730		R* V. 13	5 36 8,812	
R =	0 56 52,877		R =	0 56 52,879	

$$\lg r^* = 4,9852003.3$$

$$R^* = 0^\circ 56' 52,878.$$

V. 16. PUTZEWITSCHI. Tr. No. 91, p. 204.					
PUTZEWITSCHI	101° 50' 27",191	4,9852003.3	PUTZEWITSCHI	35° 6' 2",947	4,8975838.4
BELIN +	11 1 56,493	4,2763395.5	BELIN +	6 22 40,567	4,1835228.8
FALKOWTSCHISNA ...	67 7 52,495	4,9589811.6	TARASSOWZI	138 31 24,163	4,9589811.8
Somme	180 0 16,179		Somme	180 0 7,677	
R* V. 15	0 56 52,878		R* V. 13	5 36 8,812	
R =	11 58 49,371		R =	11 58 49,379	

$$\lg r^* = 4,9589811.7$$

$$R^* = 11^\circ 58' 49,375.$$

V. 17. DOKUDOWO. Tr. No. 92, p. 204.					
DOKUDOWO	56° 22' 13",606	4,9852003.3	DOKUDOWO	42° 18' 29",942	4,9589811.7
BELIN +	4 38 48,963	3,9732504.8	BELIN —	6 23 7,536	4,1770023.0
FALKOWTSCHISNA ...	118 59 5,075	5,0066351.4	PUTZEWITSCHI	131 18 32,401	5,0066351.6
Somme	180 0 7,644		Somme	180 0 9,879	
R* V. 15	0 56 52,878		R* V. 16	11 58 49,375	
R =	5 35 41,841		R =	5 35 41,839	

$$\lg r^* = 5,0066351.5$$

$$R^* = 5^\circ 35' 41,840.$$

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
V. 18. AMALIENHOF. Tr. No. 93, p. 204.					
AMALIENHOF	102° 24' 12",907	5,0066351.5	AMALIENHOF	11° 6' 4",646	4,9589811.7
BELIN +	7 14 34,002	4,1174491.6	BELIN +	0 51 26,466	3,8494156.9
DOKUDOWO	70 21 25,142	4,9908485.1	PUTZEWITSCHI	168 2 30,169	4,9908485.8
Somme	180 0 12,051		Somme	180 0 1,281	
<i>R</i> * V. 17	5 35 41,840		<i>R</i> * V. 16	11 58 49,375	
<i>R</i> =	12 50 15,842		<i>R</i> =	12 50 15,841	
$\lg r^* = 4,9908485.4$ $R^* = 12^\circ 50' 15,842.$					
V. 19. IWJE. Tr. No. 94, p. 204.					
IWJE	31° 12' 26",249	5,0066351.5	IWJE	24° 23' 56",174	4,9908485.4
BELIN +	3 31 59,186	4,0818817.7	BELIN —	3 42 34,820	4,1856527.4
DOKUDOWO	145 15 41,282	5,0479530.5	AMALIENHOF	151 53 35,807	5,0479531.2
Somme	180 0 6,717		Somme	180 0 6,801	
<i>R</i> * V. 17	5 35 41,840		<i>R</i> * V. 18	12 50 15,842	
<i>R</i> =	9 7 41,026		<i>R</i> =	9 7 41,022	
$\lg r^* = 5,0479530.8$ $R^* = 9^\circ 7' 41,024.$					
V. 20. DAUKNI. Tr. No. 95, p. 205.					
DAUKNI	13° 38' 41",186	5,0066351.5	DAUKNI	71° 35' 21",404	5,0479530.8
BELIN —	1 48 10,408	4,1316110.8	BELIN —	5 20 9,592	4,0391523.8
DOKUDOWO	164 33 11,928	5,0593623.7	IWJE	103 4 40,449	5,0593623.9
Somme	180 0 3,522		Somme	180 0 11,445	
<i>R</i> * V. 17	5 35 41,840		<i>R</i> * V. 19	9 7 41,024	
<i>R</i> =	3 47 31,432		<i>R</i> =	3 47 31,432	
$\lg r^* = 5,0593623.8$ $R^* = 3^\circ 47' 31,432.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
V. 21. WIDNOPOL. Tr. No. 96, p. 205.					
WIDNOPOL.....	62° 26' 12",963	5,0593623.8	WIDNOPOL.....	15° 50' 18",248	5,0479530.8
BELIN..... +	6 40 20,624	4,1767726.2	BELIN..... +	1 20 11,035	3,9796001.0
DAUKNI.....	110 53 41,884	5,0821490.4	IWJE.....	162 49 33,741	5,0821489.8
Somme	180 0 15,471		Somme	180 0 3,024	
R* V. 20	3 47 31,432		R* V. 19	9 7 41,024	
R =	10 27 52,056		R =	10 27 52,059	
lg r* = 5,0821490.1					
R* = 10° 27' 52",058.					
V. 22. LOITZI. Tr. No. 97, p. 205.					
LOITZI.....	29° 57' 44",079	5,0593623.8	LOITZI.....	21° 30' 11",009	5,0821490.1
BELIN..... +	4 47 15,030	4,2822836.7	BELIN..... -	1 53 5,596	4,0350015.0
DAUKNI.....	145 15 12,924	5,1167484.5	WIDNOPOL.....	156 36 48,393	5,1167484.5
Somme	180 0 12,033		Somme	180 0 4,998	
R* V. 20	3 47 31,432		R* V. 21	10 27 52,058	
R =	8 34 46,462		R =	8 34 46,462	
lg r* = 5,1167484.5					
R* = 8° 34' 46",462.					
V. 23. TUPISCHKI. Tr. No. 98, p. 205.					
TUPISCHKI.....	84° 6' 3",947	5,1167484.5	TUPISCHKI.....	18° 26' 32",701	5,0821490.1
BELIN..... +	3 34 16,540	3,9133569.2	BELIN..... +	1 41 10,943	4,0506500.0
LOITZI.....	92 19 49,809	5,1186959.2	WIDNOPOL.....	159 52 20,847	5,1186959.6
Somme	180 0 10,296		Somme	180 0 4,491	
R* V. 22	8 34 46,462		R* V. 21	10 27 52,058	
R =	12 9 3,002		R =	12 9 3,001	
lg r* = 5,1186959.4					
R* = 12° 9' 3",002.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
V. 24. DEIDISSI. Tr. No. 99, p. 205.					
DEIDISSI	9° 29' 34,306	5,1167484.5	DEIDISSI	25° 42' 10,083	5,1186959.4
BELIN	0 56 56,699	4,1185101.6	BELIN	2 37 19,840	4,1417760.1
LOITZI	169 33 31,989	5,1577045.2	TUPISCHKI	151 40 38,387	5,1577044.7
Somme	180 0 2,994		Somme	180 0 8,310	
<i>R</i> * V. 22	8 34 46,462		<i>R</i> * V. 23	12 9 3,002	
<i>R</i> =	9 31 43,161		<i>R</i> =	9 31 43,162	
<i>lg r</i> * = 5,1577045.0					
<i>R</i> * = 9° 31' 43,162.					

V. 25. MEDNIKI. Tr. No. 100, p. 205.					
MEDNIKI	30° 25' 11,112	5,1167484.5	MEDNIKI	94° 8' 27,008	5,1577045.0
BELIN	3 5 51,163	4,1448831.6	BELIN	4 2 47,860	4,0073104.3
LOITZI	146 29 7,421	5,1543924.4	DEIDISSI	81 48 59,046	5,1543924.4
Somme	180 0 9,696		Somme	180 0 13,914	
<i>R</i> * V. 22	8 34 46,462		<i>R</i> * V. 24	9 31 43,162	
<i>R</i> =	5 28 55,299		<i>R</i> =	5 28 55,302	
<i>lg r</i> * = 5,1543924.4					
<i>R</i> * = 5° 28' 55,300.					

V. 26. KONRADI. Tr. No. 101, p. 205.					
KONRADI	17° 28' 38,720	5,1543924.4	KONRADI	36° 29' 46,237	5,1577045.0
BELIN	1 17 58,537	4,0323050.1	BELIN	2 44 49,325	4,0637926.3
MEDNIKI	161 13 27,498	5,1844867.8	DEIDISSI	140 45 34,566	5,1844867.6
Somme	180 0 4,755		Somme	180 0 10,128	
<i>R</i> * V. 25	5 28 55,300		<i>R</i> * V. 24	9 31 43,162	
<i>R</i> =	6 46 53,837		<i>R</i> =	6 46 53,837	
<i>lg r</i> * = 5,1844867.7					
<i>R</i> * = 6° 46' 53,837.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
V. 27. BERESNÄKI. Tr. No. 102, p. 206.					
BERESNÄKI.....	51° 7' 12,515	5,1543924.4	BERESNÄKI.....	112° 22' 58,596	5,1844867.7
BELIN..... —	2 46 4,530	3,9468798.9	BELIN..... —	4 4 3,069	4,0691901.8
MEDNIKI.....	126 6 52,762	5,1704894.3	KONRADI.....	63 33 13,770	5,1704894.3
Somme	180 0 9,807		Somme	180 0 15,435	
R* V. 25	5 28 55,300		R* V. 26	6 46 53,837	
R =	2 42 50,770		R =	2 42 50,768	
lg r* = 5,1704894.3					
R* = 2° 42' 50,769.					
V. 28. CHORUNSCHISCHKI. Tr. No. 103, p. 206.					
CHORUNSCHISCHKI...	21° 52' 59,829	5,1704894.3	CHORUNSCHISCHKI...	31° 9' 54,955	5,1844867.7
BELIN..... +	2 6 11,198	4,1636055.8	BELIN..... —	1 57 51,871	4,0054363.9
BERESNÄKI.....	156 0 57,406	5,2081798.6	KONRADI.....	146 52 21,310	5,2081799.4
Somme	180 0 8,433		Somme	180 0 8,136	
R* V. 27	2 42 50,769		R* V. 26	6 46 53,837	
R =	4 49 1,967		R =	4 49 1,966	
lg r* = 5,2081799.0					
R* = 4° 49' 1,966.					
V. 29. NEMESCH. Tr. No. 104, p. 206.					
NEMESCH.....	140° 59' 38,083	5,2081799.0	NEMESCH.....	102° 55' 40,876	5,1844867.7
BELIN..... —	3 33 3,512	4,2010238.4	BELIN..... —	5 30 55,381	4,1782631.9
CHORUNSCHISCHKI...	35 27 32,715	5,1727435.4	KONRADI.....	71 33 44,770	5,1727436.1
Somme	180 0 14,310		Somme	180 0 21,027	
R* V. 28	4 49 1,966		R* V. 26	6 46 53,837	
R =	1 15 58,454		R =	1 15 58,456	
lg r* = 5,1727435.8 = r'', § 63.					
R* = 1° 15' 58,455 = 2'', § 63.					
p. 243. Az. VI. 3.	40 21 12,940		p. 243. Az. VI. 4.	78 25 10,150	
Q =	181 20 51,023		Q =	181 20 51,026	
Q* = 181° 20' 51,024 = 2'', § 63.					

§ 50. Triangles polaires et coordonnées polaires.

DEPUIS

NEMESCH JUSQU'A JACOBSTADT.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VI. 1. NEMESCH = E. Point initial.					
VI. 2. NABOROWTSCHISNA. p. 243. $\lg r = 4,2399872.2$ $R = 280^{\circ} 23' 41,080.$					
VI. 3. MESCHKANZI. p. 243. $\lg r = 4,2048433.5$ $R = 359^{\circ} 59' 57,070.$					
VI. 4. KONGEDI. Tr. No. 107, p. 206.					
KONGEDI.....	32 40' 19,016	4,2399872.2	KONGEDI.....	26° 1' 57,586	4,2048433.5
NEMESCH..... +	45 52 18,397	4,3637265.4	NEMESCH..... —	33 43 57,624	4,3070375.1
NABOROWTSCHISNA...	101 27 26,370	4,4989946.3	MESCHKANZI.....	120 14 7,490	4,4989945.8
Somme	180 0 3,783		Somme	180 0 2,700	
R VI. 2	280 23 41,080		R VI. 3	359 59 57,070	
$R =$	326 15 59,477		$R =$	326 15 59,446	
$\lg r^* = 4,4989946.0$ $R^* = 326^{\circ} 15' 59,462.$					
VI. 5. AMBROSCHISCHKI. Tr. No. 108, p. 206.					
AMBROSCHISCHKI....	84° 54' 50,961	4,4989946.0	AMBROSCHISCHKI....	0° 54' 44,491	4,2048433.5
NEMESCH..... +	33 3 8,289	4,2374217.5	NEMESCH..... —	0 40 49,330	4,0774301.3
KONGEDI.....	62 2 5,376	4,4467815.0	MESCHKANZI.....	178 24 26,230	4,4467815.5
Somme	180 0 4,626		Somme	180 0 0,051	
R^* VI. 4	326 15 59,462		R VI. 3	359 59 57,070	
$R =$	359 19 7,751		$R =$	359 19 7,740	
$\lg r^* = 4,4467815.2$ $R^* = 359^{\circ} 19' 7,746.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VI. 6. BOLNIKI. Tr. No. 109, p. 207.					
BOLNIKI	59° 21' 56",657	4,4989946.0	BOLNIKI	23° 4' 17",862	4,4467815.2
NEMESCH +	25 21 46,490	4,1960693.6	NEMESCH —	7 41 21,801	3,9800867.3
KONGEDI	95 16 21,596	4,5624360.7	AMBROSCHISCHKI	149 14 21,651	4,5624359.6
Somme	180 0 4,743		Somme	180 0 1,314	
R* VI. 4	326 15 59,462		R* VI. 5	359 19 7,746	
R =	351 37 45,952		R =	351 37 45,945	
lg r* = 4,5624360.2					
R* = 351° 37' 45",948.					
VI. 7. TSCHIWILI. Tr. No. 110, p. 207.					
TSCHIWILI	71° 20' 16",574	4,5624360.2	TSCHIWILI	20° 9' 1",205	4,4467815.2
NEMESCH +	15 49 53,198	4,0217417.4	NEMESCH +	8 8 31,403	4,0607562.2
BOLNIKI	92 49 53,912	4,5853627.9	AMBROSCHISCHKI	151 42 28,859	4,5853627.5
Somme	180 0 3,684		Somme	180 0 1,467	
R* VI. 6	351 37 45,948		R* VI. 5	359 19 7,746	
R =	7 27 39,146		R =	7 27 39,149	
lg r* = 4,5853627.7					
R* = 7° 27' 39",148.					
VI. 8. STWORÄNZI. Tr. No. 111, p. 207.					
STWORÄNZI	5° 59' 25",250	4,5624360.2	STWORÄNZI	40° 29' 55",898	4,5853627.7
NEMESCH +	1 55 38,388	4,0706415.4	NEMESCH —	13 54 14,812	4,1535695.7
BOLNIKI	172 4 56,932	4,6829881.8	TSCHIWILI	125 35 53,574	4,6829881.8
Somme	180 0 0,570		Somme	180 0 4,284	
R* VI. 6	351 37 45,948		R* VI. 7	7 27 39,148	
R =	353 33 24,336		R =	353 33 24,336	
lg r* = 4,6829881.8					
R* = 353° 33' 24",336.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VI. 9. LIPSK. Tr. No. 112, p. 207.					
LIPSK.....	67° 8' 23",411	4,6829881.8	LIPSK.....	13° 46' 1",241	4,5853627.7
NEMESCH..... →	9 20 46,486	3,9290853.8	NEMESCH..... —	4 33 28,329	4,1090049.2
STWORÄNZI.....	103 30 53,928	4,7063197.5	TSCHIWILI.....	161 40 31,924	4,7063197.2
Somme	180 0 3,825		Somme	180 0 1,494	
R* VI. 8	353 33 24,336		R* VI. 7	7 27 39,148	
R =	2 54 10,822		R =	2 54 10,819	
lg r* = 4,7063197.4					
R* = 2° 54' 10",820.					

VI. 10. KINDERTI. Tr. No. 113, p. 207.					
KINDERTI.....	1° 23' 43",564	4,6829881.8	KINDERTI.....	28° 43' 37",544	4,7063197.4
NEMESCH..... →	0 28 26,653	4,2139761.9	NEMESCH..... —	8 52 19,811	4,2126559.6
STWORÄNZI.....	178 7 47,978	4,8099247.3	LIPSK.....	142 24 7,511	4,8099247.1
Somme	180 0 0,195		Somme	180 0 4,866	
R* VI. 8	353 33 24,336		R* VI. 9	2 54 10,820	
R =	354 1 50,989		R =	354 1 51,009	
lg r* = 4,8099247.2					
R* = 354° 1' 50",989.					

VI. 11. MARTINTSCHUNI. Tr. No. 114, p. 207.					
MARTINTSCHUNI....	90° 29' 52",808	4,8099247.2	MARTINTSCHUNI....	25° 30' 27",160	4,7063197.4
NEMESCH..... →	15 7 53,466	4,2266146.2	NEMESCH..... →	6 15 33,653	4,1097414.7
KINDERTI.....	74 22 23,794	4,7935820.9	LIPSK.....	148 14 2,499	4,7935820.8
Somme	180 0 10,068		Somme	180 0 3,312	
R* VI. 10	354 1 50,999		R* VI. 9	2 54 10,820	
R =	9 9 44,465		R =	9 9 44,473	
lg r* = 4,7935820.8					
R* = 9° 9' 44",469.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VI. 12. KARISCHKI. Tr. No. 115, p. 207.					
KARISCHKI.....	52° 13' 27,572	4,8099247.2	KARISCHKI.....	33° 52' 39,534	4,7935820.8
NEMESCH..... +	9 3 16,577	4,1089801.2	NEMESCH..... -	6 4 36,888	4,0721192.5
KINDERTI.....	118 43 22,844	4,8550524.1	MARTINTSCHUNI....	140 2 48,108	4,8550523.8
Somme	180 0 6,993		Somme	180 0 4,530	
R° VI. 10	354 1 50,999		R° VI. 11	9 9 44,469	
R =	3 5 7,576		R =	3 5 7,581	
$lgr^* = 4,8550524.0$					
$R^* = 3^\circ 5' 7,578.$					
VI. 13. JAKSCHTI. Tr. No. 116, p. 208.					
JAKSCHTI.....	12° 11' 55,608	4,8099247.2	JAKSCHTI.....	75° 26' 26,461	4,8550524.0
NEMESCH..... +	1 42 21,044	3,9587424.6	NEMESCH..... -	7 20 55,529	3,9760933.2
KINDERTI.....	166 5 44,704	4,8657791.2	KARISCHKI.....	97 12 44,472	4,8657791.7
Somme	180 0 1,356		Somme	180 0 6,462	
R° VI. 10	354 1 50,999		R° VI. 12	3 5 7,578	
R =	355 44 12,043		R =	355 44 12,049	
$lgr^* = 4,8657791.4$					
$R^* = 355^\circ 44' 12,046.$					
VI. 14. PONEDELI. Tr. No. 117, p. 208.					
PONEDELI.....	26° 27' 32,986	4,8657791.4	PONEDELI.....	41° 14' 58,244	4,8550524.0
NEMESCH..... +	2 6 22,496	3,7821262.3	NEMESCH..... -	5 14 33,040	3,9967199.3
JAKSCHTI.....	151 26 6,561	4,8964456.0	KARISCHKI.....	133 30 33,672	4,8964455.0
Somme	180 0 2,043		Somme	180 0 4,956	
R° VI. 13	355 44 12,046		R° VI. 12	3 5 7,578	
R =	357 50 34,542		R =	357 50 34,538	
$lgr^* = 4,8964455.5$					
$R^* = 357^\circ 50' 34,540.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VI. 15. CHANUSCHISCHKI. Tr. No. 118, p. 208.					
CHANUSCHISCHKI	50° 55' 2",083	4,8964455.5	CHANUSCHISCHKI	7° 23' 45",806	4,8550524.0
NEMESCH +	6 42 33,034	4,0739643.1	NEMESCH +	1 27 59,997	4,1535094.9
PONEDELI	122 22 32,464	4,9330873.7	KARISCHKI	171 8 15,706	4,9330874.0
Somme	180 0 7,581		Somme	180 0 1,509	
R* VI. 14	357 50 34,540		R* VI. 12	3 5 7,578	
R =	4 33 7,574		R =	4 33 7,575	
$\lg r^* = 4,9330873.8$ $R^* = 4^\circ 33' 7,574.$					
VI. 16. PILKALN. Tr. No. 119, p. 208.					
PILKALN	9° 3' 42",450	4,8964455.5	PILKALN	73° 52' 40",126	4,9330873.8
NEMESCH —	1 6 17,041	3,9842330.8	NEMESCH —	7 48 50,079	4,0838625.5
PONEDELI	169 50 1,796	4,9459303.6	CHANUSCHISCHKI	98 18 39,683	4,9459303.2
Somme	180 0 1,287		Somme	180 0 9,888	
R* VI. 14	357 50 34,540		R* VI. 15	4 33 7,574	
R =	356 44 17,499		R =	356 44 17,495	
$\lg r^* = 4,9459303.4$ $R^* = 356^\circ 44' 17,497.$					
VI. 17. URMEN. Tr. No. 120, p. 208.					
URMEN	68° 59' 0",330	4,9459303.4	URMEN	1° 59' 13",035	4,9330873.8
NEMESCH +	7 40 3,300	4,1010141.8	NEMESCH —	0 8 46,777	3,8002604.0
PILKALN	103 21 6,786	4,9639309.0	CHANUSCHISCHKI	177 52 0,383	4,9639308.7
Somme	180 0 10,416		Somme	180 0 0,195	
R* VI. 16	356 44 17,497		R* VI. 15	4 33 7,574	
R =	4 24 20,797		R =	4 24 20,797	
$\lg r^* = 4,9639308.8$ $R^* = 4^\circ 24' 20,797.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VI. 18. DAUDSEWAS. Tr. No. 121, p. 208.					
DAUDSEWAS.....	8° 27' 4",340	4,9459303.4	DAUDSEWAS.....	37° 40' 54",192	4,9639308.8
NEMESCH..... +	1 32 21,460	4,2078062.0	NEMESCH..... —	6 7 41,845	4,2060275.0
PILKALN.....	170 0 36,576	5,0179641.5	URMEN.....	136 11 33,800	5,0179641.6
Somme	180 0 2,376		Somme	180 0 9,837	
R* VI. 16	356 44 17,497		R* VI. 17	4 24 20,797	
R =	358 16 38,957		R =	358 16 38,952	
lg r* = 5,0179641.6					
R* = 358° 16' 38",954.					
VI. 19. ARBIDÄNI. Tr. No. 122, p. 208.					
ARBIDÄNI.....	82° 18' 23",068	5,0179641.6	ARBIDÄNI.....	6° 51' 54",283	4,9639308.8
NEMESCH..... +	7 6 50,311	4,1146924.5	NEMESCH..... +	0 59 8,466	4,1219857.5
DAUDSEWAS.....	90 34 59,662	5,0218701.6	URMEN.....	172 8 58,850	5,0218701.6
Somme	180 0 13,041		Somme	180 0 1,599	
R* VI. 18	358 16 38,954		R* VI. 17	4 24 20,797	
R =	5 23 29,265		R =	5 23 29,263	
lg r* = 5,0218701.6					
R* = 5° 23' 29",264.					
VI. 20. BRISTEN. Tr. No. 123, p. 209.					
BRISTEN.....	35° 31' 56",190	5,0179641.6	BRISTEN.....	57° 24' 29",036	5,0218701.6
NEMESCH..... +	2 25 34,595	3,8802823.8	NEMESCH..... —	4 41 15,714	4,0085642.1
DAUDSEWAS.....	142 2 33,892	5,0426031.0	ARBIDÄNI.....	117 54 24,358	5,0426031.1
Somme	180 0 4,677		Somme	180 0 9,108	
R* VI. 18	358 16 38,954		R* VI. 19	5 23 29,264	
R =	0 42 13,549		R =	0 42 13,550	
lg r* = 5,0426031.0					
R* = 0° 42' 13",550.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VI. 21. DABORS-KALNS. Tr. No. 124, p. 209.					
DABORS-KALNS.....	82° 50' 21",888	5,0426031.0	DABORS-KALNS.....	12° 32' 17",315	5,0218701.6
NEMESCH..... +	5 24 38,539	4,0204079.3	NEMESCH..... +	0 43 22,829	3,7861660.4
BRISTEN.....	91 45 10,676	5,0458015.6	ARBIDÄNI.....	166 44 21,272	5,0458015.6
Somme	180 0 11,103		Somme	180 0 1,416	
<i>R</i> * VI. 20	0 42 13,550		<i>R</i> * VI. 19	5 23 29,264	
<i>R</i> =	6 6 52,089		<i>R</i> =	6 6 52,093	
<i>lgr</i> * = 5,0458015.6			<i>R</i> * = 6° 6' 52",091.		
VI. 22. KREUTZBURG. Tr. No. 125, p. 209.					
KREUTZBURG.....	118° 50' 58",055	5,0458015.6	KREUTZBURG.....	67° 55' 1",991	5,0218701.6
NEMESCH..... +	3 1 48,751	3,8264161.3	NEMESCH..... +	3 45 11,582	3,8708545.2
DABORS-KALNS.....	58 7 19,275	5,0323438.2	ARBIDÄNI.....	108 19 53,552	5,0323437.2
Somme	180 0 6,081		Somme	180 0 7,125	
<i>R</i> * VI. 21	6 6 52,091		<i>R</i> * VI. 19	5 23 29,264	
<i>R</i> =	9 8 40,842		<i>R</i> =	9 8 40,846	
<i>lgr</i> * = 5,0323437.7			<i>R</i> * = 9° 8' 40",844.		
VI. 23. JACOBSTADT. Tr. No. 126, p. 209.					
JACOBSTADT.....	122° 45' 56",822	5,0458015.6	JACOBSTADT.....	176° 39' 21",292	5,0323437.7
NEMESCH..... +	3 2 52,357	3,8466493.6	NEMESCH..... +	0 1 3,606	2,7554339.9
DABORS-KALNS.....	54 11 16,905	5,0300461.3	KREUTZBURG.....	3 19 35,135	5,0300460.8
Somme	180 0 6,084		Somme	180 0 0,033	
<i>R</i> * VI. 21	6 6 52,091		<i>R</i> * VI. 22	9 8 40,844	
<i>R</i> =	9 9 44,448		<i>R</i> =	9 9 44,450	
<i>lgr</i> * = 5,0300461.0 = <i>r</i> '', § 63.			<i>R</i> * = 9° 9' 44",449 = <i>R</i> '', § 63.		
p. 243. Az. VII. 1.	312 22 2,350		p. 243. Az. VII. 2.	6 15 26,820	
<i>Q</i> =	189 36 5,528		<i>Q</i> =	189 36 5,528	
<i>Q</i> * = 189° 36' 5",528 = <i>B</i> '', § 63.					

§ 60. Triangles polaires et coordonnées polaires,

DEPUIS

DORPAT JUSQU'À JACOBSTADT.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VII. 1. DORPAT = E. Point initial.					
VII. 2. KERSEL. p. 243. $\lg r = 4,2389990.6$ $R = 337^{\circ} 36' 39''550.$					
VII. 3. ARROHOF. p. 243. $\lg r = 4,0724390.0$ $R = 241^{\circ} 38' 12''600.$					
VII. 4. OBERPAHLEN. Tr. No. 144, p. 212.					
OBERPAHLEN.....	35°52'40"848	4,2389990.6	OBERPAHLEN.....	25°29'7"223	4,0724390.0
DORPAT..... —	32 15 42,211	4,1984240.3	DORPAT..... +	63 42 44,740	4,3912810.8
KERSEL.....	111 51 39,380	4,4386492.3	ARROHOF.....	90 48 10,830	4,4386491.7
Somme	180 0 2,439		Somme	180 0 2,793	
R VII. 2	337 36 39,550		R VII. 3	241 38 12,600	
R =	305 20 57,339		R =	305 20 57,340	
$\lg r^* = 4,4386492.0$ $R^* = 305^{\circ} 20' 57''340.$					
VII. 5. HOLSTFERSHOF. Tr. No. 143, p. 211.					
HOLSTFERSHOF.....	60°50'43"365	4,4386492.0	HOLSTFERSHOF.....	11°35'36"528	4,0724390.0
DORPAT..... —	44 12 51,925	4,3409278.9	DORPAT..... +	19 29 52,791	4,2927696.6
OBERPAHLEN.....	74 56 30,293	4,4823080.1	ARROHOF.....	148 54 31,830	4,4823080.5
Somme	180 0 5,583		Somme	180 0 1,149	
R* VII. 4	305 20 57,340		R VII. 3	241 38 12,600	
R =	261 8 5,415		R =	261 8 5,391	
$\lg r^* = 4,4823080.3$ $R^* = 261^{\circ} 8' 5''403.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VII. 6. ANNIKATZ. Tr. No. 142, p. 211.					
ANNIKATZ.....	71° 3' 28,964	4,4823080.3	ANNIKATZ.....	2° 13' 2,254	4,0724390.0
DORPAT..... —	15 41 29,774	3,9385829.7	DORPAT..... —	3 48 23,036	4,3069209.8
HOLSTFERSHOF.....	93 15 3,788	4,5057878.8	ARROHOF.....	173 58 34,950	4,5057879.6
Somme	180 0 2,526		Somme	180 0 0,240	
R* VII. 5	261 8 5,403		R* VII. 3	241 38 12,600	
R =	245 26 35,629		R̄ =	245 26 35,636	
$\lg r^* = 4,5057879.2$ $R^* = 245^\circ 26' 35,632.$					
VII. 7. ARROL. Tr. No. 141, p. 211.					
ARROL.....	104° 53' 22,393	4,5057879.2	ARROL.....	25° 45' 21,054	4,0724390.0
DORPAT..... —	32 58 3,379	4,2563463.9	DORPAT..... —	29 9 40,366	4,1221805.2
ANNIKATZ.....	42 8 37,954	4,3473361.9	ARROHOF.....	125 4 59,810	4,3473361.8
Somme	180 0 3,726		Somme	180 0 1,230	
R* VII. 6	245 26 35,632		R* VII. 3	241 38 12,600	
R =	212 28 32,253		R̄ =	212 28 32,234	
$\lg r^* = 4,3473361.8$ $R^* = 212^\circ 28' 32,244.$					
VII. 8. HELMET. Tr. No. 140, p. 211.					
HELMET.....	73° 12' 19,124	4,5057879.2	HELMET.....	28° 3' 39,682	4,3473361.8
DORPAT..... —	15 59 4,720	3,9646444.7	DORPAT..... —	16 58 58,663	4,1403687.2
ANNIKATZ.....	90 48 38,994	4,5246760.2	ARROL.....	134 57 23,743	4,5246760.5
Somme	180 0 2,838		Somme	180 0 2,088	
R* VII. 6	245 26 35,632		R* VII. 7	212 28 32,244	
R =	229 27 30,912		R̄ =	229 27 30,907	
$\lg r^* = 4,5246760.4$ $R^* = 229^\circ 27' 30,910.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VII. 9. LENARD. Tr. No. 139, p. 211.					
LENARD	112° 51' 45",298	4,5246760.4	LENARD	39° 30' 29",741	4,3473361.8
DORPAT	— 23 23 7,584	4,1589002.8	DORPAT	— 6 24 8,922	3,5910676.7
HELMET	43 45 10,322	4,4000290.6	ARROL	134 5 21,937	4,4000291.4
Somme	180 0 3,204		Somme	180 0 0,600	
R* VII. 8	229 27 30,910		R* VII. 7	212 28 32,244	
R =	206 4 23,326		R =	206 4 23,322	
$\lg r^* = 4,4000291.0$			$R^* = 206^\circ 4' 23,324.$		

VII. 10. HUMMELSHOF. Tr. No. 138, p. 211.					
HUMMELSHOF	68° 56' 42",850	4,5246760.4	HUMMELSHOF	24° 9' 57",124	4,4000291.0
DORPAT	— 12 16 0,999	3,8819675.2	DORPAT	+ 11 7 6,588	4,0730938.6
HELMET	98 47 18,572	4,5495556.3	LENARD	144 42 57,938	4,5495556.0
Somme	180 0 2,421		Somme	180 0 1,650	
R* VII. 8	229 27 30,910		R* VII. 9	206 4 23,324	
R =	217 11 29,911		R =	217 11 29,912	
$\lg r^* = 4,5495556.2$			$R^* = 217^\circ 11' 29,912.$		

VII. 11. MARIO-MÄGGI. Tr. No. 137, p. 211.					
MARIO-MÄGGI	52° 24' 14",687	4,5495556.2	MARIO-MÄGGI	16° 21' 31",300	4,4000291.0
DORPAT	— 23 55 37,812	4,2587129.4	DORPAT	— 12 48 31,243	4,2960763.2
HUMMELSHOF	103 40 13,504	4,6381714.8	LENARD	150 49 59,782	4,6381714.8
Somme	180 0 6,003		Somme	180 0 2,325	
R* VII. 10	217 11 29,912		R* VII. 9	206 4 23,324	
R =	193 15 52,100		R =	193 15 52,081	
$\lg r^* = 4,6381714.8$			$R^* = 193^\circ 15' 52,090$		

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VII. 12. OPPEKALN. Tr. No. 136, p. 210.					
OPPEKALN.....	65° 13' 57,516	4,6381714.8	OPPEKALN.....	27° 7' 22,248	4,4000291.0
DORPAT..... —	20 2 53,022	4,2151182.1	DORPAT..... —	32 51 24,286	4,4755934.7
MARIO-MÄGGI.....	94 43 16,290	4,6786043.6	LENARD.....	120 1 19,712	4,6786044.3
Somme	180 0 6,828		Somme	180 0 6,246	
R° VII. 11	193 15 52,090		R° VII. 9	206 4 23,324	
R =	173 12 59,068		R =	173 12 59,038	
$\lg r^* = 4,6786044.0$ $R^* = 173^\circ 12' 59,053.$					

VII. 13. PALZMAR. Tr. No. 135, p. 210.					
PALZMAR.....	13° 23' 4,929	4,6381714.8	PALZMAR.....	59° 43' 59,538	4,6786044.0
DORPAT..... +	3 36 22,511	4,0722778.2	DORPAT..... +	23 39 15,535	4,3456154.6
MARIO-MÄGGI.....	163 0 34,000	4,7393513.9	OPPEKALN.....	96 36 55,016	4,7393513.8
Somme	180 0 1,440		Somme	180 0 10,089	
R° VII. 11	193 15 52,090		R° VII. 12	173 12 59,053	
R =	196 52 14,601		R =	196 52 14,588	
$\lg r^* = 4,7393513.8$ $R^* = 196^\circ 52' 14,594.$					

VII. 14. KORTENHOF. Tr. No. 134, p. 210.					
KORTENHOF.....	59° 2' 51,312	4,7393513.8	KORTENHOF.....	16° 10' 25,684	4,6786044.0
DORPAT..... —	18 26 20,643	4,3061453.9	DORPAT..... +	5 12 54,891	4,1922368.2
PALZMAR.....	102 30 58,458	4,7956295.0	OPPEKALN.....	158 36 42,026	4,7956294.0
Somme	180 0 10,413		Somme	180 0 2,601	
R° VII. 13	196 52 14,594		R° VII. 12	173 12 59,053	
R =	178 25 53,951		R =	178 25 53,944	
$\lg r^* = 4,7956294.5$ $R^* = 178^\circ 25' 53,948.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VII. 15. RAMKAU. Tr. No. 133, p. 210.					
RAMKAU.....	8° 10' 18,622	4,7393513.8	RAMKAU.....	57° 28' 4,223	4,7956294.5
DORPAT..... —	2 25 51,387	4,2141305.1	DORPAT..... +	16 0 29,276	4,3102851.2
PALZMAR.....	169 23 51,578	4,8514389.9	KORTENHOF.....	106 31 38,252	4,8514390.0
Somme	180 0 1,587		Somme	180 0 11,751	
R* VII. 13	196 52 14,594		R* VII. 14	178 25 53,948	
R =	194 26 23,207		R =	194 26 23,224	
lg r* = 4,8514390.0					
R* = 194° 26' 23,216.					

VII. 16. NESSAULE-KALNS. Tr. No. 132, p. 210.					
NESSAULE-KALNS...	16° 20' 58,232	4,8514390.0	NESSAULE-KALNS...	33° 7' 49,730	4,7956294.5
DORPAT..... —	2 46 59,944	4,0882031.4	DORPAT..... +	13 13 29,320	4,4173835.9
RAMKAU.....	160 52 4,563	4,9175171.6	KORTENHOF.....	133 38 52,302	4,9175172.8
Somme	180 0 2,739		Somme	180 0 11,352	
R* VII. 15	194 26 23,216		R* VII. 14	178 25 53,948	
R =	191 39 23,272		R =	191 39 23,268	
lg r* = 4,9175172.2					
R* = 191° 39' 23,270.					

VII. 17. ELKAS-KALNS. Tr. No. 131, p. 210.					
ELKAS-KALNS.....	48° 39' 43,353	4,8514390.0	ELKAS-KALNS.....	86° 2' 38,925	4,9175172.2
DORPAT..... +	11 2 4,655	4,2578144.9	DORPAT..... +	13 49 4,608	4,2966124.9
RAMKAU.....	120 18 22,657	4,9120921.8	NESSAULE-KALNS...	80 8 31,962	4,9120921.7
Somme	180 0 10,665		Somme	180 0 15,495	
R* VII. 15	194 26 23,216		R* VII. 16	191 39 23,270	
R =	205 28 27,871		R =	205 28 27,878	
lg r* = 4,9120921.8					
R* = 205° 28' 27,874.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VII. 18. GAISSA-KALNS. Tr. No. 130, p. 210.					
GAISSA-KALNS	57° 58' 46",819	4,9120921.8	GAISSA-KALNS	38° 54' 50",378	4,9175172.2
DORPAT —	10 0 55,182	4,2240536.4	DORPAT +	3 48 9,424	3,9410471.8
ELKAS-KALNS	112 0 30,185	4,9509170.1	NESSAULE-KALNS	137 17 4,902	4,9509169.7
Somme	180 0 12,186		Somme	180 0 4,704	
<i>R</i> * VII. 17	205 28 27,874		<i>R</i> * VII. 16	191 39 23,270	
<i>R</i> =	195 27 32,692		<i>R</i> =	195 27 32,694	
<i>lgr</i> * = 4,9509169.9					
<i>R</i> * = 195° 27' 32",693.					
VII. 19. SESTU-KALNS. Tr. No. 129, p. 209.					
SESTU-KALNS	26° 5' 42",158	4,9120921.8	SESTU-KALNS	59° 59' 33",303	4,9509169.9
DORPAT —	4 18 59,107	4,1453226.2	DORPAT +	5 41 56,085	4,0103186.6
ELKAS-KALNS	149 35 24,285	4,9730984.3	GAISSA-KALNS	114 18 38,619	4,9730984.1
Somme	180 0 5,550		Somme	180 0 8,007	
<i>R</i> * VII. 17	205 28 27,874		<i>R</i> * VII. 18	195 27 32,693	
<i>R</i> =	201 9 28,767		<i>R</i> =	201 9 28,778	
<i>lgr</i> * = 4,9730984.2					
<i>R</i> * = 201° 9' 28",772.					
VII. 20. DADORS-KALNS. Tr. No. 128, p. 209.					
DADORS-KALNS	23° 26' 55",341	4,9730984.2	DADORS-KALNS	10° 22' 51",355	4,9509169.9
DORPAT —	3 34 29,215	4,1680810.9	DORPAT +	2 7 26,867	4,2640892.9
SESTU-KALNS	152 58 41,483	5,0306832.2	GAISSA-KALNS	167 29 45,189	5,0306832.0
Somme	180 0 6,039		Somme	180 0 3,411	
<i>R</i> * VII. 19	201 9 28,772		<i>R</i> * VII. 18	195 27 32,693	
<i>R</i> =	197 34 59,557		<i>R</i> =	197 34 59,560	
<i>lgr</i> * = 5,0306832.1					
<i>R</i> * = 197° 34' 59",558.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VII. 21. KREUTZBURG. Tr. No. 127, p. 209.					
KREUTZBURG	65° 10' 13",644	5,0306832.1	KREUTZBURG	4° 51' 28",642	4,9509169.9
DORPAT —	3 15 4,270	3,8264161.3	DORPAT —	1 7 37,404	4,3168506.5
DABORS-KALNS	111 34 48,515	5,0412493.5	GAISSA-KALNS	174 0 55,811	5,0412493.1
Somme	180 0 6,429		Somme	180 0 1,857	
$R^* \text{ VII. 20}$	197 34 59,558		$R^* \text{ VII. 18}$	195 27 32,693	
$R =$	194 19 55,288		$R =$	194 19 55,289	
$\lg r^* = 5,0412493 \ 3$					
$R^* = 194^\circ 19' 55",288.$					
VII. 22. JACOBSTADT. Tr. No. 126, p. 209.					
JACOBSTADT	61° 11' 55",481	5,0306832.1	JACOBSTADT	7° 18' 31",010	5,0412493.3
DORPAT —	3 17 20,171	3,8466493.6	DORPAT —	0 2 15,902	2,7554339.9
DABORS-KALNS	115 30 50,885	5,0434741.4	KREUTZBURG	172 39 13,166	5,0434741.2
Somme	180 0 6,537		Somme	180 0 0,078	
$R^* \text{ VII. 20}$	197 34 59,558		$R^* \text{ VII. 21}$	194 19 55,288	
$R =$	194 17 39,387		$R =$	194 17 39,386	
$\lg r^* = 5,0434741.3 = r''', \ S \ 63.$					
$R^* = 194^\circ 17' 39",386 = B''', \ S \ 63.$					
p. 243. Az. VII. 1.	312 22 2,350		p. 243. Az. VII. 2.	6 15 26,820	
$Q =$	13 33 57,831		$\Omega =$	13 33 57,830	
$Q^* = 13^\circ 33' 57",830 = \alpha''', \ S \ 63.$					

§ 61. Triangles polaires et coordonnées polaires.

DEPUIS

DORPAT JUSQU'A MÄKI-PÄÄLYS.

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VIII. 1. DORPAT = E. Point initial.					
VIII. 2. KERSEL. p. 243. $\lg r = 4,2389990.6$ $R = 337^{\circ} 36' 39,550.$					
VIII. 3. АННОПОВ. p. 243. $\lg r = 4,0724390.0$ $R = 241^{\circ} 38' 12,600.$					
VIII. 4. OBERPAULEN. Tr. No. 144, p. 212.					
OBERPAULEN	25° 29' 7,223	4,0724390.0	OBERPAULEN	35° 52' 40,848	4,2389990.6
DORPAT →	63 42 44,740	4,3912810.8	DORPAT —	32 15 42,211	4,1984240.3
АННОПОВ	90 48 10,830	4,4386491.7	KERSEL	111 51 39,380	4,4386492.4
Somme	180 0 2,793		Somme	180 0 2,439	
R VIII. 3	241 38 12,600		R VIII. 2	337 36 39,550	
R =	305 20 57,340		R =	305 20 57,339	
$\lg r^* = 4,4386492.0$ $R^* = 305^{\circ} 20' 57,340.$					
VIII. 5. SALL. Tr. No. 146, p. 212.					
SALL	54° 53' 4,780	4,4386492.0	SALL	4° 56' 2,893	4,2389990.6
DORPAT →	36 54 29,235	4,3044330.5	DORPAT →	4 38 47,000	4,2129639.7
OBERPAULEN	88 12 31,298	4,5256883.5	KERSEL	170 25 10,560	4,5256883.6
Somme	180 0 5,313		Somme	180 0 0,453	
R VIII. 4	305 20 57,340		R VIII. 2	337 36 39,550	
R =	342 15 26,575		R =	342 15 26,550	
$\lg r^* = 4,5256883.6$ $R^* = 342^{\circ} 15' 26,562.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VIII. 6. MARIEN-MAGDALENE. Tr. No. 147, p. 212.					
MARIEN-MAGD	37° 49' 0,734	4,4386492.0	MARIEN-MAGD	49° 48' 7,815	4,5256883.6
DORPAT +	23 23 37,995	4,2499319.6	DORPAT —	13 30 51,230	4,0113244.4
ODERPAHLEN	118 47 25,378	4,5937912.8	SALL	116 41 3,910	4,5937912.6
Somme	180 0 4,107		Somme	180 0 2,955	
R* VIII. 4	305 20 57,340		R* VIII. 5	342 15 26,562	
R =	328 44 35,335		R =	328 44 35,332	
$\lg r^* = 4,5937912.7$					
$R^* = 328^\circ 44' 35,334.$					
VIII. 7. EDDAFER. Tr. No. 148, p. 212.					
EDDAFER	55° 3' 46,612	4,5937912.7	EDDAFER	5° 33' 39,412	4,5256883.6
DORPAT +	11 46 17,457	3,9897334.1	DORPAT —	1 44 33,780	4,0223745.9
MARIEN-MAGD	113 9 59,315	4,6435840.2	SALL	172 41 47,240	4,6435839.7
Somme	180 0 3,384		Somme	180 0 0,432	
R* VIII. 6	328 44 35,334		R* VIII. 5	342 15 26,562	
R =	340 30 52,791		R =	340 30 52,782	
$\lg r^* = 4,6435840.0$					
$R^* = 340^\circ 30' 52,786.$					
VIII. 8. TAMMIK. Tr. No. 149, p. 212.					
TAMMIK	98° 26' 22,057	4,5937912.7	TAMMIK	169° 41' 26,331	4,6435840.0
DORPAT +	13 28 23,339	3,9658465.7	DORPAT +	1 42 5,893	3,8634889.3
MARIEN-MAGD	68 5 17,835	4,5659540.7	EDDAFER	8 36 28,238	4,5659541.0
Somme	180 0 3,231		Somme	180 0 0,462	
R* VIII. 6	328 44 35,334		R* VIII. 7	340 30 52,786	
R =	342 12 58,673		R =	342 12 58,679	
$\lg r^* = 4,5659540.8$					
$R^* = 342^\circ 12' 58,676.$					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VIII. 9. RÆKÜLL. Tr. No. 150, p. 212.					
RAEKÜLL.....	68° 27' 2",330	4,6435840.0	RAEKÜLL.....	19° 0' 32",914	4,5659540.8
DORPAT..... +	6 33 2,357	3,7322562.6	DORPAT..... +	4 50 56,462	3,9801149.7
EBBAFER.....	104 59 57,518	4,6599998.9	TAMMIK.....	156 8 31,989	4,6599998.2
Somme	180 0 2,205		Somme	180 0 1,365	
<i>R</i> * VIII. 7	340 30 52,786		<i>R</i> * VIII. 8	342 12 58,676	
<i>R</i> =	347 3 55,143		<i>R</i> =	347 3 55,138	
<i>lg r</i> * = 4,6599998.6					
<i>R</i> * = 347° 3' 55",140.					
VIII. 10. LEWALA. Tr. No. 151, p. 213.					
LEWALA.....	27° 1' 1",982	4,6435840.0	LEWALA.....	7° 16' 22",865	4,6599998.6
DORPAT..... +	5 31 26,711	3,9697334.7	DORPAT..... —	1 1 35,646	3,8108028.9
EDBAFER.....	147 27 33,428	4,7169870.1	RAEKÜLL.....	171 42 1,900	4,7169870.3
Somme	180 0 2,121		Somme	180 0 0,411	
<i>R</i> * VIII. 7	340 30 52,786		<i>R</i> * VIII. 9	347 3 55,140	
<i>R</i> =	346 2 19,497		<i>R</i> =	346 2 19,494	
<i>lg r</i> * = 4,7169870.2					
<i>R</i> * = 346° 2' 19",496.					
VIII. 11. WARRES-MÄGGI. Tr. No. 152, p. 213.					
WARRES-MÄGGI....	76° 38' 57",642	4,7169870.2	WARRES-MÄGGI....	37° 48' 6",716	4,6599998.6
DORPAT..... +	8 57 55,090	3,9215360.5	DORPAT..... +	7 56 19,441	4,0128117.1
LEWALA.....	94 23 11,435	4,7276121.3	RAEKÜLL.....	134 15 37,080	4,7276122.5
Somme	180 0 4,167		Somme	180 0 3,237	
<i>R</i> * VIII. 10	346 2 19,496		<i>R</i> * VIII. 9	347 3 55,140	
<i>R</i> =	355 0 14,586		<i>R</i> =	355 0 14,581	
<i>lg r</i> * = 4,7276121.9					
<i>R</i> * = 355° 0' 14",584.					

Stations.	Angles.	Log. des distances.	Stations.	Angles.	Log. des distances.
VIII. 12. HALLJALL. Tr. No. 153, p. 213.					
HALLJALL.....	8° 51' 20",799	4,7169870.2	HALLJALL.....	38° 12' 57",667	4,7276121.9
DORPAT..... +	1 37 58,625	3,9843876.6	DORPAT..... —	7 19 56,463	4,0420986.5
LEWALA.....	169 30 41,455	4,7897826.7	WARRES-MÄGGI....	134 27 9,902	4,7897825.9
Somme	180 0 0,879		Somme	180 0 4,032	
R* VIII. 10	346 2 19,496		R* VIII. 11	355 0 14,584	
R =	347 40 18,121		R =	347 40 18,121	
lg r* = 4,7897826.3					
R* = 347° 40' 18",121.					
VIII. 13. HOHENKREUTZ. Tr. No. 154, p. 213.					
HOHENKREUTZ.....	94° 43' 47",017	4,7897826.3	HOHENKREUTZ.....	29° 47' 22",404	4,7276121.9
DORPAT..... +	11 8 17,177	4,0771892.4	DORPAT..... +	3 48 20,713	3,8533965.3
HALLJALL.....	74 8 2,607	4,7743940.0	WARRES-MÄGGI....	146 24 18,908	4,7743940.7
Somme	180 0 6,801		Somme	180 0 2,025	
R* VIII. 12	347 40 18,121		R* VIII. 11	355 0 14,584	
R =	358 48 35,298		R =	358 48 35,297	
lg r* = 4,7743940.4					
R* = 358° 48' 35",298.					
VIII. 14. MÄKI-PÄÄLYS. Tr. No. 155, p. 213.					
MÄKI-PÄÄLYS.....	24° 43' 48",504	4,7897826.3	MÄKI-PÄÄLYS.....	8° 23' 31",557	4,7743940.4
DORPAT..... +	16 32 19,984	4,6225699.2	DORPAT..... +	5 24 2,803	4,5838766.4
HALLJALL.....	138 44 7,877	4,9875244.6	HOHENKREUTZ.....	166 12 30,863	4,9875245.2
Somme	180 0 16,365		Somme	180 0 5,223	
R* VIII. 12	347 40 18,121		R* VIII. 13	358 48 35,298	
R =	4 12 38,105		R =	4 12 38,101	
lg r* = 4,9875244.9 = r''''', § 63.					
R* = 4° 12' 38",103 = R''''', § 63.					
p. 243. Az. IX. 2.	209 9 17,270		p. 243. Az. IX. 1.	192 49 0,310	
Q =	184 25 28,766		Q =	184 25 28,753	
Q* = 184° 25' 28",760 = Q''''', § 63.					

§ 62. Exactitude du calcul des coordonnées polaires.

Les calculs, soit des triangles de continuation dont est composé chaque arc partiel, soit des triangles polaires, ont été faits à l'aide de tables logarithmiques à 7 décimales, en conservant partout, dans le courant du calcul, la huitième place, donnée par l'interpolation. Voyez p. 94 et p. 245.

L'évaluation de la distance r , entre les deux stations extrêmes ou astronomiques d'un arc partiel, et des azimuts de cette ligne étant le résultat cherché de l'opération géodésique, exécutée pour cet arc, on pourrait douter, si la conservation de la huitième place décimale suffit pour garantir au résultat du calcul une assez grande précision, vu qu'il paraît à craindre que l'accumulation des erreurs effectives, dans la huitième décimale, n'influence ce résultat trop sensiblement, par suite du grand nombre de calculs partiels réunis pour y parvenir. En tout cas il faut se convaincre, d'une manière plus précise qu'il n'a été fait dans les articles précédents, de ce que l'inexactitude du résultat, produite par le calcul, disparaît vis-à-vis du défaut qu'engendre l'imperfection de la mesure des bases et des angles.

On peut déduire, par la voie théorique, soit la limite de l'erreur possible d'un résultat obtenu par une opération de calcul, soit l'erreur probable d'un tel résultat. Mais cette déduction est d'ordinaire tellement compliquée, qu'elle ne paraît avoir pratiquée que pour certains cas assez simples. Je tâcherai par conséquent de parvenir à une connaissance, au moins très-approximative, de l'erreur à craindre dans les coordonnées finales de nos 8 arcs partiels, à l'aide d'une voie en majeure partie empirique.

Chaque couple de coordonnées finales des paragraphes 54 à 61, r^I et R^I , r^{VIII} et R^{VIII} , est le produit d'un certain nombre de calculs partiels de forme identique. Nous avons eu :

pour parvenir à	r^I	et	R^I	,	p.	255,	20	calculs	partiels,	§	54
»	»		r^{II}	et	R^{II}	,	p.	262,	19	»	»
»	»		r^{III}	et	R^{III}	,	p.	267,	14	»	»
»	»		r^{IV}	et	R^{IV}	,	p.	273,	15	»	»
»	»		r^V	et	R^V	,	p.	282,	26	»	»
»	»		r^{VI}	et	R^{VI}	,	p.	289,	20	»	»
»	»		r^{VII}	et	R^{VII}	,	p.	296,	19	»	»
»	»		r^{VIII}	et	R^{VIII}	,	p.	300,	11	»	»

Somme 144 calculs partiels.

Chaque calcul partiel a son résultat partiel $\lg r^*$ et R^* . Mais ces quantités $\lg r^*$ et R^* sont les moyennes arithmétiques de deux valeurs distinctes obtenues une fois par la jonction occidentale, une seconde

fois par la jonction orientale, ou $\lg r^* = \frac{1}{2} (\lg r + \lg r)$ et $R^* = \frac{1}{2} (R + R)$. Les différences $\lg r - \lg r$ et $R - R$ sont les effets du calcul numérique. Pour donner à la recherche suivante un fondement plus large, j'ai réuni les données que présentent les calculs de nos deux arcs, méridional et septentrional, et qui offraient le premier 144, le second 97 calculs partiels. Dans le tableau ci-joint les valeurs des $\lg r - \lg r$ sont exprimées en unités et fractions de la septième place décimale.

27 fois	≡	($\lg r - \lg r$) a été	0,0	ou entre	0,00	et	0,05
31 »	»	»	0,1	»	0,05	»	0,15
40 »	»	»	0,2	»	0,15	»	0,25
31 »	»	»	0,3	»	0,25	»	0,35
21 »	»	»	0,4	»	0,35	»	0,45
26 »	»	»	0,5	»	0,45	»	0,55
15 »	»	»	0,6	»	0,55	»	0,65
13 »	»	»	0,7	»	0,65	»	0,75
13 »	»	»	0,8	»	0,75	»	0,85
7 »	•	»	0,9	»	0,85	»	0,95
7 »	»	»	1,0	»	0,95	»	1,05
5 »	»	»	1,1	»	1,05	»	1,15
2 »	»	»	1,2	»	1,15	»	1,25
2 »	»	»	1,3	»	1,25	»	1,35
1 »	»	»	1,4	»	1,35	»	1,45.
Somme 241							

Or ≡ ($\lg r - \lg r$) se trouvant ici 98 fois entre 0,00 et 0,25

. 129 » » 0,00 et 0,35

nous l'avons, par interpolation, 120 $\frac{1}{2}$ fois entre 0,00 et 0,323

et 120 $\frac{1}{2}$ » » 0,323 et 1,450;

ou l'énumération des cas effectifs donne la valeur probable d'un $\lg r - \lg r$ égale à ≡ 0,323. Quoique dans les chiffres que contiennent les tables logarithmiques, toutes les erreurs depuis 0,000... jusqu'à 0,499... soient également probables, nous voyons néanmoins, dans le tableau précédent, que, par la combinaison multiple des erreurs tabulaires, les petites différences $\lg r - \lg r$ sont beaucoup plus fréquentes que les grandes, et que par conséquent la distribution des erreurs effectives dans les $\lg r$ et $\lg r$ est analogue à celle qui est adoptée dans la théorie des moindres carrés. Cherchons donc quelle sera, par les données de notre tableau, l'erreur probable d'un $\lg r - \lg r$, d'après cette théorie.

La somme des 241 différences étant 95,5, nous avons la valeur probable d'un $\lg r - \lg r$

$$\mp \frac{95,5}{241} \cdot 0,8454 = \mp 0,335;$$

la somme des 241 carrés des différences étant 61,59, cette même valeur probable se trouve

$$= 0,6745 \sqrt{\frac{61,59}{241}} = \mp 0,341.$$

La proximité des trois chiffres 0,323, 0,335 et 0,341, nous autorise à l'application des moindres carrés, pour la recherche des erreurs probables des quantités $\lg r^I \dots \lg r^{III}$. En partant du plus grand de nos trois chiffres 0,341, nous avons

$$\text{l'erreur pr. d'un } \lg r \text{ et } \lg r, \text{ ou } b \lg r = b \lg r = 0,341 : \sqrt{2} = \mp 0,241$$

$$\text{et } b\left(\frac{\lg r + \lg r}{2}\right) = b \lg r^* = \mp 0,171.$$

Si maintenant nous parvenons au r final d'un arc partiel, ou à r^n par n calculs partiels, l'erreur probable du $\lg r^n$ sera

$$b \lg r^n = \mp 0,171 \sqrt{n}.$$

Pour apprécier le calcul des azimuts, nous avons à comparer les R et \mathfrak{R} correspondants des 241 calculs partiels. Voici les différences qu'ils présentent :

20 fois $\mp (R - \mathfrak{R}) = 0,000$	2 fois $\mp (R - \mathfrak{R}) = 0,014$
35 " " 0,001	1 " " 0,016
30 " " 0,002	3 " " 0,017
31 " " 0,003	2 " " 0,019
29 " " 0,004	3 " " 0,020
17 " " 0,005	2 " " 0,021
14 " " 0,006	1 " " 0,023
12 " " 0,007	1 " " 0,024
10 " " 0,008	1 " " 0,025
9 " " 0,009	1 " " 0,027
4 " " 0,010	1 " " 0,028
5 " " 0,011	1 " " 0,030
2 " " 0,012	1 " " 0,031
3 " " 0,013	

En additionnant nous obtenons :

$\mp (R - \mathfrak{R}_i)$	est	116	fois	entre	$0,0000$	et	$0,0035$
»	»	125	»	»	$0,0000$	et	$0,0045$
done		$120\frac{1}{2}$	fois	entre	$0,0000$	et	$0,0040$
et		$120\frac{1}{2}$	»	»	$0,0040$	et	$0,0315$;

ou l'énumération donne la valeur prob. d'un $(R - \mathfrak{R}) = \mp 0,0040$,
 la somme des 241 différences = $1,299$ » » » » » » » = $\mp 0,0045$,
 la somme des 241 carrés des diff. = $0,015007$ » » » » » » » = $\mp 0,0053$.

L'application des moindres carrés conduit ici à une valeur probable plus forte que l'énumération. Admettons cependant cette valeur plus forte = $\mp 0,0053$, et nous aurons, dans l'azimut final R^N déduit de n calculs partiels, l'erreur probable $bR^N = \mp 0,00265 \sqrt{n}$.

La petite table suivante offre les erreurs probables $b \lg r^N$ et bR^N de nos 8 arcs partiels, calculées sur les deux expressions données $b \lg r^N = 0,171 \sqrt{n}$ et $bR^N = 0,00265 \sqrt{n}$. Pour les Q^N les erreurs probables sont identiques avec celles des R^N .

p. 255, $n = 20$,	$b \lg r^I = 0,76$	$bR^I = 0,012 = bQ^I$
p. 262, » 19	$b \lg r^{II} = 0,75$	$bR^{II} = 0,012 = bQ^{II}$
p. 267, » 14	$b \lg r^{III} = 0,64$	$bR^{III} = 0,010 = bQ^{III}$
p. 273, » 15	$b \lg r^{IV} = 0,67$	$bR^{IV} = 0,010 = bQ^{IV}$
p. 282, » 26	$b \lg r^V = 0,87$	$bR^V = 0,014 = bQ^V$
p. 289, » 20	$b \lg r^{VI} = 0,76$	$bR^{VI} = 0,012 = bQ^{VI}$
p. 296, » 19	$b \lg r^{VII} = 0,75$	$bR^{VII} = 0,012 = bQ^{VII}$
p. 300, » 11	$b \lg r^{VIII} = 0,57$	$bR^{VIII} = 0,009 = bQ^{VIII}$
Moyenne	0,72	0,011.

Il est essentiel de remarquer ici que les erreurs probables des $\lg r^N$ et des R^N ou Q^N ainsi trouvées ne se rapportent qu'à la résolution des triangles polaires, en supposant exactes les données qu'a fournies le calcul antérieur des triangles de continuation. Dans ces données il y a certainement aussi des inexactitudes, produites par l'usage des tables logarithmiques. Mais ces inexactitudes sont de nature tout à fait différente, et ne produisent point d'accumulation successive, vu qu'elles ont été, en commun avec les défauts qu'ont engendrés l'imperfection de la mesure des bases et des angles, l'objet du calcul de compensation, à l'aide duquel toutes les bases ont concouru à fixer les valeurs finales du tableau définitif des angles et

des côtés, que présente le chapitre XIII, p. 190 à 213. Aussi les données requises pour le calcul des coordonnées polaires ont-elles été puisées dans ce tableau définitif.

La moyenne des $\delta \lg r = \mp 0,72$ indique que l'erreur probable, effectuée par le calcul, dans la longueur de la ligne géodésique qui joint les deux points extrêmes d'un de nos arcs partiels, reste en moyenne en dedans d'un $\frac{1}{6}$ μ , ou d'un six-millionième. Les logarithmes des six bases de notre arc méridional sont sujets à des erreurs probables depuis 3,5 jusqu'à 13,8, en moyenne de $\mp 8,90$ unités de la septième place, voir p. 76. Ce chiffre étant douze fois plus grand que le $\delta \lg r$ moyen = $\mp 0,72$, l'inexactitude du calcul des r^N est insensible, déjà devant l'inexactitude inhérente à la mesure des bases, et plus encore devant les erreurs que produisent les défauts commis dans la mesure des angles, voyez p. 94.

L'extrême petitesse des erreurs probables des azimuts calculés, en moyenne $\delta R^N = \mp 0,011 = \delta Q^N$, est tout à fait conforme à la nature du calcul. Le R^N se trouve par l'addition de n différents soit y , soit \bar{y} , en offrant successivement deux valeurs distinctes R et \bar{R} , combinées à une moyenne $R^* = \frac{1}{2}(R + \bar{R})$. Voir p. 247. Mais ces y et \bar{y} ne sont en moyenne que de $10,0$, et dans un tel arc le $\lg \tan$ change de $123,1$ pour chaque seconde. L'inexactitude du calcul des azimuts finaux = $\mp 0,011$ disparaît par conséquent entièrement vis-à-vis des défauts des azimuts primitivement observés, dont les erreurs probables ont été trouvées, p. 242 et 243, depuis $\mp 0,24$ jusqu'à $\mp 2,20$ ou en moyenne de $\mp 0,683$, chiffre qui est 62 fois plus fort que $\delta R^N = \mp 0,011$.



CHAPITRE XVI.

LONGUEURS DES DIFFÉRENTS ARCS PARTIELS. AZIMUTS DÉTERMINÉS AUX DEUX POINTS EXTRÊMES DE CHAQUE ARC. COMPARAISON ET COMPENSATION DES DEUX AZIMUTS.

§ 63. Longueurs des lignes géodésiques situées entre les deux points extrêmes des S arcs partiels. Azimuts de ces lignes géodésiques déterminés aux points extrêmes des arcs.

Chacun des paragraphes § 54 à § 61 nous fournit, par la résolution de son dernier triangle polaire, le logarithme de la ligne géodésique r qui joint les deux points extrêmes de l'arc partiel, et les deux azimuts que fait cette ligne, d'après les observations azimutales exécutées sur ces points extrêmes. Je donnerai à présent le tableau de ces chiffres, en répétant les deux latitudes des extrémités de chaque arc, d'après p. 214, et en désignant l'azimut de la ligne géodésique au point méridional par \mathcal{A} , au point boréal par \mathcal{B} . J'ai déduit, des $\lg r$, les longueurs r elles-mêmes, et j'ai ajouté les erreurs probables $\delta \lg r$ et δr , telles qu'elles se trouvent par suite de l'opération totale de compensation, des angles de triangle et des G bases, opération qui a été l'objet des chapitres précédents. Aux azimuts \mathcal{A} et \mathcal{B} j'ai joint l'indication des erreurs probables $\delta \mathcal{A}$ et $\delta \mathcal{B}$, en tant qu'elles proviennent de l'incertitude dans l'observation des azimuts. La déduction des $\delta \lg r$ a demandé un travail très-étendu, dont M. Lindhagen a bien voulu se charger.

Longueurs géodésiques des arcs partiels, et azimuts déterminés aux points extrêmes de ces arcs.

Renvoi.	Points extrêmes.	Latitudes.	Distances.	Azimuts.
I. Triangle polaire I. 23, p. 255.	STARO-NEKRASSOWKA WODOLU.....	$\varphi' = 45^{\circ} 20' 28''$ $\varphi'' = 47^{\circ} 1' 25,2$	$lg r' = 4,9848914,4 \mp 29,2$ $r' = 96580,94 \mp 0,650$ toises.	$\varrho' = 3^{\circ} 18' 21,37 \mp 0,44$ $\varrho'' = 183^{\circ} 24' 39,63 \mp 0,74$
II. Triangle polaire II. 22, p. 262.	WODOLU..... SSUPRUNKOWZI....	$\varphi'' = 47^{\circ} 1' 25,2$ $\varphi''' = 48^{\circ} 45' 3,1$	$lg r'' = 5,1192468,0 \mp 26,0$ $r'' = 131597,24 \mp 0,788$ toises.	$\varrho'' = 319^{\circ} 19' 51,80 \mp 1,09$ $\varrho''' = 137^{\circ} 38' 38,34 \mp 1,09$
III. Triangle polaire III. 17, p. 267.	SSUPRUNKOWZI.... KREMENETZ.....	$\varphi''' = 48^{\circ} 45' 3,1$ $\varphi'' = 50^{\circ} 5' 50,0$	$lg r''' = 4,9395650,2 \mp 32,4$ $r''' = 87009,17 \mp 0,649$ toises.	$\varrho''' = 332^{\circ} 18' 47,52 \mp 0,48$ $\varrho'' = 151^{\circ} 28' 24,00 \mp 0,78$
IV. Triangle polaire IV. 18, p. 273.	KREMENETZ..... BELIN.....	$\varphi'' = 50^{\circ} 5' 50,0$ $\varphi' = 52^{\circ} 2' 42,2$	$lg r'' = 5,0513246,3 \mp 38,6$ $r'' = 112544,59 \mp 1,001$ toises.	$\varrho'' = 351^{\circ} 22' 51,48 \mp 0,35$ $\varrho' = 171^{\circ} 0' 30,46 \mp 2,29$
V. Triangle polaire V. 29, p. 282.	BELIN..... NEMESCH.....	$\varphi' = 52^{\circ} 2' 42,2$ $\varphi'' = 54^{\circ} 39' 5,9$	$lg r' = 5,1727435,8 \mp 41,6$ $r' = 148848,20 \mp 1,425$ toises.	$\varrho' = 1^{\circ} 15' 58,46 \mp 2,20$ $\varrho'' = 181^{\circ} 20' 51,02 \mp 0,85$
VI. Triangle polaire VI. 23, p. 289.	NEMESCH..... JACOBSTADT.....	$\varphi'' = 54^{\circ} 39' 5,9$ $\varphi''' = 56^{\circ} 30' 4,8$	$lg r'' = 5,0300461,0 \mp 28,9$ $r'' = 107163,31 \mp 0,714$ toises.	$\varrho'' = 9^{\circ} 9' 44,45 \mp 0,57$ $\varrho''' = 189^{\circ} 36' 5,53 \mp 0,53$
VII. Triangle polaire VII. 22, p. 296.	JACOBSTADT..... DORPAT.....	$\varphi''' = 56^{\circ} 30' 4,8$ $\varphi'' = 58^{\circ} 22' 47,6$	$lg r''' = 5,0434741,3 \mp 25,2$ $r''' = 110528,46 \mp 0,642$ toises.	$\varrho''' = 13^{\circ} 33' 57,83 \mp 0,53$ $\varrho'' = 191^{\circ} 17' 39,39 \mp 0,24$
VIII. Triangle polaire VIII. 14, p. 300.	DORPAT..... MAKI-PÄÄLYS.....	$\varphi'' = 58^{\circ} 22' 47,6$ $\varphi' = 60^{\circ} 4' 29,4$	$lg r'' = 4,9875244,9 \mp 22,3$ $r'' = 97168,28 \mp 0,499$ toises.	$\varrho'' = 4^{\circ} 12' 38,10 \mp 0,24$ $\varrho' = 184^{\circ} 25' 28,76 \mp 0,60$

On voit de ce tableau que l'exactitude de la valeur r a été la plus grande pour l'arc VIII pour lequel nous avons $\frac{br}{r} = \mp \frac{1}{194700}$, la plus petite pour l'arc V qui donne $\frac{br}{r} = \mp \frac{1}{404500}$. En additionnant les huit arcs r et les huit br , nous trouvons en moyenne :

$$r = 111430 \text{ toises, } br = 0,796 \text{ toise, } \frac{br}{r} = \mp \frac{1}{440000}.$$

§ 64. Comparaison des azimuts déterminés aux deux points extrêmes de chaque arc partiel.

Supposons la Terre un sphéroïde parfaitement régulier, engendré par la révolution autour du petit axe d'une ellipse dont les demi-axes ont le rapport $\rho = \frac{b}{a}$. Dans ce cas, il existe entre deux azimuts exacts \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , qu'une ligne géodésique EZ , pl. XXVI, fig. 1, fait en E et Z , φ étant la latitude exacte du point méridional E où l'azimut est \mathfrak{A} , φ' celle du point boréal Z où l'azimut est \mathfrak{B} , cette dépendance que :

$$\lg \operatorname{tang} \omega = \lg \rho + \lg \operatorname{tang} \varphi \qquad \lg \operatorname{tang} \omega' = \lg \rho + \lg \operatorname{tang} \varphi' \qquad (1)$$

$$\lg \sin \mathfrak{B} - \lg \sin \mathfrak{A} = \lg \cos \omega - \lg \cos \omega'. \qquad (2)$$

Ces formules servent à calculer le second azimut, si l'un des deux seulement est donné.

Dans ce calcul, nous pouvons nous passer des angles auxiliaires ω et ω' . Car en mettant

$$\lg(1 - (1 - \rho^2) \sin^2 \varphi)^{-1} = \eta \qquad \lg(1 - (1 - \rho^2) \sin^2 \varphi')^{-1} = \eta', \qquad (3)$$

nous avons

$$\lg \sin \mathfrak{B} - \lg \sin \mathfrak{A} = (\lg \cos \varphi - \lg \cos \varphi') + (\eta - \eta'). \qquad (4)$$

J'ai calculé les η correspondants aux degrés entiers de latitude, pour l'étendue de notre arc total, depuis $\varphi = 45^\circ$ jusqu'à $\varphi = 71^\circ$. Ces calculs se font facilement à l'aide des tables de Zech. La table qui suit contient les η pour les deux valeurs de ρ , d'après Bessel et d'après p. 84. La différence $\Delta\eta$, correspondante à $\Delta\varphi = 1^\circ$, est placée, dans la table, sur la ligne horizontale de son φ , étant $\frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} \varphi+1 & \varphi-1 \\ \eta & \eta \end{smallmatrix} \right)$. Cet arrangement des différences facilite l'interpolation aux secondes différences. Car pour parvenir d'un η à un η , φ étant un nombre entier de degrés, et x une fraction du degré, il y aura : $\begin{smallmatrix} \varphi+x & \varphi \\ \eta & \eta \end{smallmatrix} + x \left(\begin{smallmatrix} \varphi+1x \\ \Delta\eta \end{smallmatrix} \right)$.

Nous avons encore, en mettant

$$\left. \begin{aligned} \mu &= (\lg \cos \varphi - \lg \cos \varphi') + (\eta - \eta'), \\ \lg \sin \mathfrak{B} &= \lg \sin \mathfrak{A} + \mu; \end{aligned} \right\} \qquad (5)$$

et ces formules donnent un calcul plus expéditif et en même temps plus exact, que celui qui se fait à l'aide des formules (1) et (2).

Table des η et des $\Delta\eta$.

$\rho = \frac{298,1528}{299,1528}$			$\rho = \frac{293,73}{294,73}$		
φ	η	$\Delta\eta$	φ	η	$\Delta\eta$
45°	0,0007258.8	253.8	45°	0,0007367.6	257.6
46	7512.5	253.6	46	7625.2	257.4
47	7766.0	253.2	47	7882.4	257.0
48	8018.9	252.4	48	8139.2	256.2
49	8270.9	251.4	49	8394.9	255.2
50	8521.7	250.0	50	8649.5	253.8
51	8771.0	248.4	51	8902.6	252.1
52	9018.4	246.4	52	9153.7	250.1
53	9263.8	244.2	53	9402.8	247.8
54	9506.7	241.6	54	9649.4	245.2
55	9747.0	238.8	55	9893.2	242.3
56	9984.2	235.5	56	10134.0	239.1
57	0,0010218.0	232.1	57	10371.4	235.6
58	10448.4	228.4	58	10605.2	231.8
59	10674.9	224.4	59	10835.0	227.8
60	10897.2	220.2	60	11060.8	223.5
61	11115.2	215.6	61	11282.0	218.8
62	11328.4	210.8	62	11498.4	213.9
63	11536.7	205.7	63	11709.8	208.8
64	11739.8	200.4	64	11916.0	203.4
65	11937.4	194.8	65	12116.6	197.7
66	12129.4	189.0	66	12311.4	191.8
67	12315.4	183.0	67	12500.3	185.7
68	12495.3	176.7	68	12682.8	179.4
69	12668.8	170.2	69	12859.0	172.8
70	12835.7	163.5	70	13028.4	166.0
71	12995.8	156.7	71	13191.0	159.0

Pour montrer l'emploi de cette table, prenons, dans le tableau p. 307, l'arc du triangle polaire II. 22. C'est le cas qui présente, de tous nos arcs partiels, le plus fort écart entre la direction de l'arc géodésique et le méridien. Nous avons

$$\varphi = 47^\circ 1' 25,2; \quad \varphi' = 48^\circ 45' 3,1; \quad \varrho = 319^\circ 19' 51,80.$$

Supposons maintenant que ces trois chiffres appartiennent à un sphéroïde parfaitement régulier, et cherchons l'azimut \mathfrak{B} , pour l'extrémité boréale de cet arc. Avec l'aplatissement de Bessel notre table nous fournit

$$\eta = 7772.0 \qquad \eta' = 8208.1 \qquad \eta - \eta' = -436.1;$$

puis nous avons :

$$\begin{aligned} \lg \cos \varphi &= 9,8335908.6 \\ \lg \cos \varphi' &= 9,8191058.6 \\ \lg \cos \varphi - \lg \cos \varphi' &= 0,0144850.0 \\ \eta - \eta' &= \underline{\quad -436.1} \\ \mu &= 0,0144413.9 \\ \lg \sin \mathfrak{A} &= 9,8140393.0 \\ \lg \sin \mathfrak{B} &= 9,8284806.9 \qquad \mathfrak{B} = 137^\circ 38' 42'',088. \end{aligned}$$

Avec l'autre aplatissement nous trouvons :

$$\begin{aligned} \eta &= 7888.5 \qquad \eta' = 8231.1 \qquad \eta - \eta' = -442.6 \\ \mu &= 0,0144407.4 \\ \lg \sin \mathfrak{B} &= 9,8284800.4 \qquad \mathfrak{B} = 137^\circ 38' 42'',358. \end{aligned}$$

Il y a ici une différence de $0,270$ entre les deux \mathfrak{B} , trouvés avec les deux aplatissements.

Examinons à présent la relation entre deux azimuts effectifs $\mathfrak{A}^* = G + g$ et $\mathfrak{B}^* = H - h$, p. 246, déterminés en combinant les azimuts observés G et H avec les angles g et h , qu'a fournis la résolution des triangles polaires. Les quatre quantités G , H , g et h sont sujettes à certaines inexactitudes, pour lesquelles nous désignerons les corrections par dG , dH , dg , dh . Nous aurons ainsi :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}^* + dG + dg = \mathfrak{A}^* + d\mathfrak{A}^* \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}^* + dH - dh = \mathfrak{B}^* + d\mathfrak{B}^*; \end{aligned}$$

et à l'aide de (5), p. 308,

$$\lg \sin (\mathfrak{B}^* + d\mathfrak{B}^*) = \lg \sin (\mathfrak{A}^* + d\mathfrak{A}^*) + \mu. \quad (6)$$

En désignant à présent par \mathfrak{B}' et \mathfrak{A}' les deux valeurs des azimuts qui se déduisent des expressions

$$\lg \sin \mathfrak{B}' = \lg \sin \mathfrak{A}^* + \mu \qquad \lg \sin \mathfrak{A}' = \lg \sin \mathfrak{B}^* - \mu,$$

ces quantités \mathfrak{B}' et \mathfrak{A}' seront les *azimuts calculés*, en parlant soit de \mathfrak{B}^* soit de \mathfrak{A}^* , et ces \mathfrak{B}' et \mathfrak{A}' calculés différeront, par l'influence de $d\mathfrak{A}^*$ et $d\mathfrak{B}^*$, des azimuts correspondants observés \mathfrak{B}^* et \mathfrak{A}^* . Si nous nommons encore α et β les changements du $\lg \sin \mathfrak{A}$ et du $\lg \sin \mathfrak{B}$, pour $1''$, nous parvenons à

$$\lg \sin \mathfrak{B}^* + \beta d\mathfrak{B}^* = \lg \sin \mathfrak{A}^* + \alpha d\mathfrak{A}^* + \mu. \quad (6')$$

$$\lg \sin \mathfrak{B}^* - \lg \sin \mathfrak{B}' = \lg \sin \mathfrak{A}' - \lg \sin \mathfrak{A}^* = \alpha d\mathfrak{A}^* - \beta d\mathfrak{B}^*. \quad (7).$$

Enfin en mettant

$$\lg \sin \mathfrak{B}^* - \lg \sin \mathfrak{B}' = \lg \sin \mathfrak{A}' - \lg \sin \mathfrak{A}^* = f, \quad (7')$$

nous avons

$$\mathfrak{B}^* - \mathfrak{B}' = \frac{f}{\beta} \quad \mathfrak{A}' - \mathfrak{A}^* = \frac{f}{\alpha}.$$

Pour le signe de $\mathfrak{B}^* - \mathfrak{B}'$ et de $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}^*$, il faut faire attention aux quarts de cercle, auxquels \mathfrak{A} et \mathfrak{B} appartiennent.

En désignant la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}((\mathfrak{B}^* - \mathfrak{B}') + (\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}^*))$ par $d\mathfrak{G}$, nous avons

$$d\mathfrak{G} = \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} f, \quad (8)$$

et cette expression nous fournit une signification précise de la discordance qui existe entre les azimuts observés aux deux extrémités d'un arc terrestre. En revenant maintenant à nos désignations primitives nous avons :

$$d\mathfrak{G} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} (dG + dg) - \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} (dH - dh). \quad (9)$$

Voyons à présent quelles sont les quantités $d\mathfrak{G}$ que présentent les deux azimuts de chacun de nos 8 arcs partiels, p. 307, en adoptant, pour ce calcul, les latitudes données p. 214 et l'aplatissement $e = 293,73 : 294,73 = 0,9966071 \mp 0,0000197$, p. 84.

	Arcs :	I.	II.	III.	IV.
$\lg \cos \varphi - \lg \cos \varphi' =$		133467.8	144850.0	119181.6	182832.4
$\eta - \eta' =$		- 434.9	- 442.6	- 342.9	- 490.8
$\mu =$		133032.9	144407.4	118830.7	182341.6
$\lg \sin \mathfrak{A}^* =$		8,7609308.1	9,8140393.0	9,6671147.7	9,1756967.3
$\lg \sin \mathfrak{B}' =$		8,7742341.0	9,8284800.4	9,6789986.4	9,1939308.9
$\lg \sin \mathfrak{B}^* =$		8,7745035.4	9,8284893.2	9,6790350.0	0,1939272.8
$f =$		+ 0,0002694.4	+ 0,0000092.8	+ 0,0000363.6	- 0,0000036.1
$\beta =$		353.2	23.09	38.74	133.1
$\alpha =$		364.4	24.50	40.12	138.9
$\mathfrak{B}^* - \mathfrak{B}' =$		+ 7",63	- 4",02	- 9",39	+ 0",27
$\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}^* =$		+ 7,39	- 3,79	- 9,06	+ 0,26
Moyenne $d\mathfrak{G} =$		+ 7,51	- 3,90	- 9,22	+ 0,26

	Arcs :			
	V.	VI.	VII.	VIII.
$\lg \cos \varphi - \lg \cos \varphi' =$	265663.6	204638.6	223069.8	215812.0
$\eta - \eta' =$	— 643.5	— 444.9	— 439.6	— 384.5
$\mu =$	265020.1	204193.7	222630.2	215427.5
$\lg \sin \mathfrak{A}' =$	8.3443576.4	9.2020315.5	9.3702658.0	8.8658286.6
$\lg \sin \mathfrak{B}' =$	8.3708596.5	9.2224509.2	9.3925288.2	8.8873714.1
$\lg \sin \mathfrak{B}^* =$	8.3713678.9	9.2221834.7	9.3925249.4	8.8873250.7
$f =$	+ 0,0005082.4	— 0,0002674.5	— 0,0000038.8	— 0,0000463.4
$\beta =$	895.7	124.44	82.6	272.0
$\alpha =$	952.0	130.62	87.3	286.0
$\mathfrak{B}^* - \mathfrak{B}' =$	5",67	21",49	0",47	1",70
$\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}^* =$	5,34	20,47	0,44	1,62
Moyenne $d\mathfrak{G} =$	+ 5,50	— 20,98	— 0,46	— 1,66.

On voit que pour 7 de nos arcs la différence entre l'azimut effectif et l'azimut calculé est au-dessous de 10", mais qu'elle s'élève dans l'arc VI jusqu'à 21".

Les erreurs réelles, dG , dH , dg , dh , sont inconnues; mais nous pouvons évaluer les erreurs probables bG , bH , bg , bh , et examiner à quel point les différents $d\mathfrak{G}$ effectifs correspondent aux erreurs probables $b\mathfrak{G}$, qui se déduisent des bG , bH , bg et bh . Dans cette recherche il faut considérer aussi que le μ employé dans le calcul de $d\mathfrak{G}$ ne jouit point d'une exactitude parfaite, mais qu'il faut ajouter, pour parvenir à $b\mathfrak{G}$, un terme qui contient $b\mu$. Par cette voie et en partant de (9) nous trouvons:

$$b\mathfrak{G} = \mp \sqrt{\left\{ \left(\frac{\alpha + \beta}{2\beta} \right)^2 (bG)^2 + (bg)^2 + \left(\frac{\alpha + \beta}{2\alpha} \right)^2 (bH)^2 + (bh)^2 + \left(\frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} \right)^2 (b\mu)^2 \right\}} \quad (10)$$

$$= \mp \sqrt{\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2 + \mathfrak{R}^2}.$$

J'ai donné p, 242 et 243 les erreurs probables des azimuts directement observés, en tant qu'elles dépendent des observations faites. Nous y trouvons les $b'G$ suivants pour les points méridionaux, et les $b'H$ pour les points septentrionaux de nos arcs partiels.

Arcs.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
$b'G =$	$\mp 0",44$	1",09	0",48	0",35	2",20	0",57	0",53	0",24
$b'H =$	$\mp 0,74$	1,09	0,78	2,29	0,85	0,53	0,24	0,60.

Ces $b'G$ et $b'H$ ne sont cependant point les uniques erreurs auxquelles les G et H sont sujets; car il existe encore une cause qui produit des irrégularités particulières dans les G et H .

Parmi les résultats des recherches de Bessel sur la figure de la Terre, *Astron. Nachr.* No. 438, un des plus intéressants est la détermination de l'erreur moyenne = 2",640 d'une latitude. Impossible d'imputer aux latitudes observées dont Bessel a fait usage dans sa recherche, une erreur moyenne de 2",64 par suite de l'inexactitude de l'observation. Cette erreur est sans doute le produit combiné de deux causes distinctes, savoir de l'inexactitude dite qui a lieu dans la détermination de la latitude par l'observation, et de l'irrégularité que font naître les attractions locales dans la direction de la pesanteur. Mettons l'erreur moyenne des latitudes observées = 1",20, quantité peut-être encore trop forte, nous aurons pour l'erreur moyenne produite par l'effet des attractions locales $\sqrt{(2,64^2 - 1,20^2)} = 2",35$. Cette détermination est cependant sujette à une objection, savoir qu'il se peut que les différences $d\varphi$, entre les latitudes observées et calculées, soient provenues principalement de ce qu'une ellipse génératrice moyenne des méridiens n'existe pas en réalité, mais qu'il faut admettre des aplatissements divers, pour les différents méridiens terrestres et même pour des portions du même méridien. La considération suivante sert cependant à réfuter cette objection.

Les différences des latitudes très-rapprochées, dans un même arc de méridien, ne peuvent être influencées, par l'hypothèse inexacte d'une ellipse génératrice moyenne, que d'une quantité très-petite. Par conséquent, nous n'avons qu'à comparer les $d\varphi$ et $d\varphi'$ de chaque couple de latitudes voisines, dans le tableau de Bessel, *Astr. Nachr.* No. 438 p. 115, et à déduire de ces différences relatives, dans les latitudes voisines, l'erreur moyenne et l'erreur probable d'une latitude isolée. Voici la liste des erreurs relatives $d\varphi' - d\varphi$ que donnent les 10 arcs de Bessel, dans les 28 couples de latitudes voisines qu'ils présentent :

	$d\varphi' - d\varphi$		$d\varphi' - d\varphi$
Arc du Pérou	+ 1",21	Arc d'Angleterre	+ 3",21
Arc I. des Indes Or.	+ 0,54		+ 1,31
» II. » » »	— 0,24		— 1,31
	+ 5,73		— 5,07
	— 5,46	» de Hanovre	+ 4,99
	+ 1,38	» de Danemarck	— 0,90
	+ 3,60	» de Prusse	— 0,54
	— 6,40		+ 3,80
Arc de France	+ 3,16	» de Russie	— 0,65
	— 3,35		+ 4,21
	+ 1,20		+ 0,80
	— 6,01		— 3,67
	+ 5,35		+ 1,65
	+ 3,24	» de Suède	— 1,12.

La somme des carrés de ces 28 chiffres = 344,0 conduit à l'erreur moyenne d'une latitude isolée = $\sqrt{\frac{344,0}{56}} = \mp 2,45$. Cette erreur moyenne est si près de l'autre 2,64, qu'a trouvée Bessel dans l'hypothèse d'une ellipse génératrice moyenne, qu'on pourrait regarder la différence de 0,19 comme accidentelle. Mais il est évident qu'elle doit ressortir tant soit peu plus petite que l'autre, par les deux raisons suivantes. Dans les couples de latitudes voisines, une plus forte compensation des erreurs d'observation doit avoir lieu, que dans les latitudes comparées en général. Secondement, l'imperfection des opérations géodésiques qui déterminent les distances des parallèles, exerce une influence plus petite sur la comparaison des latitudes voisines, que sur celle des latitudes plus éloignées entre elles et qui appartiennent à un arc total divisé en plusieurs arcs partiels. Nous parvenons ainsi à ce résultat important, qu'il n'existe, dans les différents arcs du méridien mesurés jusqu'à l'époque actuelle, aucun indice de ce que l'hypothèse d'une ellipse génératrice moyenne du sphéroïde terrestre s'éloigne sensiblement de la réalité. Plusieurs savants ont bien énoncé l'opinion opposée, en basant leur jugement sur le fait incontestable, que les différentes combinaisons de couples d'arcs terrestres conduisent à des aplatissements et des dimensions considérablement discordantes. Mais, à ce qu'il paraît, ces savants n'ont pas assez apprécié les erreurs probables auxquelles les résultats obtenus par de telles combinaisons isolées sont sujets. En adoptant donc le résultat de Bessel, de 2,64 pour l'erreur moyenne d'une latitude, par suite des deux sources d'erreurs, savoir de l'observation et de l'attraction locale, et qui donne 2,35 pour l'erreur moyenne d'une latitude par suite des seules perturbations locales, nous avons $b''\varphi = \mp 1,59$ pour la valeur de l'erreur probable dans une latitude, par suite des perturbations locales de la pesanteur.

Il est impossible d'admettre que les perturbations locales dans la direction de la pesanteur aient lieu uniquement dans le sens du méridien ou de la latitude. Nous sommes au contraire engagés à supposer que ces perturbations sont également possibles pour toutes les directions. Par conséquent $b''\varphi = \mp 1,59$ est l'expression générale du montant probable, dans une direction quelconque, de la déviation entre le zénith effectif et le zénith qui aurait lieu s'il n'y avait aucune perturbation locale. A ce $b''\varphi = \mp 1,59$ correspond un

$$b''A = \mp 1,59 \operatorname{tang} \varphi,$$

expression du montant probable de l'inexactitude dans la direction de la méridienne, ou de l'incertitude inhérente à l'azimut directement déterminé, d'un objet terrestre situé près de l'horizon, abstraction faite encore de l'erreur qui se trouve dans l'azimut par suite de l'observation. Voici les 9 valeurs $b''A$ pour les 9 points astronomiques de notre arc méridional :

	$b''A$		$b''A$
STARO-NEKRASSOWKA	$\mp 1,61$	NEMESCH.....	$\mp 2,24$
WODOLU.....	1,71	JACOBSTADT.....	2,40
SSIFRUNKOWZI....	1,81	DORPAT.....	2,58
KREMENETZ.....	1,90	MÄKI-PÄÄLYS....	2,76
BELIN.....	2,04		

Désignons $\mp b'G \mp b''A$ par bG et $\mp b'H \mp b''A$ par bH , en choisissant pour $b''A$ la valeur qui convient au point astronomique dont il est question, et nous aurons dans nos différents arcs :

I. bG'	$= \mp 0,44 \mp 1,61 = \mp 1,67$	bH'	$= \mp 0,74 \mp 1,71 = \mp 1,86$
II. bG''	$= \mp 1,09 \mp 1,71 = \mp 2,03$	bH''	$= \mp 1,09 \mp 1,81 = \mp 2,11$
III. bG'''	$= \mp 0,48 \mp 1,81 = \mp 1,90$	bH'''	$= \mp 0,78 \mp 1,90 = \mp 2,05$
IV. bG''''	$= \mp 0,35 \mp 1,90 = \mp 1,93$	bH''''	$= \mp 2,29 \mp 2,04 = \mp 3,07$
V. bG'''''	$= \mp 2,20 \mp 2,04 = \mp 3,00$	bH'''''	$= \mp 0,85 \mp 2,24 = \mp 2,40$
VI. bG''''''	$= \mp 0,57 \mp 2,24 = \mp 2,31$	bH''''''	$= \mp 0,53 \mp 2,40 = \mp 2,46$
VII. bG'''''''	$= \mp 0,53 \mp 2,40 = \mp 2,46$	bH'''''''	$= \mp 0,24 \mp 2,58 = \mp 2,59$
VIII. bG''''''''	$= \mp 0,24 \mp 2,58 = \mp 2,59$	bH''''''''	$= \mp 0,60 \mp 2,76 = \mp 2,82$

Examinons maintenant la signification de dg et dh , en considérant pour ce but le polygone *EILNQZE*, pl. XXVI, fig. 1. Ce polygone nous présente à sa périphérie 6 angles polygonaux dont deux sont $IEZ = g$ et $QZE = h$, les autres sont I, L, N, Q . La somme de tous ces angles polygonaux, $g + I + L + N + Q + h$, sera dans le cas de notre figure $= 720^\circ + \mathcal{C}$, en désignant par \mathcal{C} la somme des excès e, e', e'', e''' des triangles polaires successifs *EIL, ELN, ENQ, EQZ*. Il est évident que \mathcal{C} est indépendant des petites inexactitudes qui peuvent avoir lieu dans les 6 angles polygonaux, d'où suit que

$$dg + dh + dI + dL + dN + dQ = 0 \tag{10}$$

L'angle I est la somme des deux angles i et i' , qui appartiennent aux deux premiers triangles de continuation *EIK* et *KIL*. Également: $L = 'l + l + l', N = 'n + n + n', Q = 'q + q$. Donc en remplaçant I par $i + i'$ etc., nous aurons :

$$dg + dh + di + di' + d'l + dl + dl' + d'n + dn + dn' + d'q + dq = 0. \tag{11}$$

Dans chaque triangle de continuation, p. e. *IKL*, la somme des trois angles $i' + k + l$ étant compensée à $180^\circ +$ l'excès, il s'en suit que $di' + d'l = -dk, dl' + d'n = -dm, dn' + d'q = -dp$; donc en substituant ces valeurs en (11)

$$dg + dh + di - dk + dl - dm + dn - dp + dq = 0;$$

$$\text{ou} \quad -(dg + dh) = +(di + dl + dn + dq) - (dk + dm + dp);$$

c. à d. — $(dg + dh)$ est égal à la somme des corrections pour les angles *intermédiaires*, p. 1, *i, l, n, q* situés dans la figure du côté gauche, moins la somme des corrections pour les angles *intermédiaires* *k, m, p* situés du côté droit. Quoique le raisonnement que nous venons de faire, ne soit relatif qu'à la figure de la planche XXVI, il est cependant clair qu'un raisonnement analogue conduit au même résultat, pour chaque cas spécial, et qu'en général $-(dg + dh)$ représente la somme des corrections à appliquer aux angles intermédiaires situés du côté où se trouvent les côtés *EI* et *ZQ*, dont les azimuts ont été déterminés par l'observation, moins la somme des corrections des angles intermédiaires, situés de l'autre côté; et que le nombre des termes dont est composé cet équivalent de $-(dg + dh)$, est égal au nombre des triangles de continuation qui effectuent la jonction entre les points *E* et *Z*. Pour notre but, il n'est point question de ces corrections réelles $dg + dh = d(g + h)$, mais uniquement des erreurs probables en *g* et *h*, ou des $\text{b}g$ et $\text{b}h$. Le montant de $\text{b}(g + h)$ se trouve facilement. Car si *z* est le nombre des triangles de continuation qui joignent les points *E* et *Z*, et si ϵ' est l'erreur probable d'un angle de ces triangles, nous aurons $\text{b}(g + h) = \epsilon' \sqrt{z}$, ou pour le cas exceptionnel de l'inégalité des ϵ' dans les différents triangles $(\text{b}(g + h))^2 = [\epsilon' \epsilon']$. Dès que $\text{b}(g + h)$ est connu, on a, pour satisfaire aux moindres carrés, $\text{b}g = \text{b}h = \text{b}(g + h) : \sqrt{2}$. Nous pouvons employer ici sans hésitation les valeurs ϵ' que présente § 42 p. 155, quoique ces ϵ' se rapportent aux valeurs des angles obtenues par la compensation, de chaque triangle à part, à la somme de $180^\circ +$ l'excès. A cette première compensation est bien survenue une seconde, celle qui dépend de ce que toutes les bases ont concouru à la détermination finale des angles et des côtés. Mais les corrections qui ont dû être portées sur les angles intermédiaires, pour satisfaire à cette seconde compensation, § 47, p. 169 à 189, et qui en moyenne ne s'élèvent qu'à $\mp 0''028$, sont si minimes que les erreurs probables des angles n'en ont pu éprouver aucune altération sensible, pas même de $0''001$. Dans la jonction entre les points extrêmes du premier arc partiel, STARO-NEKRASSOWKA et WODOŁUI, il y a 21 triangles pour lesquels l'erreur probable d'un angle compensé est $\epsilon' = \mp 0''565$, p. 155, d'où suit que, pour cet arc, $\text{b}(g + h) = \mp 0''565 \sqrt{21} = \mp 2''59$ et que $\text{b}g = \text{b}h = \mp 1''83$. Voici la liste des $\text{b}(g + h)$ et des $\text{b}g = \text{b}h$ de nos 8 arcs partiels:

Arc.	$\text{b}(g + h)$	$\text{b}g = \text{b}h$	Arc.	$\text{b}(g + h)$	$\text{b}g = \text{b}h$
I.	$\mp 2''59$	$\mp 1''83$	V.	3''31	2''34
II.	2,66	1,88	VI.	2,86	2,02
III.	2,68	1,89	VII.	1,41	1,00
IV.	2,77	1,96	VIII.	1,11	0,78.

Nous avons encore à déterminer $d\mu$. Si, dans l'expression (5), p. 308,

$$\mu = (\lg \cos \varphi - \lg \cos \varphi') + (\eta - \eta'),$$

nous supposons φ et φ' sujets aux corrections $d\varphi$ et $d\varphi'$, exprimées en secondes, et si f et f' indiquent les changements de $\lg \cos \varphi$ et de $\lg \cos \varphi'$, pour une augmentation d'une seconde dans l'angle φ ou φ' , nous trouvons :

$$d\mu = f d\varphi - f' d\varphi' + d(\eta - \eta')$$

Quant à $d(\eta - \eta') = d \lg (1 - (1 - \rho^2) \sin^2 \varphi)^{-1} - d \lg (1 - (1 - \rho^2) \sin^2 \varphi')^{-1}$, d'après (3), nous n'avons qu'à considérer $d\rho$, l'influence de $d\varphi$ et de $d\varphi'$ pouvant être prise pour évanouissante, et nous aurons avec une exactitude suffisante :

$$\frac{d(\eta - \eta')}{\text{mod. log. brigg.}} = \rho (\sin^2 \varphi' - \sin^2 \varphi) d\rho.$$

En mettant $\rho = 0,9966071$ p. 84, on obtient l'expression :

$$d(\eta - \eta') = 0,4328 (\sin^2 \varphi' - \sin^2 \varphi) d\rho,$$

ce qui nous conduit à

$$d\mu = f d\varphi - f' d\varphi' + 0,433 (\sin^2 \varphi' - \sin^2 \varphi) d\rho.$$

Pour parvenir à l'erreur probable $\delta\mu$ nous remplaçons $d\rho$ par $\delta\rho = \mp 0,0000197$, p. 84, et nous avons $\delta\varphi = \delta\varphi' = \mp 0,50 \mp 1,59 = \mp 1,667$, quantité obtenue par la réunion de l'erreur probable 0,50 dans la latitude observée, p. 214, avec l'erreur probable de la latitude, que font naître les déviations locales, p. 314, et qui est identique pour toutes les latitudes, donc :

$$\delta\mu = \mp \sqrt{1,667^2 (f^2 + f'^2) + 0,0000854^2 (\sin^2 \varphi' - \sin^2 \varphi)^2}.$$

Les valeurs suivantes $d\mu$, calculées sur cette formule pour nos 8 arcs partiels, sont exprimées en unités et fractions de la 7-me décimale :

Arc.	$d\mu$	Arc.	$d\mu$
I.	∓ 51.82	V.	∓ 66.98
II.	55.00	VI.	72.57
III.	58.01	VII.	77.87
IV.	61.60	VIII.	83.84.

Pour calculer les différents $\delta\mathcal{C}$, voici les différents coefficients de la formule (10), p. 312 :

Arc.	$\frac{\alpha + \beta}{2\beta}$	$\frac{\alpha + \beta}{2\alpha}$	$\lg \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta}$	Arc.	$\frac{\alpha + \beta}{2\beta}$	$\frac{\alpha + \beta}{2\alpha}$	$\lg \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta}$
I.	1,016	0,985	7,4453	V.	1,031	0,971	7,0347
II.	1,030	0,971	8,6239	VI.	1,025	0,976	7,8944
III.	1,018	0,983	8,4043	VII.	1,028	0,973	8,0711
IV.	1,022	0,979	7,8667	VIII.	1,026	0,975	7,5546.

Avec ces coefficients et les quantités bG , bH , bg , bh et $b\mu$, réunies pour les différents arcs dans le tableau qui suit, nous parvenons aux trois termes \mathcal{Q}^2 , \mathcal{M}^2 , \mathcal{R}^2 , p. 312, dont la somme donne les $(b\mathcal{C})^2$.

Arc.	bG	bg	bH	bA	$b\mu$	$(bG)^2 + (bg)^2$	$(bH)^2 + (bA)^2$	\mathcal{Q}^2	\mathcal{M}^2	\mathcal{R}^2	$(b\mathcal{C})^2$
I.	$\mp 1,67$	$\mp 1,83$	$\mp 1,86$	$\mp 1,83$	$\mp 51,82$	6,14	6,81	6,34	6,60	0,02	12,96
II.	2,03	1,88	2,11	1,88	55,00	7,65	7,98	8,13	7,52	5,35	21,00
III.	1,90	1,89	2,05	1,89	58,01	7,18	7,77	7,44	7,51	2,17	17,12
IV.	1,93	1,96	3,07	1,96	61,60	7,57	13,27	7,90	12,73	0,21	20,84
V.	3,00	2,34	2,40	2,34	66,98	14,48	11,24	15,40	10,59	0,01	26,00
VI.	2,31	2,02	2,46	2,02	72,57	9,42	10,14	9,88	9,67	0,32	19,87
VII.	2,46	1,00	2,59	1,00	77,87	7,06	7,72	7,46	7,31	0,84	15,61
VIII.	2,59	0,78	2,82	0,78	83,84	7,32	8,56	7,70	8,14	0,09	15,93.

Voici enfin le tableau des erreurs probables $b\mathcal{C}$ et des différences effectives $d\mathcal{C}$, pour nos arcs :

Arc.	$b\mathcal{C} =$ $\frac{d\mathcal{C}}{\mp}$	$d\mathcal{C} =$ $\frac{d\mathcal{C}}{=}$	Arc.	$b\mathcal{C} =$ $\frac{d\mathcal{C}}{\mp}$	$d\mathcal{C} =$ $\frac{d\mathcal{C}}{=}$
I.	3,60	$\mp 7,51$	V.	5,10	$\mp 5,50$
II.	4,58	$\mp 3,90$	VI.	4,46	$\mp 20,98$
III.	4,14	$\mp 9,22$	VII.	3,95	$\mp 0,46$
IV.	4,57	$\mp 0,26$	VIII.	3,99	$\mp 1,66.$

La comparaison de ces chiffres nous fait voir, que quatre fois la différence effective $d\mathcal{C}$ a été plus grande et autant de fois plus petite que la différence probable. Il se présente cependant dans l'arc VI le cas extraordinaire que le $d\mathcal{C}$ est égal à 4,70 fois $b\mathcal{C}$, ce qui nous engage à séparer cet arc des 7 autres et à l'examiner à part. Désignons, pour ces autres arcs, l'erreur moyenne ou attendue $\frac{b\mathcal{C}}{0,67449}$ par W , en mettant la différence effective $d\mathcal{C} = U$, comme nous l'avons fait pour un cas analogue p. 155, et nous pourrions comparer les U^2 et W^2 .

Arc.	Carré effectif U^2 .	Carré attendu W^2 .
I.	56,40	28,48
II.	15,21	46,11
III.	85,00	37,67
IV.	0,07	45,90
V.	30,25	57,17
VII.	0,21	34,29
VIII.	2,76	34,99
Somme	189,90	284,61

Nous avons ici, en moyenne par les sommes :

$$\frac{v^2}{w^2} = 0,667 \qquad \frac{v}{w} = 0,817.$$

Le même résultat se présente donc, dans ces 7 arcs, que celui qui a été indiqué par la comparaison des 5 bases, p. 156, savoir un $\frac{v}{w}$ inférieur à l'unité. D'où suit que la comparaison des azimuts, déterminés aux points extrêmes de ces 7 arcs, donnent des différences effectives même inférieures à ce qu'il fallait attendre par l'évaluation des erreurs probables; ou que nous n'avons aucun indice, dans cette comparaison, que les azimuts observés et les angles des polygones soient sujets à des erreurs plus fortes, que celles que nous leur avons assignées par un examen scrupuleux des effets des différentes sources d'erreur.

Revenons maintenant à l'arc VI qui a montré une différence des azimuts 4,70 fois plus grande que l'erreur probable, ou dans lequel $U^2 = 440,16$, $W^2 = 43,71$, $\frac{v^2}{w^2} = 10,07$, $\frac{v}{w} = 3,18$. C'est un cas hors de toute vraisemblance. Donc il paraît que, dans l'arc compris entre NEMESCH et JACOBSTADT, soit l'exactitude de la mesure des angles a été essentiellement au dessous de celle que nous avons indiquée p. 155, ou qu'à NEMESCH et à JACOBSTADT il y a eu des perturbations extraordinaires dans la direction de la pesanteur. Mais deux circonstances parlent très-distinctement contre cette seconde hypothèse. C'est que l'azimut de NEMESCH s'accorde très-bien avec l'azimut de BELIN, et que celui de JACOBSTADT est confirmé par l'azimut de DONPAT. En second lieu, les trois latitudes voisines, de BELIN, de NEMESCH et de JACOBSTADT, comparées entre elles dans l'hypothèse d'une ellipse moyenne ne manifestent aucune irrégularité frappante, voir *Astronom. Nachr.* No. 438, p. 115. Il ne nous reste par conséquent que de supposer une exactitude inférieure des angles dans les triangles de cet arc. En effet, la plupart de ces angles ayant été mesurés avant 1827, le principe de la répétition par des mouvements opposés, voir p. 23 et 148, n'y a pas été observé. C'est dans cette circonstance que je crois trouver la source de l'infériorité des angles de l'arc entre NEMESCH et JACOBSTADT, prononcée dans la comparaison des azimuts. L'inexactitude indiquée des angles a agi par préférence sur la direction de la diagonale, sans déroger essentiellement à la justesse des côtés, celle-ci étant constatée d'une manière satisfaisante par l'accord entre les deux bases d'OSSOWNITZA et de PONEDELI, voyez p. 125. Il s'en suit que, pour l'arc VI, il existe une incertitude plus grave des azimuts de la ligne géodésique qui en réunit les points extrêmes, et qu'il faut remplacer le $b\mathcal{G} = \mp 4''46$ par $b\mathcal{G} = \mp 4''46 \cdot 3,18 = \mp 14''16$.

§ 65. Compensation des azimuts déterminés aux points extrêmes des arcs partiels.

La comparaison des deux azimuts \mathfrak{A}^N et \mathfrak{B}^N , en les contrôlant, doit en même temps conduire à une compensation réciproque de ces deux angles. Désignons les deux azimuts compensés par $\mathfrak{A}^N + x$ et $\mathfrak{B}^N + y$; ces deux quantités doivent répondre à l'équation (4), p. 308 :

$$\lg \sin (\mathfrak{A}^N + x) + \lg \cos \varphi + \eta = \lg \sin (\mathfrak{B}^N + y) + \lg \cos \varphi' + \eta'.$$

Pour trouver les inconnues x et y , nous aurons, si p indique le poids de \mathfrak{A}^N , q le poids de \mathfrak{B}^N , à satisfaire aux deux conditions

$$\alpha x + \beta y = f \quad \text{et} \quad p x^2 + q y^2 = \text{minimum},$$

f étant pris dans la signification que lui donne la formule (7*), p. 311. Les valeurs numériques de f se trouvent p. 312. Les deux conditions énoncées conduisent à :

$$x = \frac{q \alpha f}{q \alpha^2 + p \beta^2}$$

$$y = \frac{p \beta f}{q \alpha^2 + p \beta^2},$$

en mettant, selon p. 316,

$$p = \frac{1}{(bG)^2 + (bH)^2} \quad ; \quad q = \frac{1}{(bH)^2 + (bL)^2}.$$

Seulement pour l'arc VI il nous faut multiplier les deux dénominateurs p. 316, par $\frac{U^2}{V^2} = 10,07$.

Voici maintenant le tableau soit des quantités qui entrent dans le calcul des x et y , soit des valeurs trouvées x et y , pour nos 8 arcs partiels, les chiffres f , α , β représentant des unités de la septième décimale. J'omettrai les signes de ces trois quantités, vu que les signes des x et y se déduisent directement des dG .

Arc.	$\lg f$	$\lg \alpha$	$\lg \beta$	$\lg p$	$\lg q$	x	y
I.	3,4305	2,5616	2,5480	9,2118	9,1669	+ 3,618	— 3,893
II.	1,9675	1,3892	1,3634	9,1163	9,0980	— 1,966	+ 1,932
III.	2,5606	1,6033	1,5881	9,1439	9,1096	— 4,511	+ 4,714
IV.	1,5575	2,1427	2,1242	9,1209	8,8771	+ 0,100	— 0,167
V.	3,7061	2,9786	2,9522	8,8392	8,9492	+ 3,164	— 2,312
VI.	3,4272	2,1160	2,0950	8,0229	7,9902	— 10,347	+ 10,630
VII.	1,5888	1,9410	1,9170	9,1512	9,1124	— 0,224	+ 0,232
VIII.	2,6660	2,4564	2,4346	9,1355	9,0675	— 0,787	+ 0,876.

Si nous appliquons les x et y trouvés aux azimuts \mathfrak{A}^N et \mathfrak{B}^N que contient le tableau p. 307, nous parvenons aux azimuts compensés ou définitifs de nos arcs partiels et que nous désignons par \mathfrak{A}_c^N et \mathfrak{B}_c^N . A côté de ces azimuts nous plaçons les $\lg r$ des distances entre les couples de points extrêmes.

Tableau des azimuts compensés et des distances définitives, pour les huit arcs partiels.

I.	{ STARO-NEKRASSOWKA	$\mathcal{A}'_c = 3^{\circ} 18' 24,988$	$\lg r' = 4,9848914.4$
	{ WODOLUI.....	$\mathcal{B}'_c = 183 24 35,737$	
II.	{ WODOLUI.....	$\mathcal{A}''_c = 319 19 49,834$	$\lg r'' = 5,1192468.0$
	{ SSUPRUNKOWZI....	$\mathcal{B}''_c = 137 38 40,272$	
III.	{ SSUPRUNKOWZI....	$\mathcal{A}'''_c = 332 18 43,009$	$\lg r''' = 4,9395650.2$
	{ KREMENETZ.....	$\mathcal{B}'''_c = 151 28 28,714$	
IV.	{ KREMENETZ.....	$\mathcal{A}''''_c = 351 22 51,580$	$\lg r'''' = 5,0513246.3$
	{ BELIN.....	$\mathcal{B}''''_c = 171 0 30,293$	
V.	{ BELIN.....	$\mathcal{A}^r_c = 1 16 1,624$	$\lg r^r = 5,1727435.8$
	{ NEMESCH.....	$\mathcal{B}^r_c = 181 20 48,708$	
VI.	{ NEMESCH.....	$\mathcal{A}^{r'}_c = 9 9 34,103$	$\lg r^{r'} = 5,0300461.0$
	{ JACOBSTADT.....	$\mathcal{B}^{r'}_c = 189 36 16,160$	
VII.	{ JACOBSTADT.....	$\mathcal{A}^{r''}_c = 13 33 57,606$	$\lg r^{r''} = 5,0434741.3$
	{ DORPAT.....	$\mathcal{B}^{r''}_c = 194 17 39,622$	
VIII.	{ DORPAT.....	$\mathcal{A}^{r'''}_c = 4 12 37,313$	$\lg r^{r'''} = 4,9875244.9$
	{ MÄKI-PÄÄLYS.....	$\mathcal{B}^{r'''}_c = 184 25 29,636$	

L'exactitude des calculs se contrôle finalement de ce que, dans chaque arc, $\lg \sin \mathcal{B}^N - \lg \sin \mathcal{A}^N$ doit être égal au μ , qui a été donné § 64, p. 311 et 312. Voici le résultat de ce contrôle :

	Arc.	I.	II.	III.	IV.
$\lg \sin \mathcal{B}^N - \lg \sin \mathcal{A}^N$		133033.6	144407.5	118838.6	182341.6
μ		133032.9	144407.4	118838.7	182341.6
différence		0.7	0.1	0.1	0.0
correspondante à		0,002	0,004	0,003	0,000
	Arc.	V.	VI.	VII.	VIII.
$\lg \sin \mathcal{B}^N - \lg \sin \mathcal{A}^N$		265019.7	204193.3	222630.3	215427.5
μ		265020.1	204193.7	222630.2	215427.5
différence		0.4	0.4	0.1	0.0
correspondante à		0,000	0,003	0,001	0,000.

CHAPITRE XVII.

CALCUL DES DISTANCES DES PARALLÈLES, POUR LES HUIT ARCS PARTIELS.

§ 66. Voie de calcul.

Les quantités \mathfrak{A} , \mathfrak{B} et $\lg r$ du tableau p. 321 sont les données à l'aide desquelles les distances entre les parallèles qui coupent les points astronomiques successifs, sont à déterminer. Pour cette détermination, j'ai choisi la voie suivante.

Soient, pl. XXVI, fig. 2, P le pôle septentrional de la Terre, A et B les deux points astronomiques, situés aux deux extrémités de la ligne géodésique AB dont la longueur r a été déterminée. Il s'agit de trouver la distance D des deux cercles parallèles qui coupent A et B , savoir $D = PA - PB$, ou en prenant $PE = PB$ et $PG = PA$, de trouver une des deux quantités identiques

$$D^a = AE \quad \text{et} \quad D^b = BG.$$

Menons de B une ligne géodésique BC , perpendiculaire en C au méridien PA , et pareillement de A la ligne AF , perpendiculaire en F au méridien PB . Désignons AC par \mathfrak{M} , CE par m , BF par \mathfrak{M}' , FG par m' , nous aurons

$$\left. \begin{aligned} D^a &= \mathfrak{M} - m \\ D^b &= \mathfrak{M}' + m' \\ \hline \text{Moyenne } D &= \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'}{2} + \frac{m' - m}{2}. \end{aligned} \right\} (1)$$

Nous trouverons \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' par la résolution des triangles rectangulaires sur le sphéroïde, ABC et BAF , en faisant usage de l'excès sphérique, d'après l'analyse et les tables auxiliaires du Chap. VIII, p. 77 à 87. Dans chacun des deux triangles, les trois angles sont connus. Car en désignant dorénavant par \mathfrak{A} et \mathfrak{B}

les angles aigus qui correspondent aux \mathfrak{A} et \mathfrak{B} du tableau p. 321, et en indiquant les deux excès totaux des triangles ABC et BAF par ϵ et ϵ' , nous avons :

dans ABC , les angles $BAC = \mathfrak{A}$, $ACB = 90^\circ$ et $ABC = 90^\circ - \mathfrak{A} + \epsilon$

» BAF , » $ABF = \mathfrak{B}$, $BFA = 90^\circ$ et $BAF = 90^\circ - \mathfrak{B} + \epsilon'$.

Les angles plans correspondants seront

$$\mathfrak{A} - \alpha \quad 90^\circ - \epsilon \quad 90^\circ - \mathfrak{A} + \alpha + \epsilon$$

$$\mathfrak{B} - \alpha' \quad 90^\circ - \epsilon' \quad 90^\circ - \mathfrak{B} + \alpha' + \epsilon'$$

Mais $\alpha + \epsilon$ et $\alpha' + \epsilon'$ seront remplacés par $\frac{2}{3}\epsilon$ et $\frac{2}{3}\epsilon'$, sans commettre une erreur de 0,001, même dans celui de nos triangles qui présente la plus grande aire, voir p. 87, et nous aurons pour les angles plans les valeurs :

$$\mathfrak{A} - \frac{1}{3}\epsilon \quad 90^\circ - \frac{1}{3}\epsilon \quad 90^\circ - \mathfrak{A} + \frac{2}{3}\epsilon$$

$$\mathfrak{B} - \frac{1}{3}\epsilon' \quad 90^\circ - \frac{1}{3}\epsilon' \quad 90^\circ - \mathfrak{B} + \frac{2}{3}\epsilon'$$

A l'aide de ces angles nous trouvons :

$$\left. \begin{aligned} \lg \mathfrak{M} &= \lg r + \lg \cos (\mathfrak{A} - \frac{2}{3}\epsilon) + \text{compl. } \lg \cos \frac{1}{3}\epsilon \\ \lg \mathfrak{M}' &= \lg r + \lg \cos (\mathfrak{B} - \frac{2}{3}\epsilon') + \text{compl. } \lg \cos \frac{1}{3}\epsilon'. \end{aligned} \right\} (2)$$

Pour le calcul des excès ϵ et ϵ' j'ai fait usage des chiffres donnés p. 84, $g = 57019,75$ toises et $\varphi = \frac{b}{a} = \frac{293,73}{294,73}$. Ces deux quantités sont cependant sujettes aux incertitudes indiquées, p. 84, par $b_g = \mp 1,15$ toise et $b_\varphi = \mp 0,0000197$. En substituant ces valeurs dans la formule (14), p. 82, nous parvenons à :

$$\frac{b\epsilon}{c} = \sqrt{(0,0000403^2 + 0,0000197^2(1 - 2 \cos 2\varphi)^2)},$$

et dans l'étendue de nos opérations :

pour $\varphi = 45^\circ$,	$\frac{b\epsilon}{c} = \mp 0,0000449$
50	483 ³⁴
55	522 ³⁰
60	564 ⁴²
65	604 ⁴⁰
70	641 ³⁷
75	672 ³¹

Afin de voir quelle est l'influence d'un $b\epsilon$ sur la valeur $\frac{1}{2}(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')$, cherchée par l'expression (2), nous prendrons un triangle moyen entre ABC et BAF , avec $\frac{\epsilon + \epsilon'}{2} = \epsilon$, et $\frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'}{2} = \mathfrak{M}$, et nous aurons

$$b\mathfrak{M} = \frac{1}{3}r \cdot bc \cdot \sin 1'' (\sin \mathfrak{A} + \sin \mathfrak{B}).$$

C'est ainsi que nous trouvons, pour nos 8 arcs partiels, les quantités que voici :

	$\frac{d\epsilon}{\epsilon}$	ϵ	$b\epsilon$	$b\mathfrak{M}$	
arc I.	$\mp 0,0000457$	5,3	$\mp 0,0002$	$\mp 0,00000$	toise
» II.	469	82,7	0,0039	0,00110	»
» III.	479	30,3	0,0014	0,00018	»
» IV.	491	18,4	0,0009	0,00005	»
» V.	509	4,9	0,0002	0,00000	»
» VI.	527	17,7	0,0009	0,00005	»
» VII.	542	27,4	0,0015	0,00013	»
» VIII.	557	6,8	0,0004	0,00001	»

La dernière colonne de ce petit tableau fait voir que l'influence qu'exerce l'incertitude dans les dimensions de la Terre, est entièrement insignifiante pour les \mathfrak{M} , la plus grande valeur de $b\mathfrak{M}$, n'étant que de 0,0011 toise.

Les considérations suivantes conduisent à déterminer $CE = m$. La latitude de B étant connue $= \chi$ et égale à celle de E , il s'agit de trouver la latitude ψ du point C , et d'exprimer $\psi - \chi$ en toises. Donc, en désignant par σ la valeur d'une seconde de l'arc du méridien, pour la latitude $\frac{1}{2}(\chi + \psi)$, nous aurons

$$m = \sigma (\psi - \chi). \quad (3)$$

Désignons

par v la latitude réduite, correspondante à la latitude effective χ
 » w » » » » » » ψ .

L'une de ces deux latitudes réduites, v est donnée par $\text{tang } v = \rho \text{ tang } \chi$. Maintenant considérons le triangle PCB , formé sur le sphéroïde entre B , C et le pôle P . Nous y avons l'angle $PCB = 90^\circ$, l'angle $PBC = 90^\circ - ((\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \epsilon)$ ou,

$$\text{en mettant } (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + \epsilon = f, \quad PBC = 90^\circ - f.$$

La relation connue entre les azimuts et les latitudes réduites nous fournit ici :

$$\cos w = \cos v \cdot \cos f \quad \text{et} \quad \text{tang } \psi = \frac{\text{tang } w}{\rho}. \quad (4)$$

Mais la différence cherchée $\psi - \chi$ peut être déduite aussi des deux expressions rigoureuses :

$$\sin (w - v) = \frac{\cos^2 v \sin^2 f}{\sin (v + w)} \quad (5)$$

$$\sin (\psi - \chi) = \sin (w - v) \sqrt{\left(\frac{\sin 2\chi \sin 2\psi}{\sin 2v \sin 2w} \right)}. \quad (6)$$

En considérant que, dans nos calculs, $\omega - v$ et $\psi - \chi$ ne montent jamais à $90''$, nous aurons

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos^2 v \sin^2 f}{\sin 1''} &= Q \text{ secondes,} & \omega - v &= \frac{Q}{\sin(v + \omega)} \\ \psi - \chi &= (\omega - v) \cdot \frac{\sin(\chi + \psi)}{\sin(v + \omega)} & &= \frac{\sin(\chi + \psi)}{\sin^2(v + \omega)} Q. \end{aligned} \right\} (7)$$

Pour trouver en (7) $v + \omega$ et $\chi + \psi$, nous faisons

$$\begin{aligned} v + \omega &= 2v + (\omega - v), \text{ en prenant } \omega - v = \frac{Q}{\sin 2v} \\ \chi + \psi &= 2\chi + (\psi - \chi), \quad \psi - \chi = (\omega - v) \frac{\sin 2\chi}{\sin 2v} \text{ ou } \psi - \chi = \omega - v. \end{aligned}$$

Le calcul de $FG = m'$, relatif au triangle BAF , est analogue à celui de $CE = m$. Nous aurons, en désignant les latitudes de A et de F par φ et ω , et les latitudes réduites correspondantes par u et x , et en mettant $(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) - \epsilon' = f'$:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos u \cos f' \\ \text{tang } \omega &= \frac{\text{tang } x}{\rho} \\ \frac{\cos^2 u \cdot \sin^2 f'}{\sin 1''} &= Q' \\ x - u &= \frac{Q'}{\sin(u + x)} \\ \omega - \varphi &= \frac{\sin(\varphi + \omega)}{\sin^2(u + x)} Q' \end{aligned}$$

et $m' = (\omega - \varphi)\sigma'$, en prenant le σ' de la latitude $\frac{1}{2}(\varphi + \omega)$.

La rigueur du calcul exige que nous employions les valeurs σ et σ' , qui correspondent aux dimensions de la Terre adoptées dans les autres parties du calcul. Les tables de M. Encke, *Berliner Jahrbuch* 1852, p. 343 à 381, donnent la valeur g du degré du méridien de $10'$ à $10'$, depuis l'équateur jusqu'au pôle, et fournissent, par une simple interpolation, le $\sigma = \frac{g}{3600}$ pour chaque latitude donnée. Les g de ces tables sont basés sur

	toises		
la valeur moyenne d'un degré	$g = 57013,11$	avec le carré de l'excentricité	$E = 0,00667437$.
tandis que j'ai à employer	$g = 57019,75$	» » » » »	$E = 0,00677436$;
donc pour la réduction	$dg = + 6,64$	» » » » »	$dE = + 0,0001000$.

Voyez p. 83. Mais

$$d \lg g = d \lg g + \frac{3}{2} (\sin^2 \varphi - \frac{1}{2}) dE,$$

ou dans notre cas

$$d \lg g = 0,0000506 + 0,0001500 (\sin^2 \varphi - \frac{1}{2}).$$

La table suivante donne les $d \lg g = \tau$, pour les degrés depuis $\varphi = 45^\circ$ jusqu'à $\varphi = 71^\circ$.

$\varphi =$	$\tau =$	$\varphi =$	$\tau =$	$\varphi =$	$\tau =$
45°	+ 0,0000506	54°	+ 0,0000738	63°	+ 0,0000947
	²⁶		²⁵		²¹
46	532	55	763	64	968
	²⁶		²⁴		²⁰
47	558	56	787	65	988
	²⁶		²⁴		²⁰
48	584	57	811	66	0,0001008
	²⁶		²⁴		¹⁹
49	610	58	835	67	1027
	²⁶		²³		¹⁹
50	636	59	858	68	1046
	²⁶		²³		¹⁷
51	662	60	881	69	1063
	²⁵		²²		¹⁸
52	687	61	903	70	1081
	²⁶		²²		¹⁶
53	713	62	925	71	1097
	²⁵		²²		

Exemple. Calcul de D^a pour l'arc II, par le triangle ABC.

DONNÉES DE DÉPART.

En A, $\varphi = 47^\circ 1' 25''$, p. 307 ; $\mathfrak{A} = 40^\circ 40' 10,166$, p. 321 ; $\lg \rho = -0,0014760$, p. 84 ;
 » B, $\chi = 48 45 3$ » » ; $\mathfrak{B} = 42 21 19,728$ » » ; $\epsilon = 82,395$, p. 87.
 $\lg r = 5,119246800$ » » .

CALCUL DE \mathfrak{M} .

$\mathfrak{A} - \frac{2}{3}\epsilon = 40^\circ 39' 15,236$, $\lg \cos = 9,880044318$
 Compl. $\lg \cos \frac{1}{3}\epsilon = + 4$
 $\lg r = 5,119246800$
 $\lg \mathfrak{M} = 4,999291122$
 $\mathfrak{M} = 99836,9080$ toises.

CALCUL DE m.

$\lg \tan \chi = 0,0570248$	$v = 48^\circ 39' 15,4$	$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = 1^\circ 41' 9,562$	$\lg \sin^2 f = 6,9490476$
$\lg \rho = -14760$	$2v = 97 18 30,8$	$\epsilon = 1 22,395$	$\lg \cos^2 v = 9,6398785$
$\lg \tan v = 0,0555488$	$\frac{w-v}{\psi-\chi} = 1 20,7$	approx. $f = 1 42 31,957$	Compl. $\lg \sin 1'' = 5,3144251$
	$v+w = 97 19 51,5$		$\lg Q = 1,9033512$
	$2\chi = 97 30 6,0$		$\lg \sin 2v = 9,99646$
	$\chi + \psi = 97 31 26,7$		$\lg(w-v) = 1,90689$
			approximation $w-v = 80,70 = \psi - \chi$.

$$\lg \sin(\chi + \psi) = 9,9962445$$

$$\lg \sin^2(v + w) = 9,9928706$$

$$\text{différence} = 0,0033739$$

$$\lg Q = 1,9033512$$

$$\lg(\psi - \chi) = 1,9067251$$

$$\lg \sigma = 1,2000138$$

$$\lg m = 3,1067389$$

$$\psi - \chi = 80^{\circ}67243$$

$$m = 1278,6124$$

$$\text{Pour } \frac{1}{2}(\chi + \psi) = 48^{\circ}45'43''$$

nous avons dans les tables

$$\text{de M. Encke, } 1^{\circ} = 57050,03 \text{ toises}$$

$$1'' = 15,84723 \text{ »}$$

$$\lg 1'' = 1,1999534$$

$$\text{Correction } \tau = + 604$$

$$\lg \sigma = 1,2000138.$$

RÉSULTAT.

$$M = 99836,9080 \text{ toises}$$

$$-m = - 1278,6124 \text{ »}$$

$$D^a = 98558,2956 \text{ toises.}$$

§ 67. Calcul des distances des parallèles.

Dans ce paragraphe je réunirai les matériaux relatifs au calcul des distances des parallèles, pour nos huit arcs partiels, savoir :

- 1) les données de départ pour les 8 différents calculs. L'exemple p. 326 en présente les renvois. Les excès e et e' sont du nombre des données de départ, la méthode d'après laquelle ils sont à calculer, ayant été expliquée dans le Chapitre VIII, p. 77 à 87;
- 2) les chiffres principaux que présente le développement du calcul, et qui répondent aux formules du § 66;
- 3) les deux valeurs D^a et D^b , des distances entre les parallèles de chaque arc, valeurs relatives aux deux triangles ABC et BAF , pl. XXVI, fig. 2, et qui doivent être de très-près identiques. Le D définitif sera la moyenne arithmétique de D^a et D^b .

	Arc I.	Arc II.	Arc III.	Arc IV.
<i>Données de départ.</i>				
φ =	45° 20' 3"	47° 1' 25"	48° 45' 3"	50° 5' 50"
χ =	47 1 25	48 45 3	50 5 50	52 2 42
\mathfrak{M} =	3 18 24,988	40 40 10,166	27 41 16,991	8 37 8,420
\mathfrak{B} =	3 24 35,737	42 21 19,728	28 31 31,286	8 59 29,707
$\lg r$ =	4,9848914.4	5,1192468.0	4,9395650.2	5,0513246.3
c =	5",173	82",395	20",965	18",046
c' =	5",334	83",000	30",561	18",803
<i>Chiffres fournis par le calcul.</i>				
1) DES TRIANGLES <i>ABC.</i>				
$\mathfrak{M} - \frac{2}{3}c$ =	3° 18' 21",539	40° 39' 15",236	27° 40' 57",014	8° 36' 56",389
f =	0 6 15,922	1 42 31,957	0 50 44,260	0 22 39,333
v =	46 55 35,3	48 39 15,4	50 0 4,9	51 57 1,9
$\lg Q$ =	9,5045285	1,9033512	1,2686171	0,5318627
$v + w$ =	93° 51' 10",9	97° 19' 51",5	100° 0' 28",7	103° 54' 7",3
$\chi + \psi$ =	94 2 50,3	97 31 26,7	100 11 58,8	104 5 27,5
$\lg \sigma$ =	1,1998775	1,2000138	1,2001179	1,2002688
$\psi - \chi$ =	0",3202	80",6724	18",8372	3",5028
\mathfrak{M} =	96420,2127	99836,9080	77049,7103	111274,5784
$-m$ =	- 5,0733	-1278,6124	- 298,6312	- 55,5502
D^a =	96415,1394 toises.	98558,2956 toises.	76751,0791 toises.	111219,0282 toises.
2) DES TRIANGLES <i>BAF.</i>				
$\mathfrak{B} - \frac{2}{3}c'$ =	3° 24' 32",181	42° 20' 24",395	28° 31' 10",912	8° 59' 17",172
f' =	0 6 5,415	1 39 46,562	0 49 43,734	0 22 2,484
u =	45 14 12,5	46 55 35,3	48 39 15,4	50 0 4,9
$\lg Q'$ =	9,5065129	1,9085681	1,2749431	0,5444615
$u + x$ =	90° 28' 25",3	93° 52' 31",8	97° 18' 49",8	100° 0' 13",4
$\varphi + \omega$ =	90 40 6,3	94 4 11,2	97 30 25,0	100 11 43,6
$\lg \sigma'$ =	1,1997446	1,1998784	1,2000131	1,2001176
$\omega - \varphi$ =	0",3210	81",1821	18",9802	3",5551
\mathfrak{M}' =	96410,0486	97271,3915	76450,8685	111162,6341
$+m'$ =	+ 5,0846	+1286,2891	+ 300,8249	+ 56,3604
D^b =	96415,1332 toises.	98557,6806 toises.	76751,6934 toises.	111218,9945 toises.

	Arc V.	Arc VI.	Arc VII.	Arc VIII.
<i>Données de départ.</i>				
φ =	52° 2' 42"	54° 39' 6"	56° 30' 5"	58° 22' 48"
χ =	54 39 6	56 30 5	58 22 48	60 4 29
\mathfrak{M} =	1 16 1,624	9 9 34,103	13 33 57,606	4 12 37,313
\mathfrak{B} =	1 20 48,708	9 36 16,160	14 17 39,622	4 25 29,636
r =	5,1727435.8	5,0300461.0	5,0434741.3	4,9875244.9
c =	4",707	17",336	26",748	6",635
c' =	5",004	18",150	28",070	6",972
<i>Chiffres fournis par le calcul,</i>				
1) DES TRIANGLES ABC.				
$\mathfrak{M} - \frac{2}{3}c$ =	1° 15' 58",486	9° 9' 22",546	13° 33' 39",774	4° 12' 32",890
f =	0 4 51,791	0 26 59,393	0 44 8,764	0 12 58,958
v =	54 33 35,0	56 24 42,2	58 17 34,8	59 59 25,6
$\lg Q$ =	9,1423555	0,5900669	0,9729069	9,8667927
$v + w$ =	109° 7' 10",1	112° 49' 28",6	116° 35' 20",1	119° 58' 52",1
$\chi + \psi$ =	109 18 12,1	113 0 14,2	116 45 46,5	120 8 58,9
$\lg \sigma$ =	1,2004644	1,2006006	1,2007349	1,2008524
$\psi - \chi$ =	0",1467	4",2160	10",4903	0",8481
\mathfrak{M} =	148811,8485	105797,8330	107446,9992	96906,1905
$-m$ =	- 2,3280	- 66,9121	- 166,5423	- 13,4677
D^a =	148809,5205 toises.	105730,9209 toises.	107280,4569 toises.	96892,7228 toises.
2) DES TRIANGLES BAF.				
$\mathfrak{B} - \frac{2}{3}c'$ =	1° 20' 45",372	9° 36' 4",060	14° 17' 20",909	4° 25' 24",988
f' =	0 4 42,080	0 26 23,907	0 43 13,946	0 12 45,351
u =	51 57 1,9	54 33 35,0	56 24 42,2	58 17 34,8
$\lg Q'$ =	9,1659627	0,6116631	0,9992723	9,8495643
$u + x$ =	103° 54' 4",0	109° 7' 14",3	112° 49' 35",2	116° 35' 10",5
$\varphi + \omega$ =	104 5 24,2	109 18 16,3	113 0 20,8	116 45 36,9
$\lg \sigma'$ =	1,2002687	1,2004646	1,2006006	1,2007349
$\omega - \varphi$ =	0",1508	4",3234	10",8172	0",8759
\mathfrak{M}' =	148807,1302	105662,2425	107108,9914	96878,8155
$+m'$ =	+ 2,3921	+ 68,5943	+ 171,6786	+ 13,9050
D^b =	148809,5223 toises.	105730,8368 toises.	107280,6700 toises.	96892,7205 toises.

Bessel, dans son excellent ouvrage sur la mesure d'un arc de méridien en Prusse, *Gradmessung in Ostpreussen von Bessel und Baeyer*, Berlin 1838, p. 446, a donné une formule aussi élégante que commode, pour trouver la distance des parallèles, à l'aide de la longueur de la ligne géodésique et des deux azimuts de cette ligne, déterminés aux extrémités. J'ai fait usage de cette formule pour avoir un contrôle du calcul que j'avais fait par une voie essentiellement différente. En désignant par S nos distances finales $D = \frac{D^a + D^b}{2}$, par B les distances calculées sur la formule de Bessel, avec l'emploi des dimensions corrigées de la Terre, données p. 84, j'ai rencontré les huit différences que voici :

arc :	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
$S - B =$	- 0,001	- 0,027	- 0,009	0,000	0,000	+ 0,020	+ 0,002	+ 0,001

Ces $S - B$ peuvent être regardés comme évanouissants, et il est évident que les deux voies de calcul ont conduit à des résultats identiques. La formule de Bessel, en évitant le calcul des excès, a l'avantage d'un calcul plus court. Mais l'autre voie, en suivant de plus près la marche géométrique du problème, conduit à une évaluation de l'erreur que peuvent produire, dans le résultat du calcul, soit l'hypothèse inévitable sur les dimensions moyennes de la Terre, soit les irrégularités locales.

§ 68. Résultats que donne le calcul des distances des parallèles.

Les calculs du § 67 ont été faits, en supposant que la Terre fût un sphéroïde parfait de dimensions connues. Si cette supposition avait été exacte, nos calculs auraient dû donner chaque fois $D^b = D^a$. Mais les calculs effectifs présentent partout de petites différences $D^b - D^a = u$. Pour donner à la recherche suivante une base aussi large que possible, j'ajouterai ici aux huit u que présente le § 67, encore les quatre u que fournit l'arc septentrional et qui se trouveront T. II, § 121. Dans le tableau suivant les différents excès $e, = \frac{e + e'}{2}$ sont placés à côté des u correspondants.

Arc	toise	arc	toise
I	$e = -0,0062$	VII	$u = +0,2131$
II	$e = 5,25$	VIII	$e = 27,41$
III	$e = 82,70$	IX	$u = -0,0023$
IV	$e = 30,26$	X	$e = 7,78$
V	$e = 18,42$	XI	$u = -0,9499$
VI	$e = 4,86$	XII	$e = 113,81$
	$e = 48,86$		$u = +0,4076$
	$e = 17,74$		$e = 48,86$
			$u = -0,0333$
			$e = 19,90$

Cinq de ces u sont positifs, sept négatifs, ce qui indique que ces u n'ont pas été produits par une cause qui agissait dans un sens constant, mais qu'ils sont les effets des anomalies locales dans la forme du sphéroïde terrestre. Nous apercevons en outre, que les u augmentent avec les aires des triangles, ou avec les

excès; ce qui doit avoir lieu, car pour $e, = 0$, l'arc étant dans la méridienne, u est aussi $= 0$. Tâchons maintenant d'examiner la nature des u . Nous avons, pour un sphéroïde parfait,

$$0 = D^b - D^a = \mathfrak{M}' - \mathfrak{M} + m + m'.$$

Dès qu'il y a des anomalies dans le sphéroïde, nous parvenons à

$$u = d(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) + d(m + m').$$

Il est évident que $d(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M})$ est le terme principal de u . Donc en négligeant $d(m + m')$, nous aurons

$$u = d(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}) = d(r \cos(\mathfrak{B} - \frac{3}{2}e')) - d(r \cos(\mathfrak{A} - \frac{3}{2}e)).$$

Dans cette expression il n'y a que les quantités e et e' qui puissent être sujettes à une correction de et de' , par suite des anomalies locales terrestres. Si nous introduisons, à la place des corrections réelles de et de' , les valeurs probables bc et bc' , exprimées en secondes, nous parvenons à la valeur probable $b(D^b - D^a) = v$, par

$$v = \frac{3}{2} r \sin 1'' \sqrt{(\sin^2 \mathfrak{A} \cdot (bc)^2 + \sin^2 \mathfrak{B} (bc')^2)};$$

ou, par une approximation suffisante,

$$v = \mp \frac{3}{2} r \sin 1'' \cdot \sin\left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{2}\right) \cdot bc,$$

Supposons à présent que tout excès soit sujet à une incertitude proportionnelle à sa valeur, nous aurons $\frac{3}{2} bc = \theta c$, et

$$v = \mp r \sin 1'' \cdot \sin\left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{2}\right) \theta c,$$

$$\theta = \mp \frac{v}{r \sin 1'' \cdot \sin\left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{2}\right) c}.$$

Les douze u , mises dans cette dernière expression à la place de v , nous fournissent autant de cas spéciaux, desquels les 12 valeurs suivantes de θ se déduisent:

arc I	$\theta = \mp 0,043$	arc VII	$\theta = \mp 0,060$
II	0,018	VIII	0,010
III	0,102	IX	0,008
IV	0,022	X	0,026
V	0,023	XI	0,055
VI	0,056	XII	0,019.

Sa somme des douze $\theta^2 = 0,024532$ conduit au montant probable $\theta = \mp 0,0305$, et nous obtenons

$$b(D^b - D^a) = v = \mp r \sin 1'' \cdot \sin\left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{2}\right) \cdot 0,0305 c.$$

Or $b(D^a + D^b)$ étant $= b(D^b - D^a)$, nous avons finalement

$$b\left(\frac{D^a + D^b}{2}\right) = \mp 0,0152 \sin 1'' \cdot r \sin\left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{2}\right) \cdot e, = k;$$

et ce k est l'expression de l'erreur probable, en toises, à laquelle est sujet notre $D = \frac{D^a + D^b}{2}$, par suite des anomalies locales de la Terre. Le calcul donne :

Arc I	$k = \mp 0,002$	toise	Arc VII	$k = \mp 0,054$	toise
» II	0,533	»	» VIII	0,004	»
» III	0,092	»	» IX	0,003	»
» IV	0,023	»	» X	0,547	»
» V	0,001	»	» XI	0,113	»
» VI	0,023	»	» XII	0,027	»

Pour parvenir à l'expression complète de l'erreur probable à laquelle un D est sujet, il faut considérer encore les inexactitudes qui existent dans les quantités de départ r , \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , déduites de l'observation, ou les $\flat r$, $\flat \mathfrak{A}$ et $\flat \mathfrak{B}$. Si nous substituons dans la formule (1), p. 322, les valeurs \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' de la formule (2), nous avons :

$$D = \frac{1}{2} r \left\{ \cos(\mathfrak{A} - \frac{2}{3} \epsilon) \sec \frac{1}{3} \epsilon + \cos(\mathfrak{B} - \frac{2}{3} \epsilon') \sec \frac{1}{3} \epsilon' \right\} + \frac{1}{2} (m' - m).$$

La différentiation de cette formule donne

$$dD = \frac{\cos \mathfrak{A} + \cos \mathfrak{B}}{2} dr - r \sin 1'' \left(\frac{\sin \mathfrak{A} d\mathfrak{A} + \sin \mathfrak{B} d\mathfrak{B}}{2} \right);$$

car nous devons omettre $d \left(\frac{m' - m}{2} \right)$ comme étant compris dans k . Cette différentielle se transforme, par une substitution plus que suffisamment exacte, en

$$dD = \frac{D}{r} dr - r \sin 1'' \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) d \left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{2} \right),$$

d'où se déduit

$$\flat D = \frac{D}{r} \flat r \mp r \sin 1'' \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \flat \left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{2} \right).$$

Ce $\flat(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ est, pour 7 de nos arcs, identique avec le $\flat \mathfrak{C}$ du tableau p. 318; pour l'arc VI il faut remplacer le $\flat \mathfrak{C} = 4''46$ de ce tableau par $\flat \mathfrak{C} = 4''46.3,18 = 14''16$, p. 319. Donc en mettant finalement

$$\frac{D}{r} \flat r = l, \quad \frac{1}{2} r \sin 1'' \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \flat \mathfrak{C} = m,$$

nous avons, pour l'erreur probable complète à laquelle la valeur finale de nos calculs $D = \frac{1}{2} (D^a + D^b)$ est sujette, l'expression

$$\flat D = \sqrt{(k^2 + l^2 + m^2)}.$$

Les différents k sont donnés en haut, les $\flat r$ p. 307 et les $\flat \mathfrak{C}$ se trouvent p. 318. En introduisant ces valeurs, nous avons pour nos 8 arcs :

arc :	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
$k = \mp$	0,002	0,533	0,092	0,023	0,001	0,023	0,054	0,004 toise,
$l = \mp$	0,649	0,590	0,572	0,989	1,425	0,705	0,623	0,498 »
$m = \mp$	0,050	0,966	0,411	0,191	0,042	0,600	0,255	0,071 »
$bD = \mp$	0,651	1,251	0,710	1,008	1,426	0,926	0,675	0,503 toise.

Le tableau suivant contient les résultats des calculs précédents. Quant à l'île de HOGLAND, j'ai transformé le D trouvé pour la station MÄKI-PÄÄLYS, point E , en celui qui convient au point Z , auquel les observations astronomiques se rapportent. La relation entre E et Z a été déterminée, en 1826, par une opération géodésique auxiliaire, et qui partait d'une petite base de 129,709 toises de long. Sur cette opération voyez *Gradmessung* I., p. 152 à 159 et II., p. 236 à 245. Le résultat dont nous avons besoin, se trouve *Gradmessung* I., p. 337, savoir que le parallèle de Z est à 645,896 toises au nord de celui de MÄKI-PÄÄLYS. Donc, D étant entre DORPAT et MÄKI-PÄÄLYS, point E , = 96892,722 toises, p. 329, nous avons entre DORPAT et HOGLAND, point Z , $D = 97538,618$ toises.

J'ai placé, dans le tableau, à côté des distances D entre les parallèles des points astronomiques voisins, dans une seconde colonne, la distance \mathfrak{D} de chaque point au point le plus méridional STARO-NEKRASSOWKA. À côté des D se trouvent les bD donnés au haut de cette page. Une valeur approximée des bD se trouve par la considération suivante. Il s'agit p. e. de déterminer, avec quelle exactitude la distance totale entre les parallèles de STARO-NEKRASSOWKA et de HOGLAND, $\mathfrak{D} = 842303,102$ toises, a-t-elle été déterminée? Nos matériaux relatifs aux différentes compensations fournissent bien la possibilité de trouver la réponse précise à cette question, mais qui réclamerait des calculs d'une prolixité énorme. Nous avons cependant un moyen très-simple, pour indiquer deux limites entre lesquelles cette erreur probable $b\mathfrak{D}$ est comprise, car

$$b\mathfrak{D} \text{ est plus petit que sa somme } [bD] = 7,116 \text{ toises}$$

$$\text{» » plus grand que } \sqrt{[(bD)^2]} = 2,645 \text{ » .}$$

Je crois ne point m'écarter sensiblement de la vérité en assignant à $b\mathfrak{D}$ une valeur qui est la moyenne géométrique des deux limites indiquées, ou en mettant :

$$b\mathfrak{D} = \sqrt{[bD] \cdot \sqrt{[(bD)^2]}} = 4,339 \text{ toises.}$$

Par la même voie les autres bD ont été calculés.

**Distances définitives entre les parallèles des 9 points astronomiques
de l'arc méridional compris entre le Danube et l'île de Hogland.**

Noms des points astronomiques.	Distances des parallèles <i>D.</i>	Erreurs probables <i>±D.</i>	Sommes <i>Σ.</i>	Erreurs probables <i>±Σ.</i>
	toises.		toises.	
STARO-NEKRASSOWKA			0,000	
WODOLUI	96415,136	± 0,651	96415,136	± 0,651
SSUPRUNKOWZI	98557,988	± 1,251	194973,124	± 1,646
KREMENETZ	76751,386	± 0,710	271724,510	± 2,039
BELIN	111219,011	± 1,003	382943,521	± 2,611
NEMESCH	148809,521	± 1,426	531753,042	± 3,453
JACOBSTADT	105730,879	± 0,926	637483,921	± 3,893
DORPAT	107280,563	± 0,675	744764,484	± 4,177
HOGLAND, point Z	97538,618	± 0,503	842303,102	± 4,372

F. G. W. STRUVE,

ARC DU MÉRIDIDIEN

DE 25° 20'

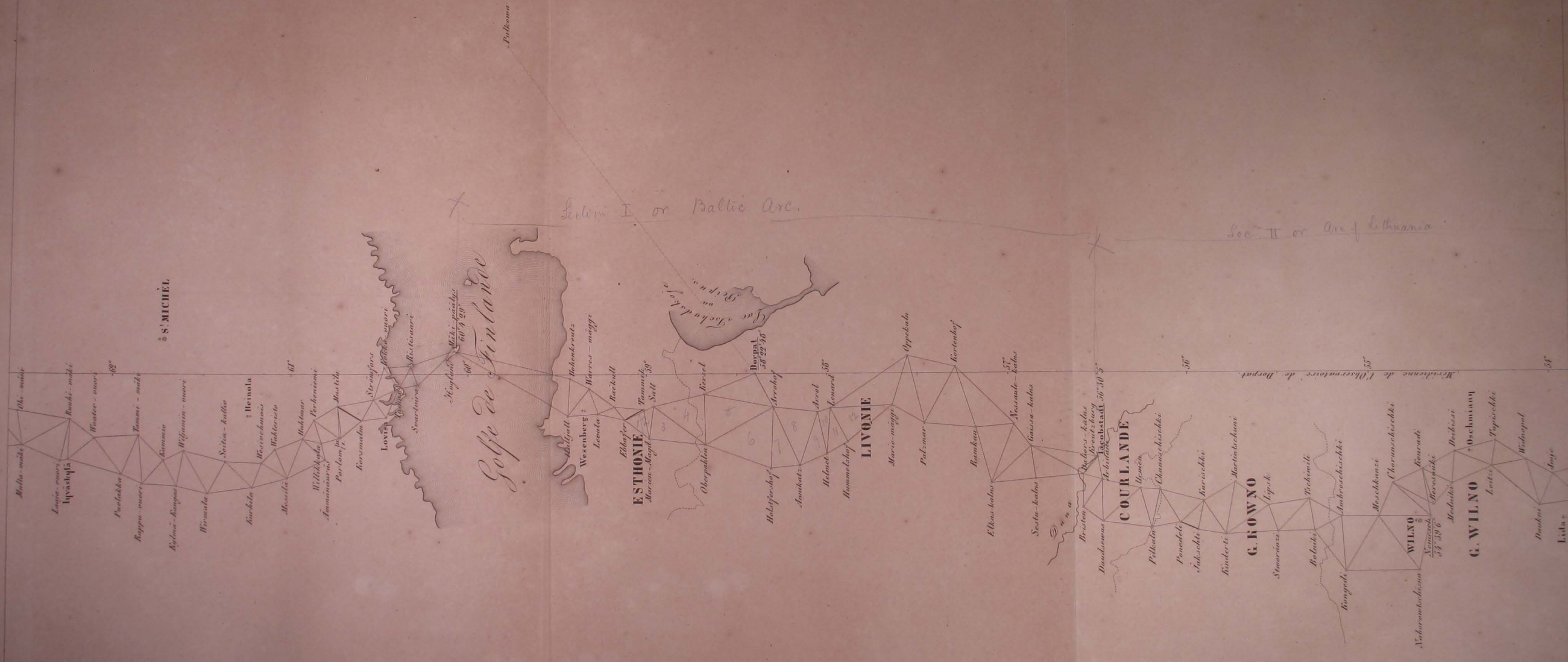
ENTRE

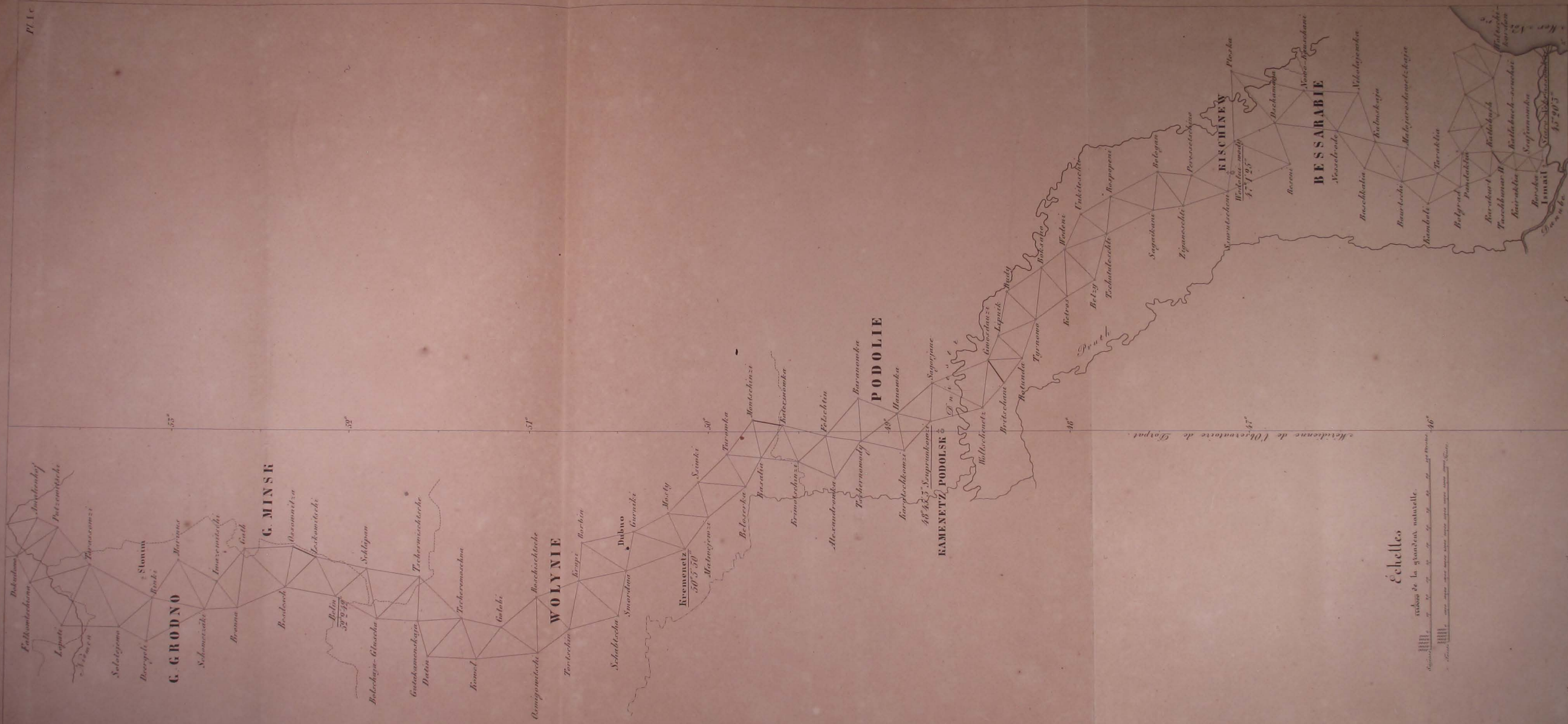
LE DANUBE ET LA MER GLACIALE.

PLANCHES.

St. PÉTERSBOURG.

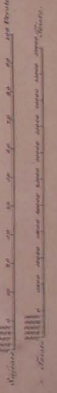
1857.





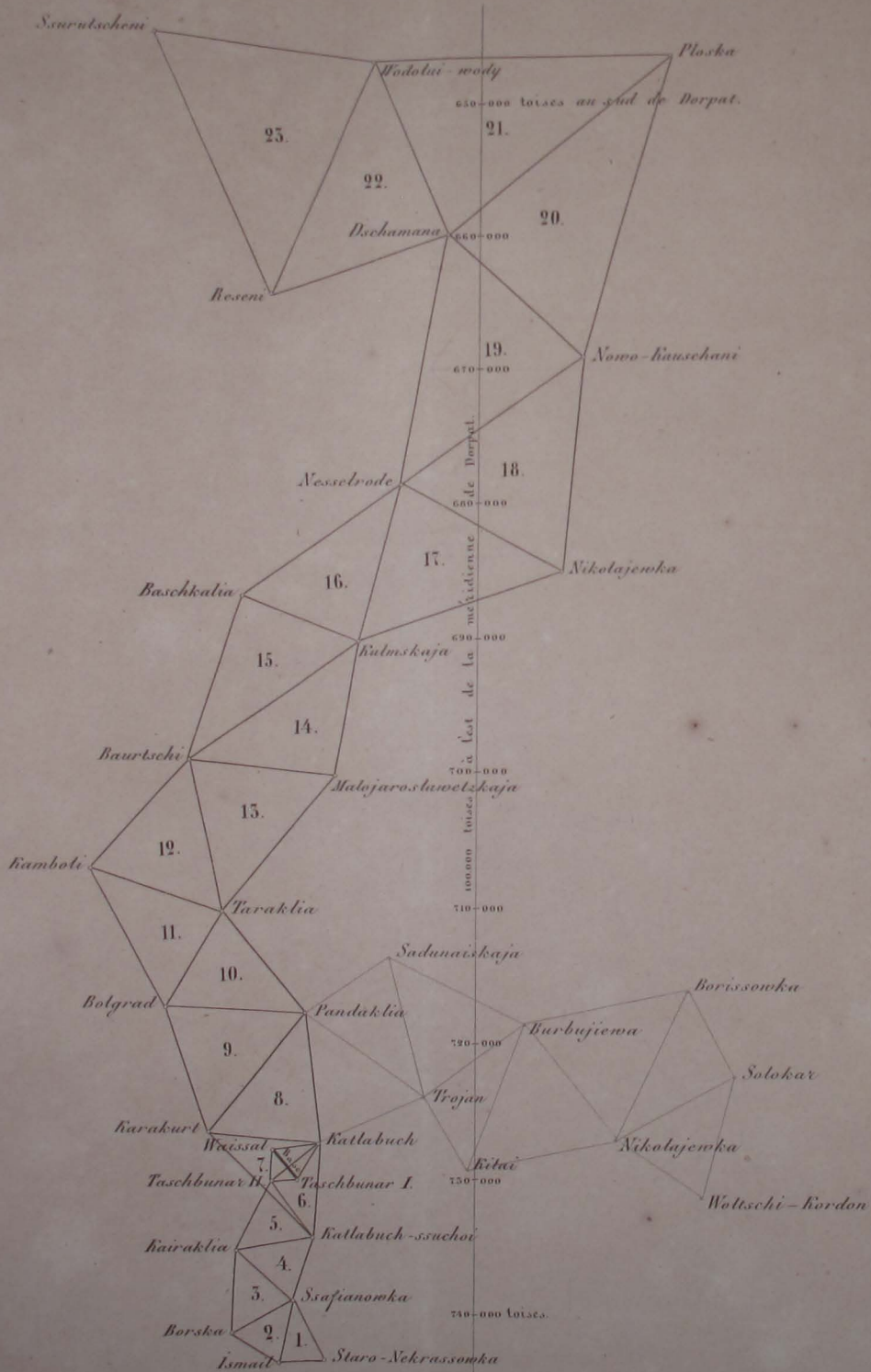
Echelle

échelle de la grande carte nationale.

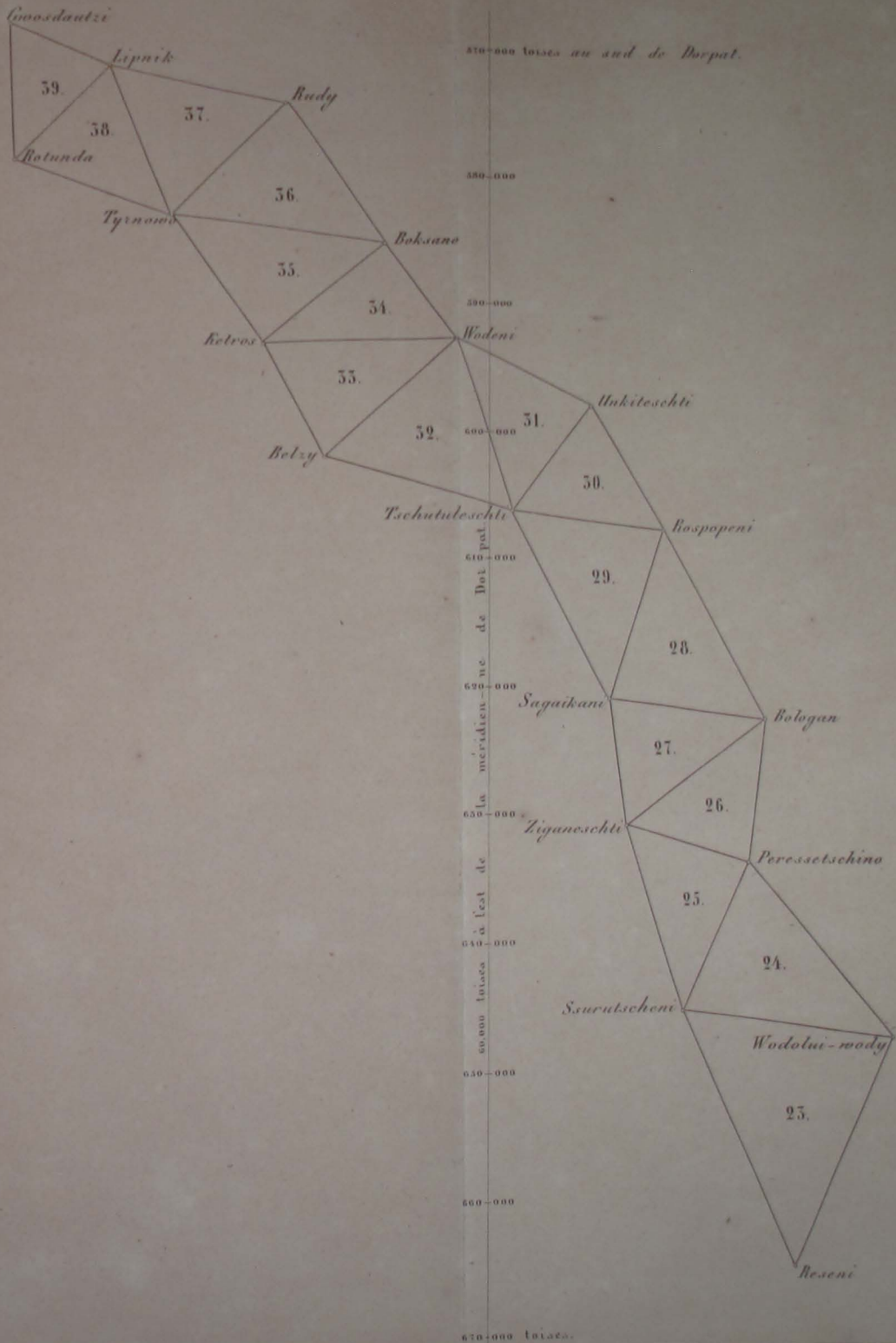


TRIANGLES DE BESSARABIE.

mesurés sous la direction de M. de Senner.

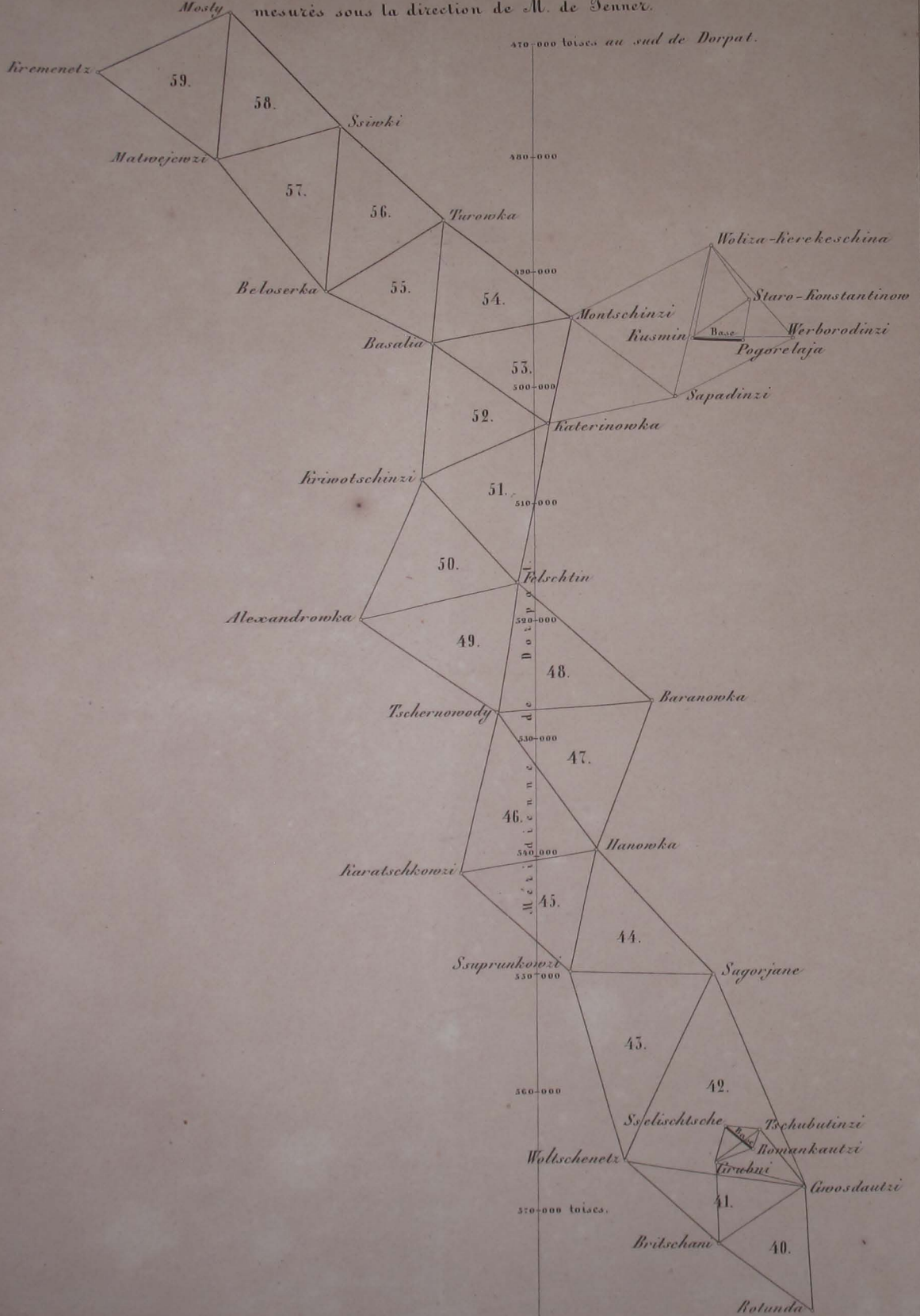


TRIANGLES DE BESSARABIE,
mesurés sous la direction de M. de Tenner.

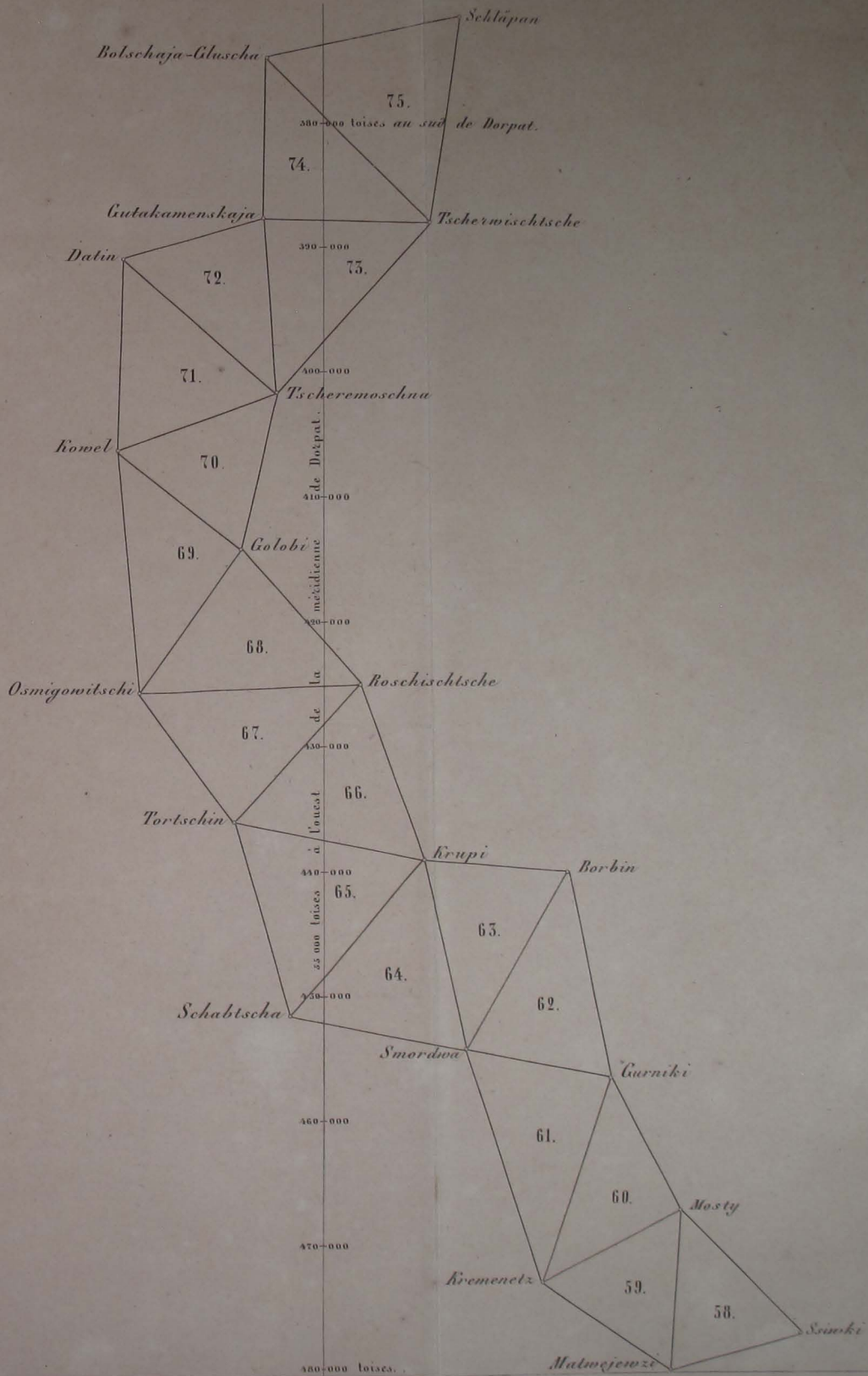


TRIANGLES DE WOLYNIE, DE PODOLIE ET DE BESSARABIE,

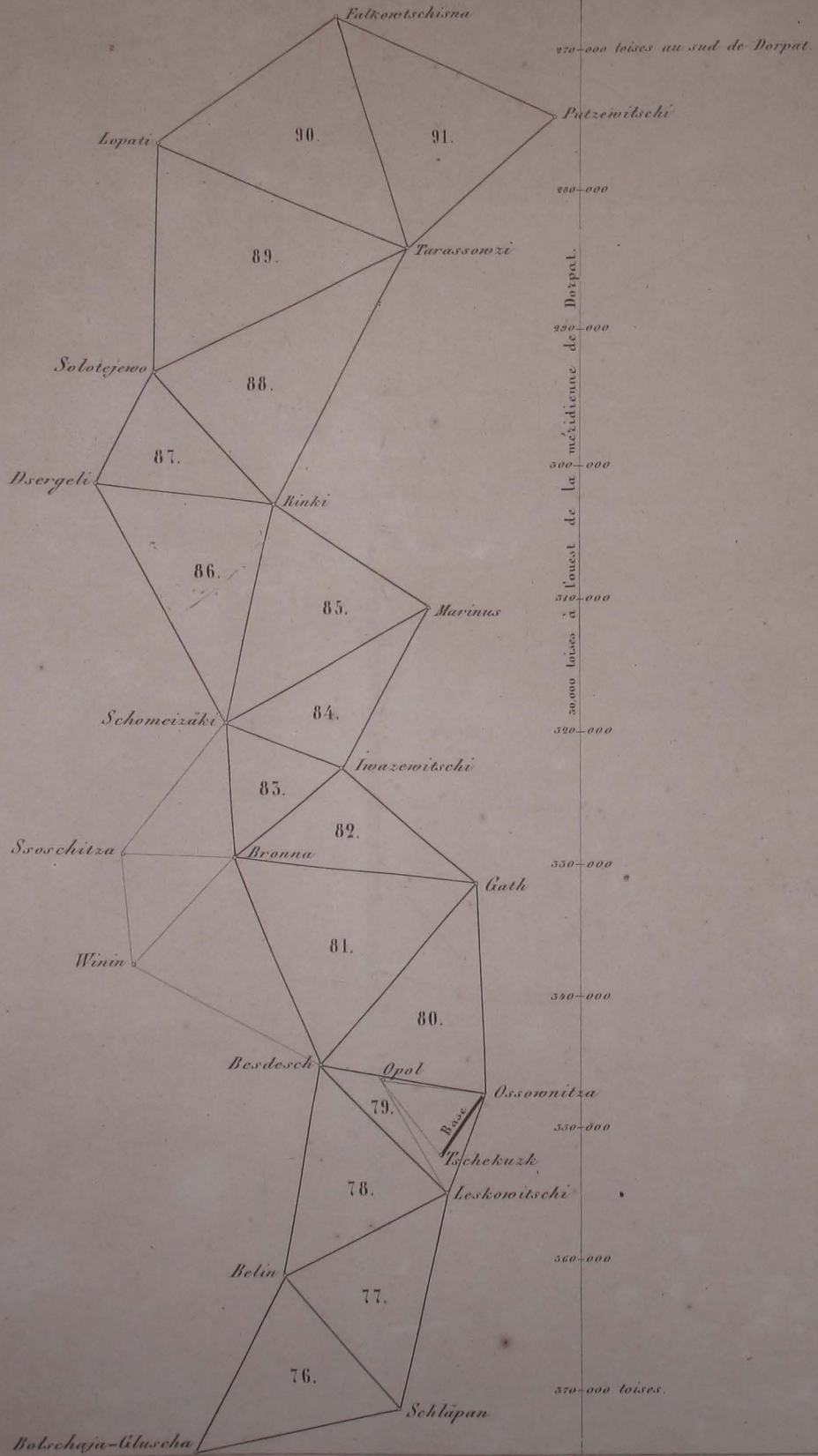
Mosty mesurés sous la direction de M. de Tenner.



TRIANGLES DE WOLYNIE.
mesurés sous la direction de M. de Tenner.

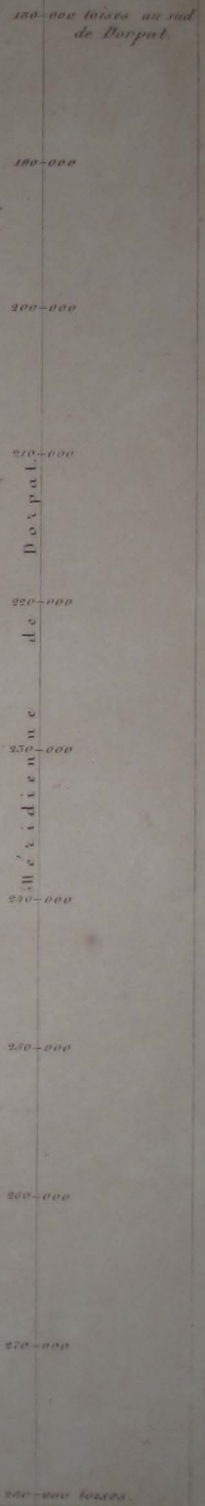
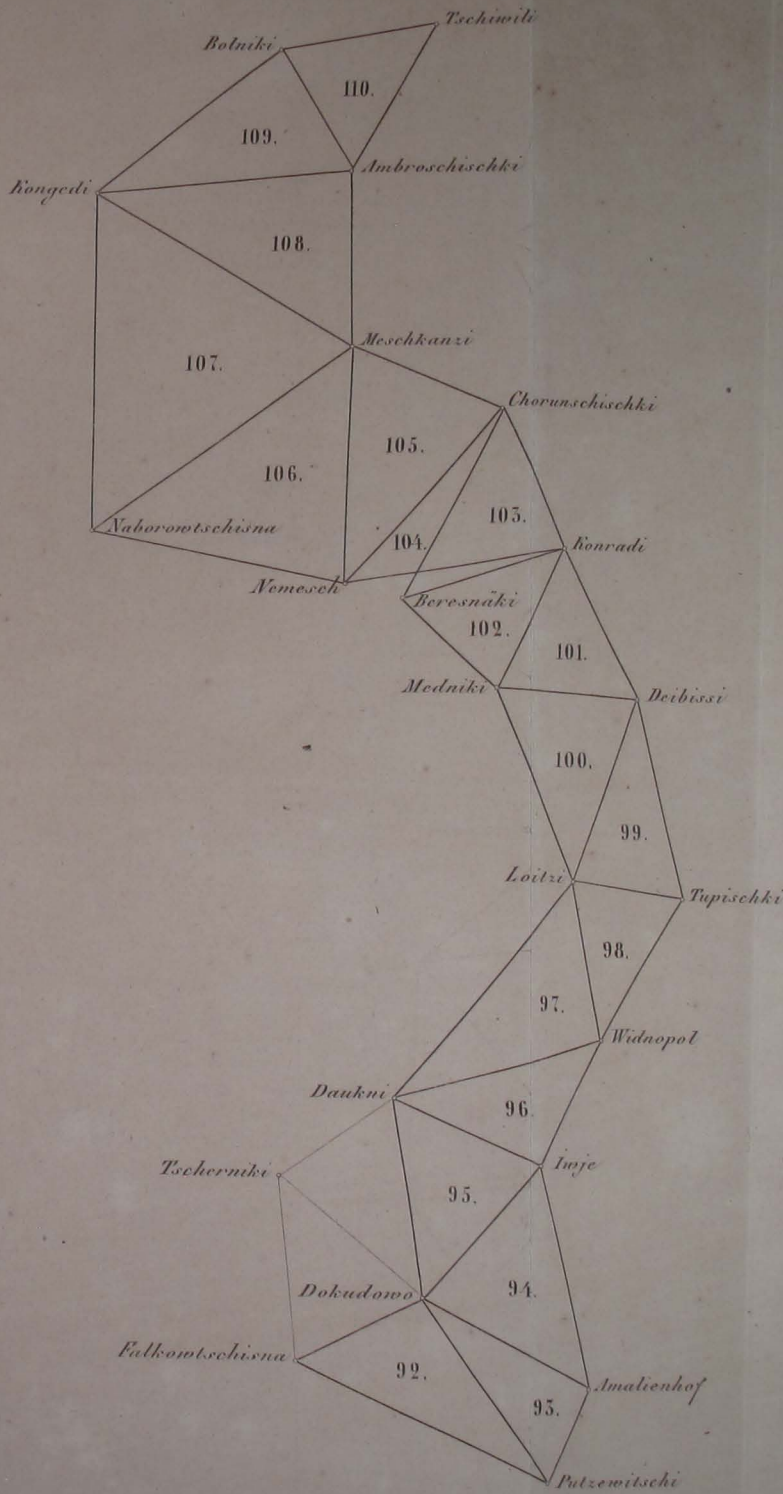


TRIANGLES DU GOUV. GRODNO,
mesurés sous la direction de M. de Tenner.



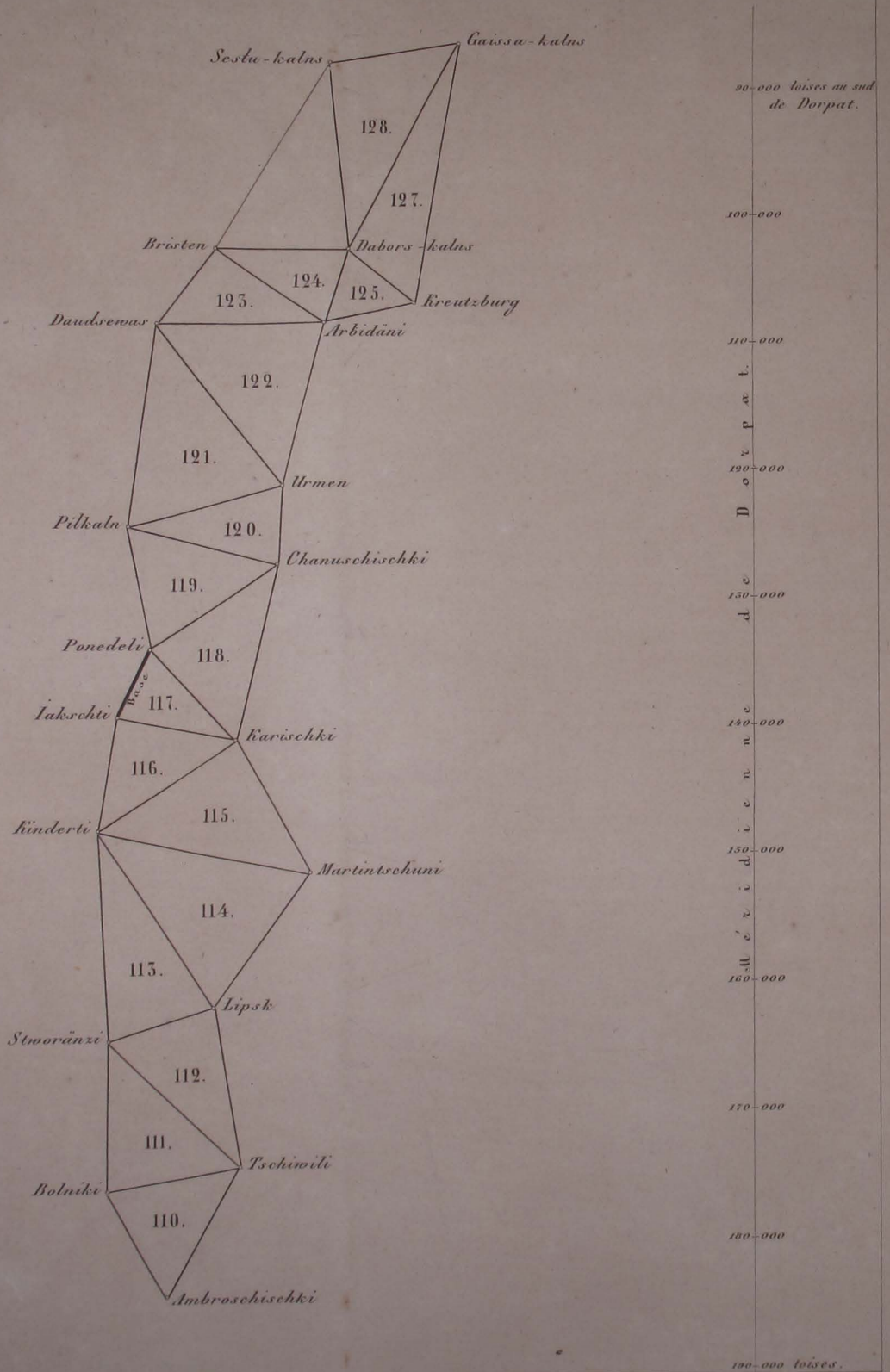
TRIANGLES DES GOUV. WILNA ET GRODNO,
mesurés sous la direction de M. de Tenner.

17. VII

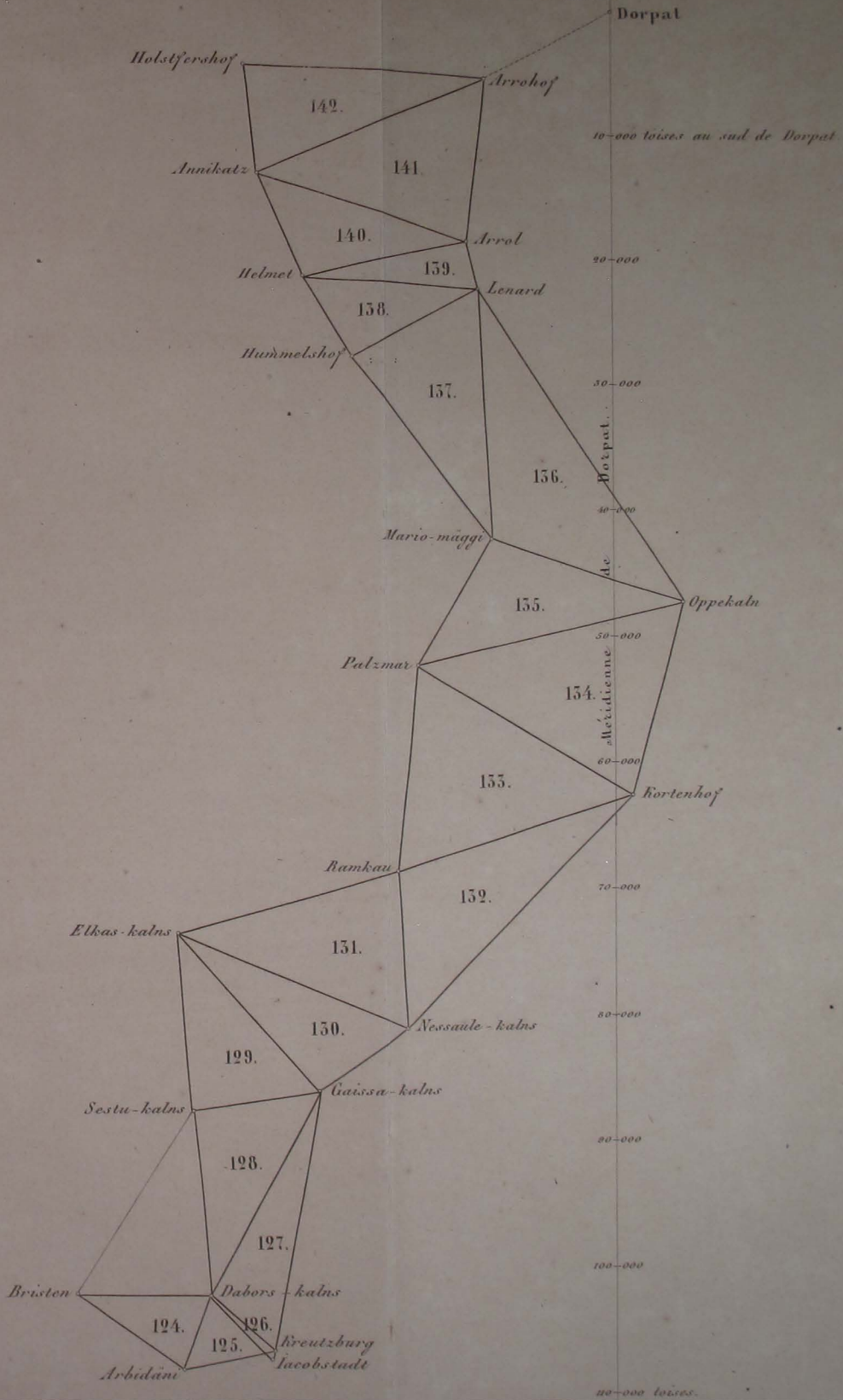


TRIANGLES DE COURLANDE ET DU GOUV. DE WILNA.

mesurés sous la direction de M. de Fenner.



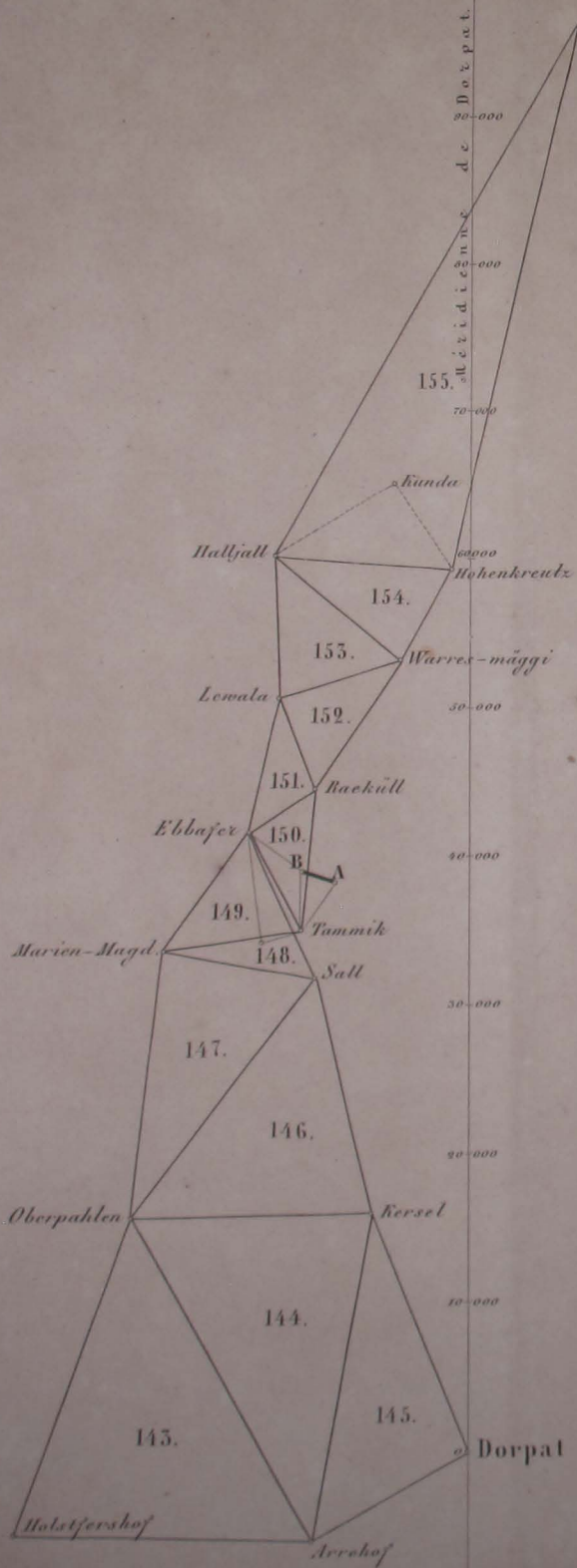
TRIANGLES DE LIVONIE ET DE COURLANDE.
mesurés sous la direction de M. Struve



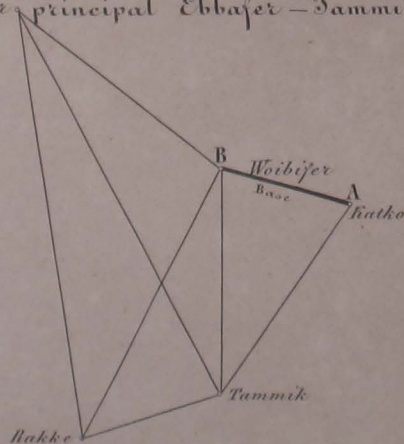
TRIANGLES DE LIVONIE ET D'ESTHONIE.

mesurés sous la direction de M. Struve.

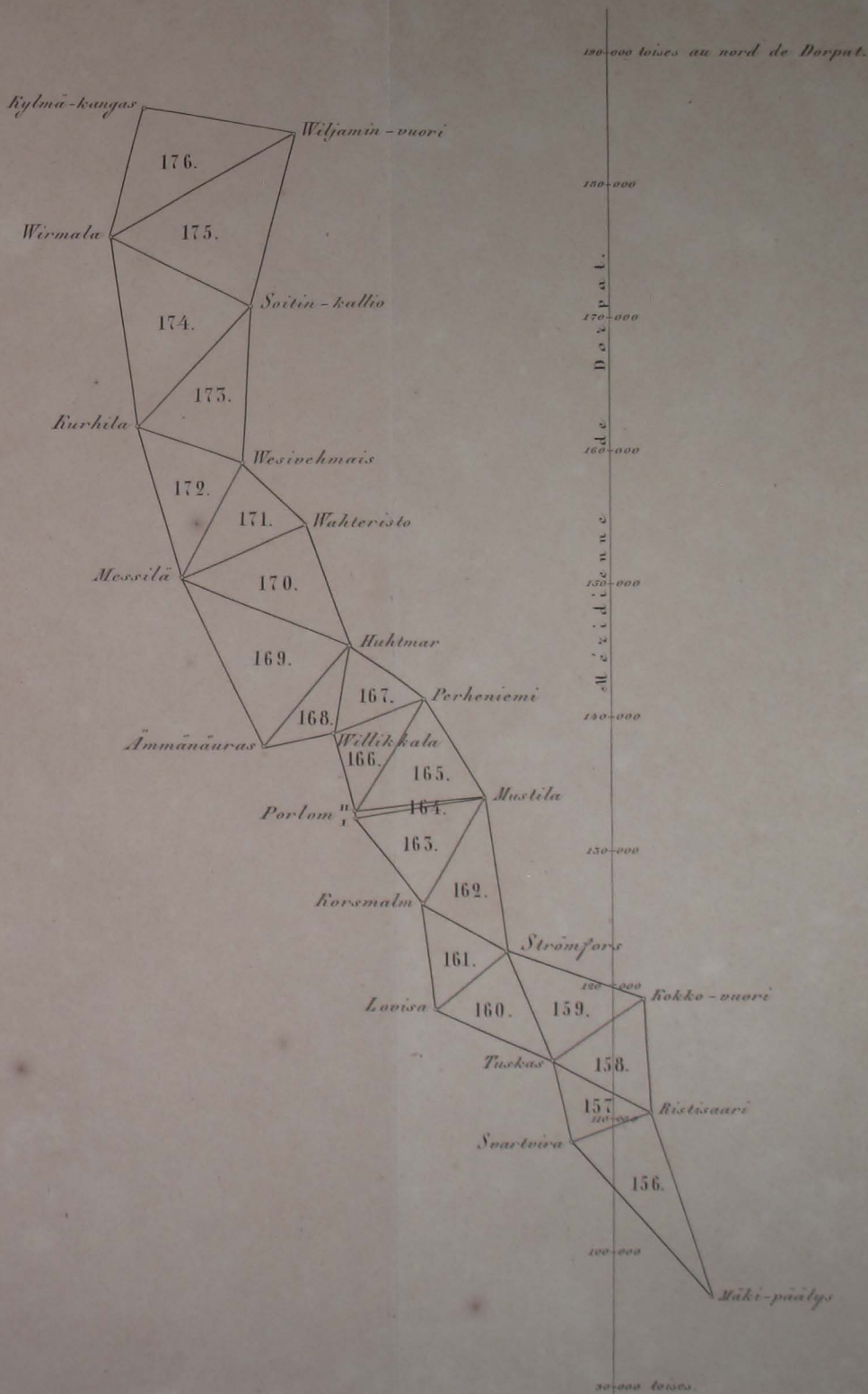
100-000 toises au nord de Dorpat.



Jonction entre la Base de St. Simonis, AB, et le côté principal Ebbajer - Tammik.

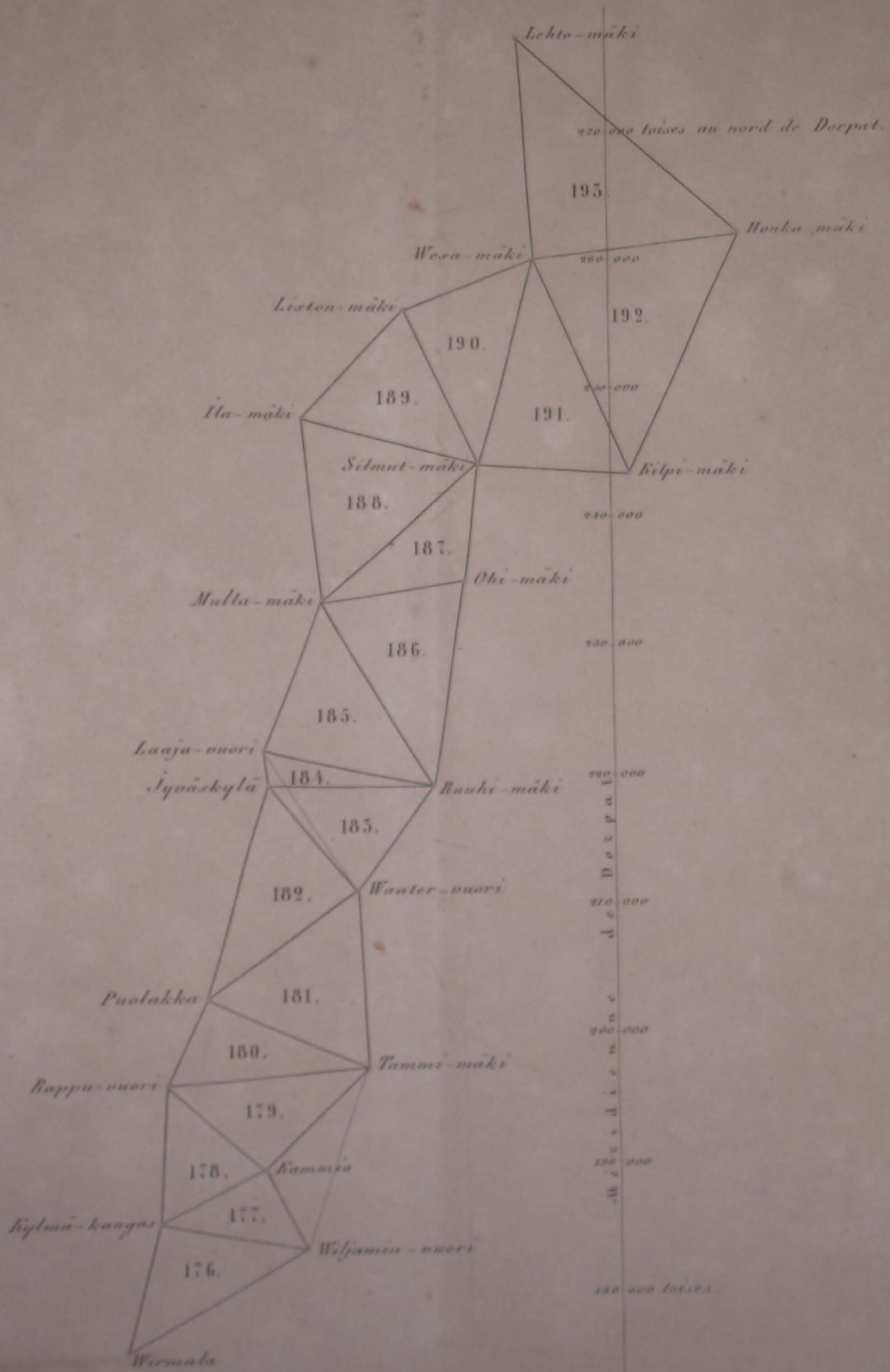


TRIANGLES DE FINLANDE,
mesurés sous la direction de M. Struve.

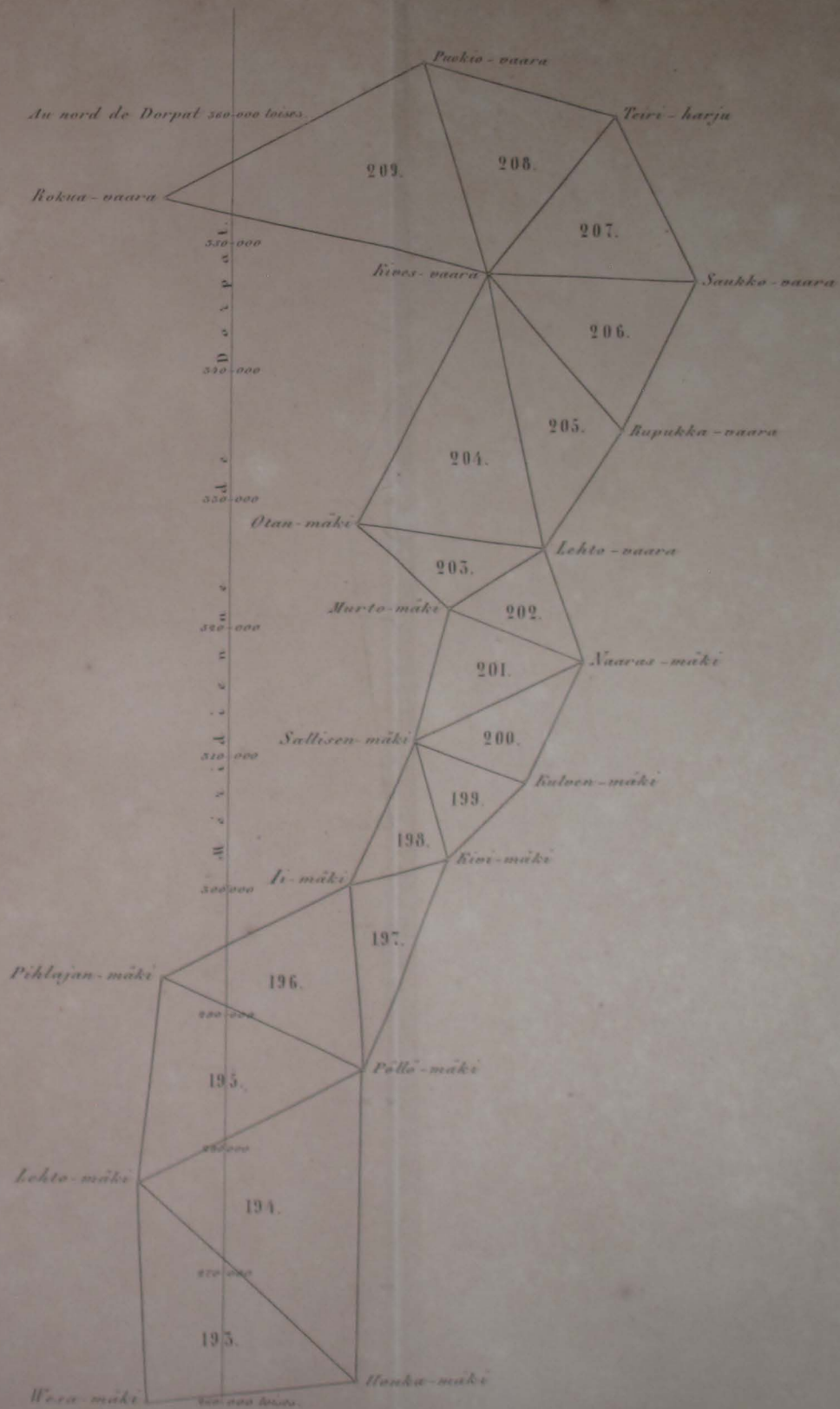


TRIANGLES DE FINLANDE.

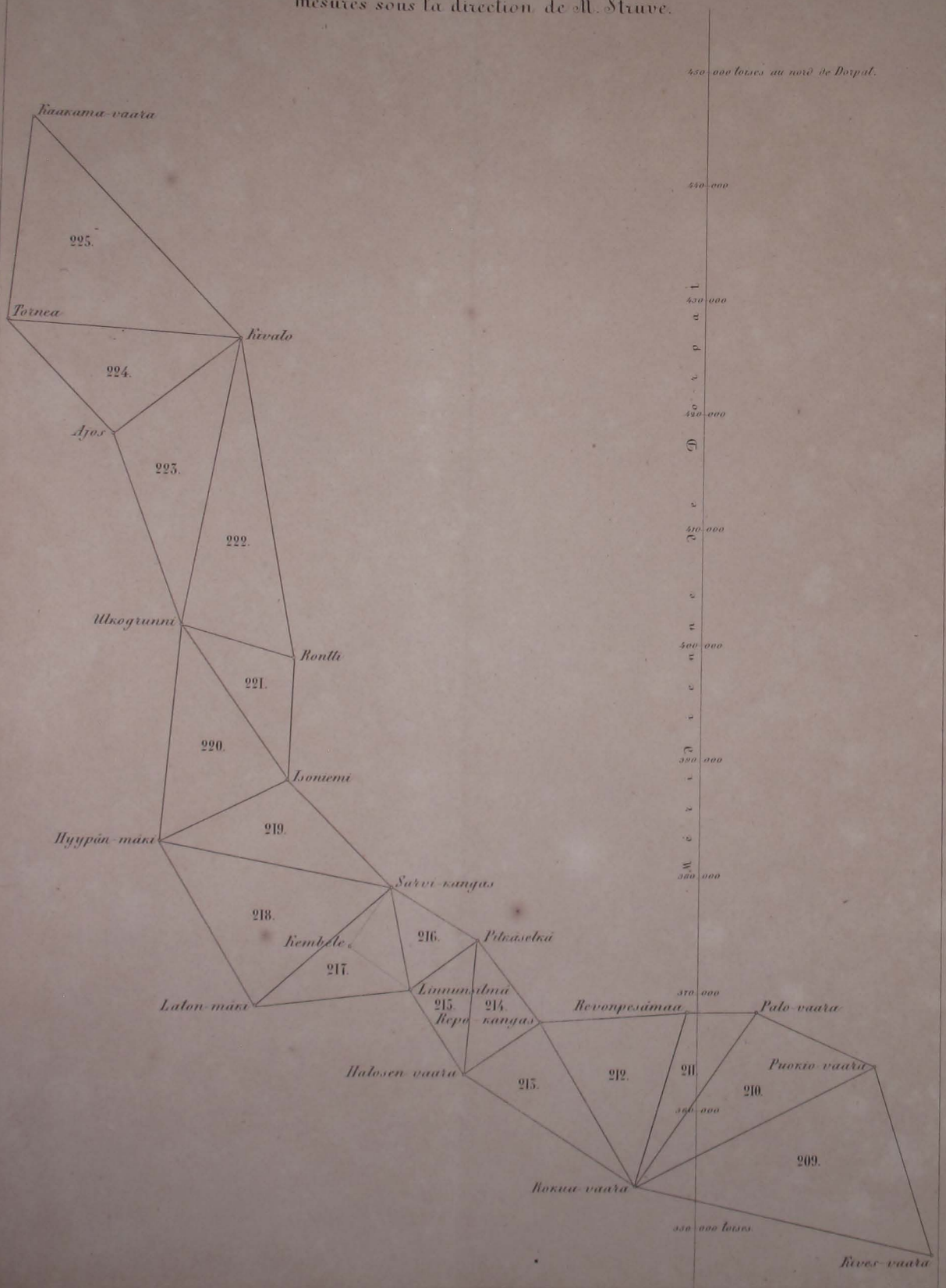
mesurés sous la direction de M. Struve.



TRIANGLES DE FINLANDE.
mesurés sous la direction de M. Struve.



TRIANGLES DE FINLANDE,
mesurés sous la direction de M. Stuvé.



TRIANGLES DE FINLANDE,
mesurés sous la direction de M. Stauré.

Jonction entre la Base d'Uleaborg, AB, et le
côté principal Linnunsilmä-Sarvi-rangas.

Stations.

- A *Orilkaari*
- B *Klemola*
- C *Länksien-rangas*
- D *Inton-rangas*
- E *Sarvi-rangas*
- F *Kembele*
- G *Linnunsilmä*

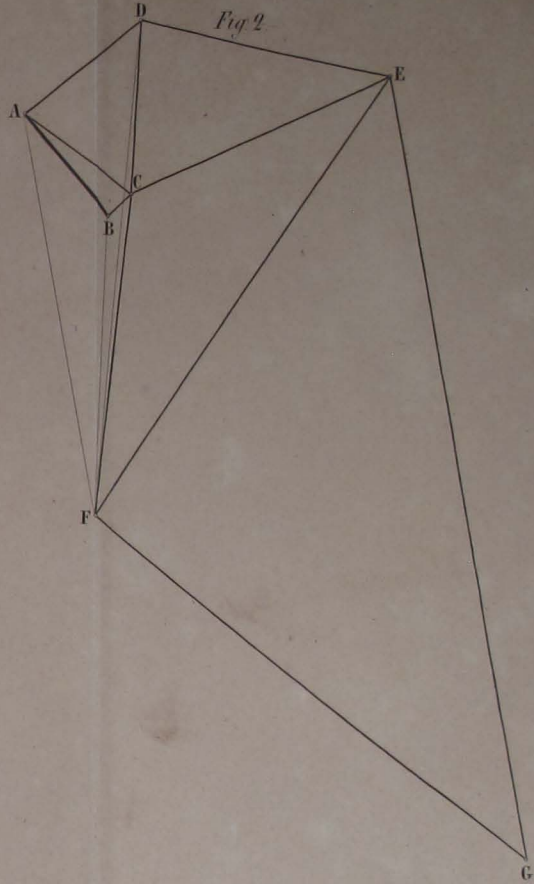
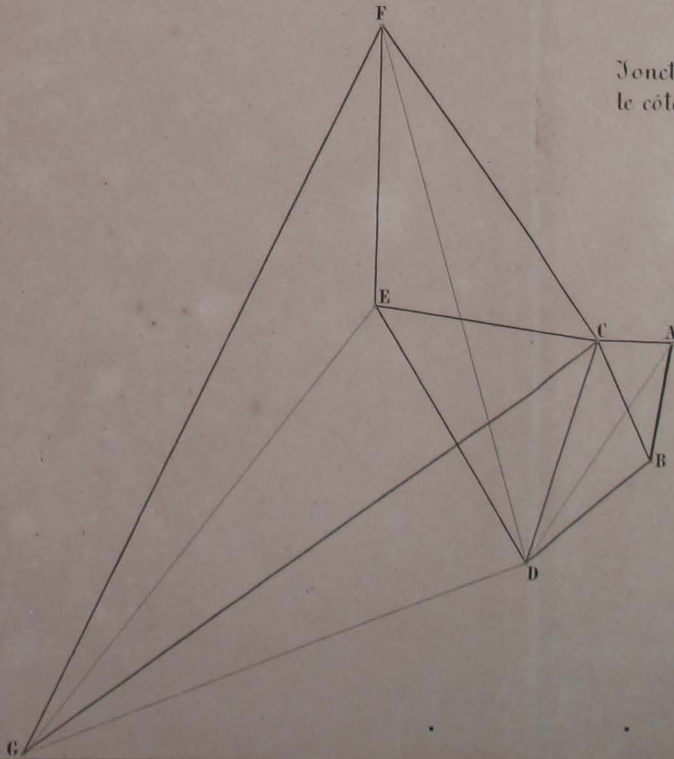


Fig 1

Jonction entre la Base d'Elimäc, AB, et
le côté principal Mustila-Korsmalm.

Stations.

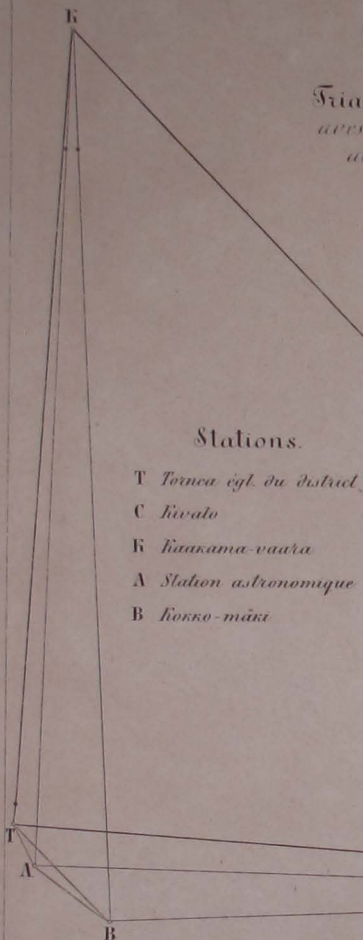
- A *Terme sept. de la Base*
- B *mer.*
- C *Linnan-kallio*
- D *Brefberg*
- E *Lähdet-kallio*
- F *Mustila*
- G *Korsmalm*



TRIANGLES DE FINLANDE,
mesurés sous la direction de M. Stuve.

Fig 5

5
Triangle N° 225.
avec ses 2 points
auxiliaires.



Stations.

- T Tornea égl. du district
- C Jivato
- B Hankama-vuori
- A Station astronomique
- B Kokko-mäki

Fig 2

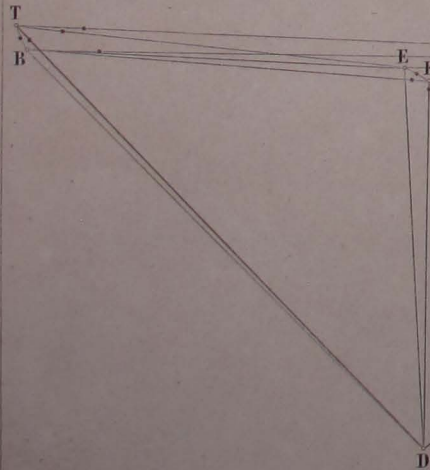
2
Triangulation
auxiliaire.
Stations.

- A Station astronomique et
terme de la petite base AM.
- M Autre terme de la même base
- N Point auxiliaire
- T Tornea, église du district
- T Tornea, église de la ville
- B Kokko-mäki



1 Triangle N° 224.
Jonction multiple des trois
Stations Ajos, Jivato, Tornea.

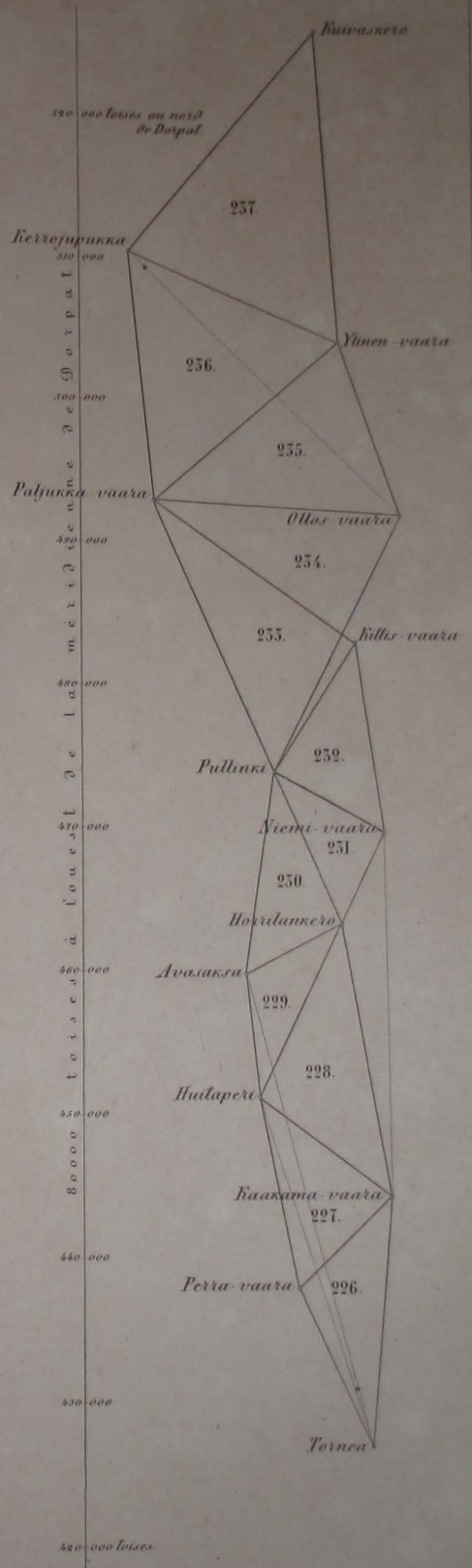
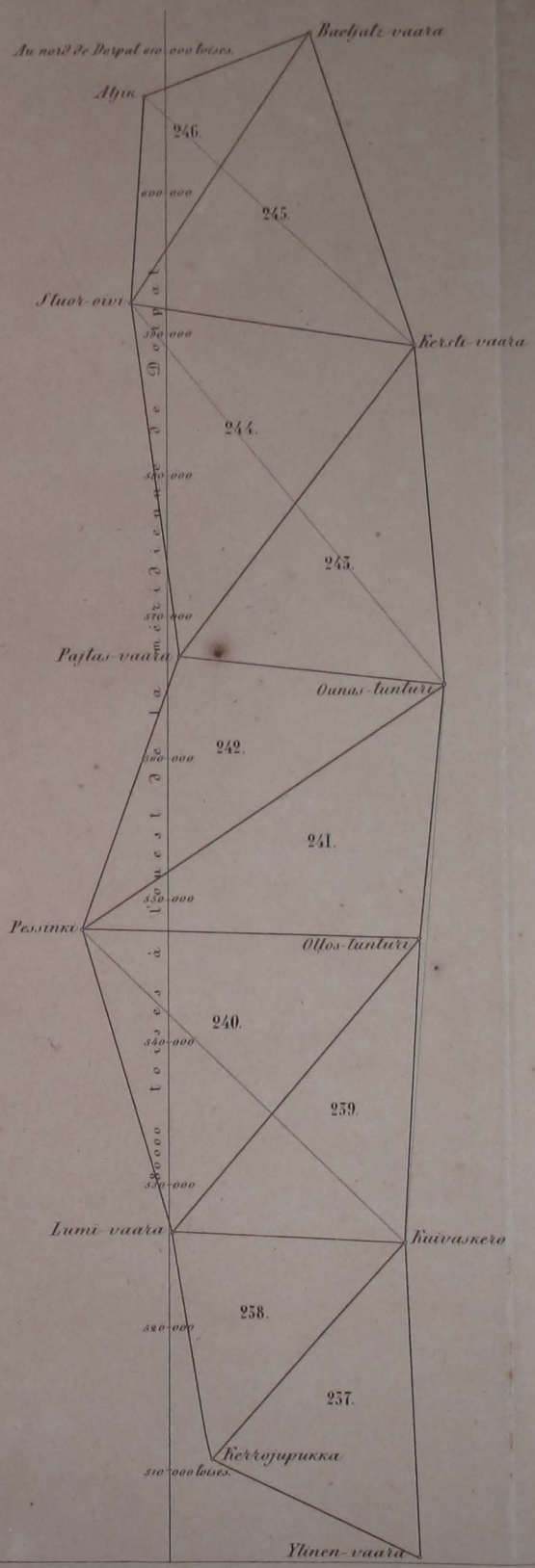
Fig 1



Stations.

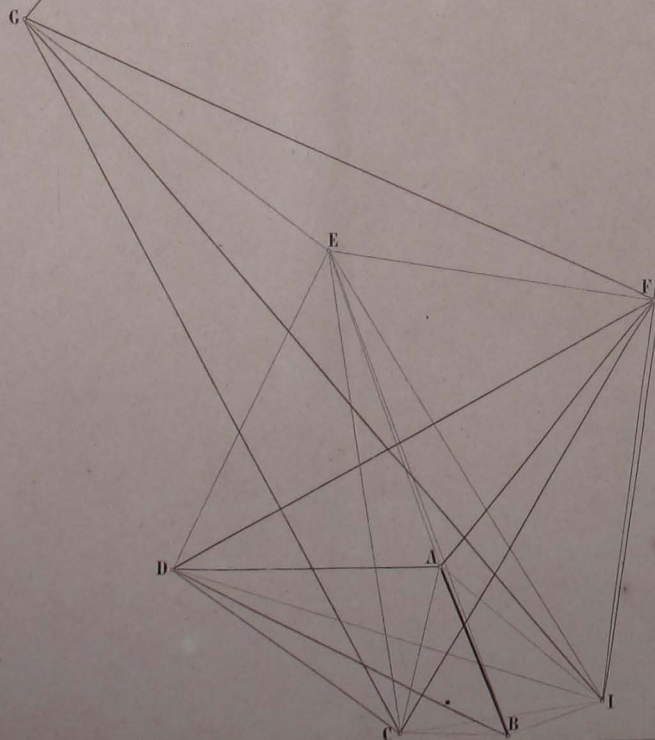
- T Tornea, église du district
- B Kokko-mäki
- C Jivato
- D Ajos
- E Kallin-kangas
- F Kemä, église

TRIANGLES DE LAPONIE,
mesurés sous la direction de M. Selander.



TRIANGLES DE LAPONIE,
mesurés sous la direction de M. Selander.

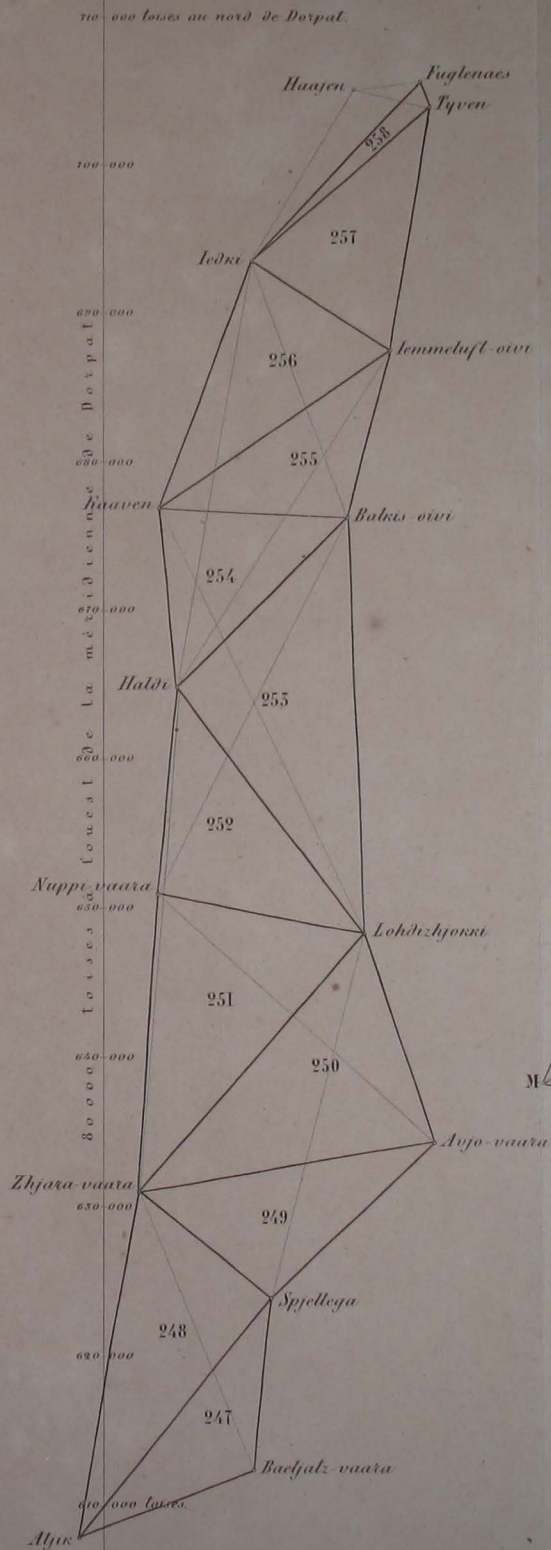
Jonction entre la Base d'Ofver-Tornea, AB,
et le côté principal Avasarsa-Pullinsi.



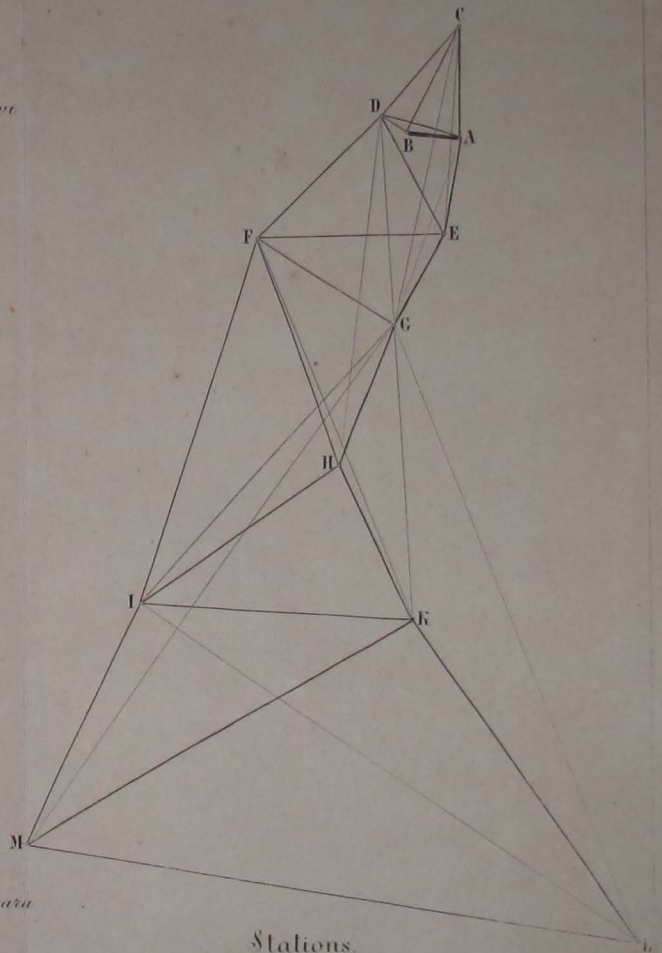
Stations.

- A Ivare
- B Keesi-rahla
- C Särkä-vaara
- D Ilvi-vaara
- E Lammi-vaara
- F Ilmo-vaara
- G Kuora-vaara
- H Pullinsi
- I Avasarsa

TRIANGLES DE FINMARKEN,
mesurés sous la direction de M. Hansteen.



Jonction entre la Base d'Allen, AB, et le
côté principal Nuppi-vaara-Lohdizhokki.



Stations.

- A Elvebakken
- B Bugten
- C Bafsholmen
- D Kongshavn-fjeld
- E Lille-Bespas
- F Skuodde-vaara
- G Store-Bespas
- H Peska-vaara
- I Vuosgol-vaara
- K Rautas-vaara
- L Lohdizhokki
- M Nuppi-vaara

Signaux de l'arc Ballique.

Fig. 1.

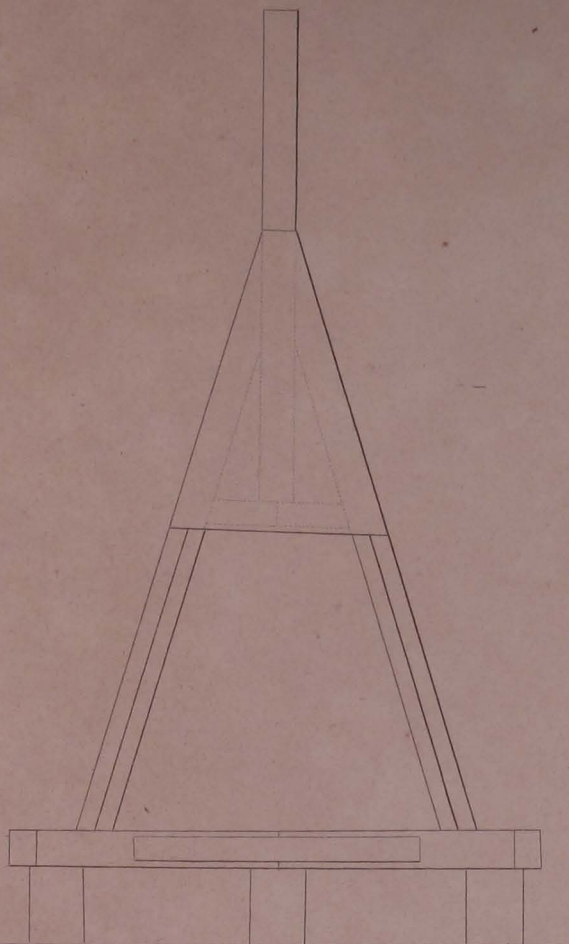


Fig. 2.

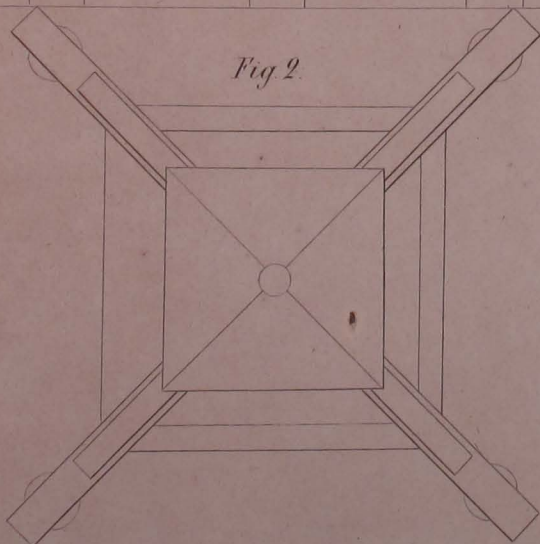


Fig. 3.

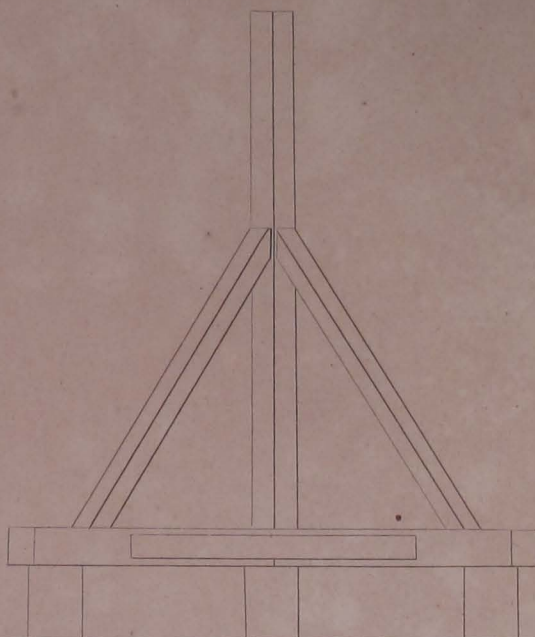
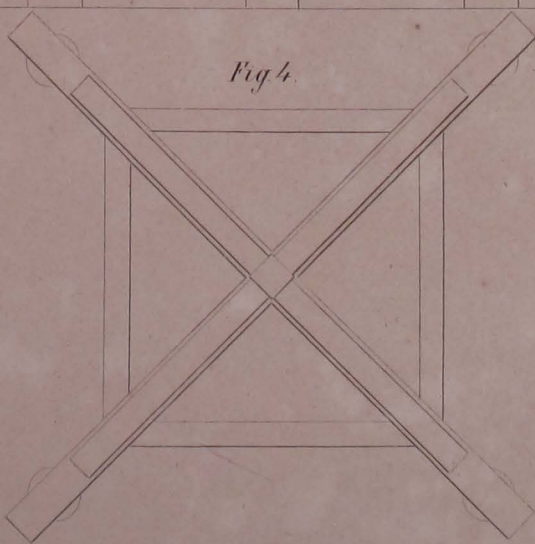


Fig. 4.



pieds 1 2 3 4 5 6 toises

Signaux entre la Duna et le Danube.

Fig. 7.

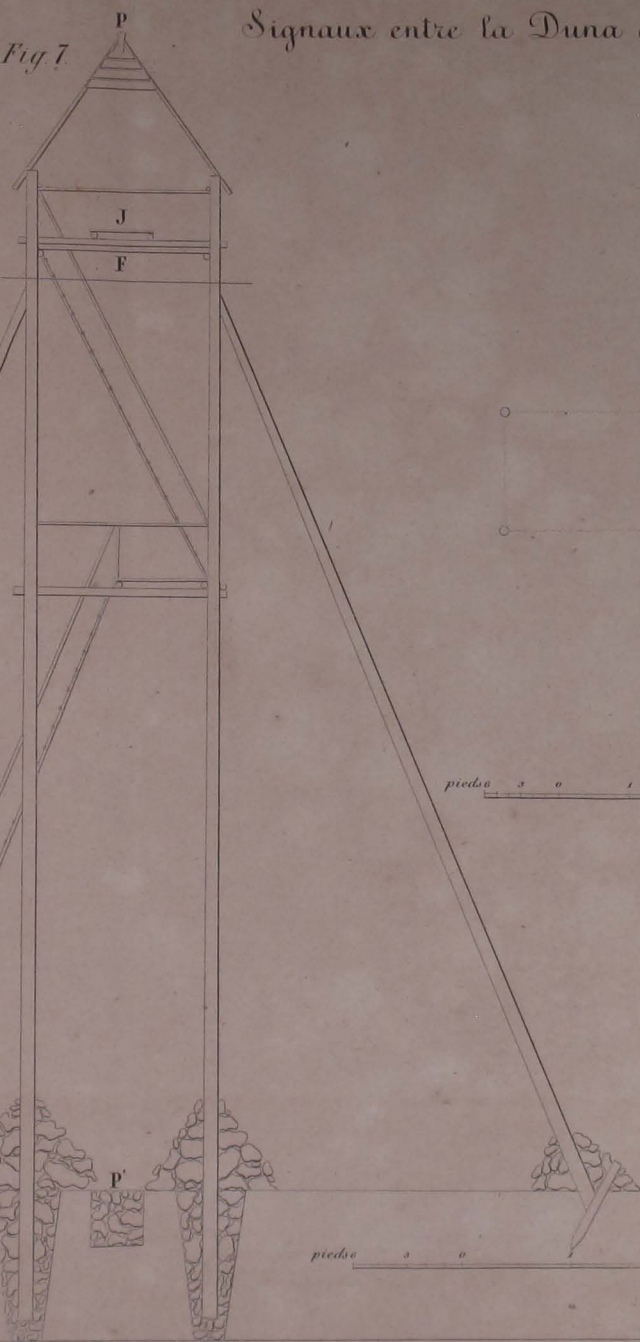


Fig. 6.



Fig. 5.

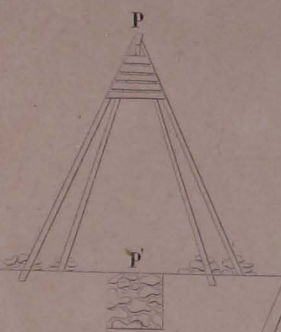
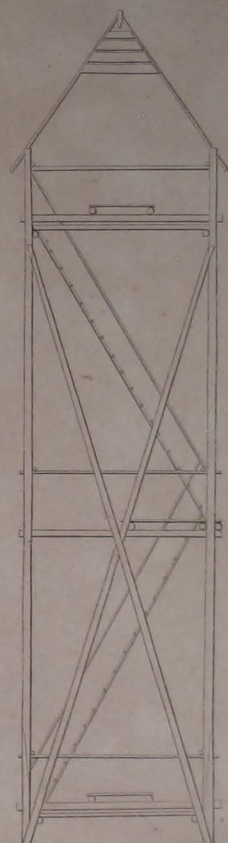


Fig. 8.



pieds 0 1 2 3 4 5 6 7 8 toises

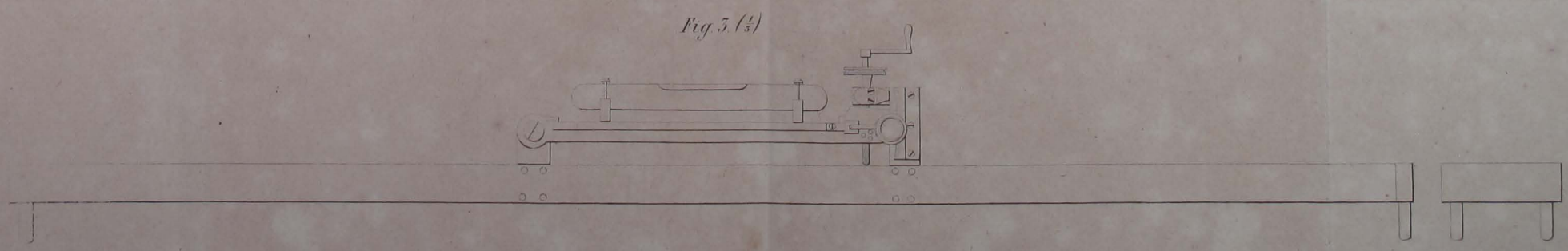
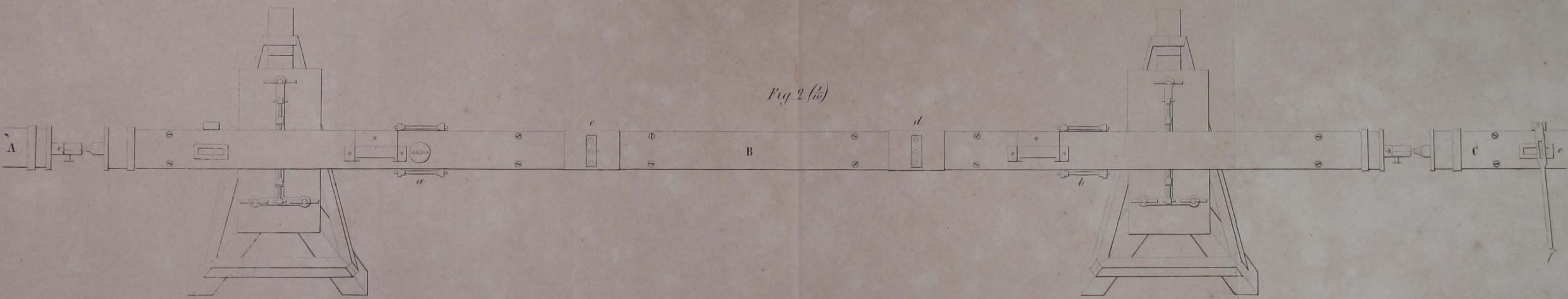
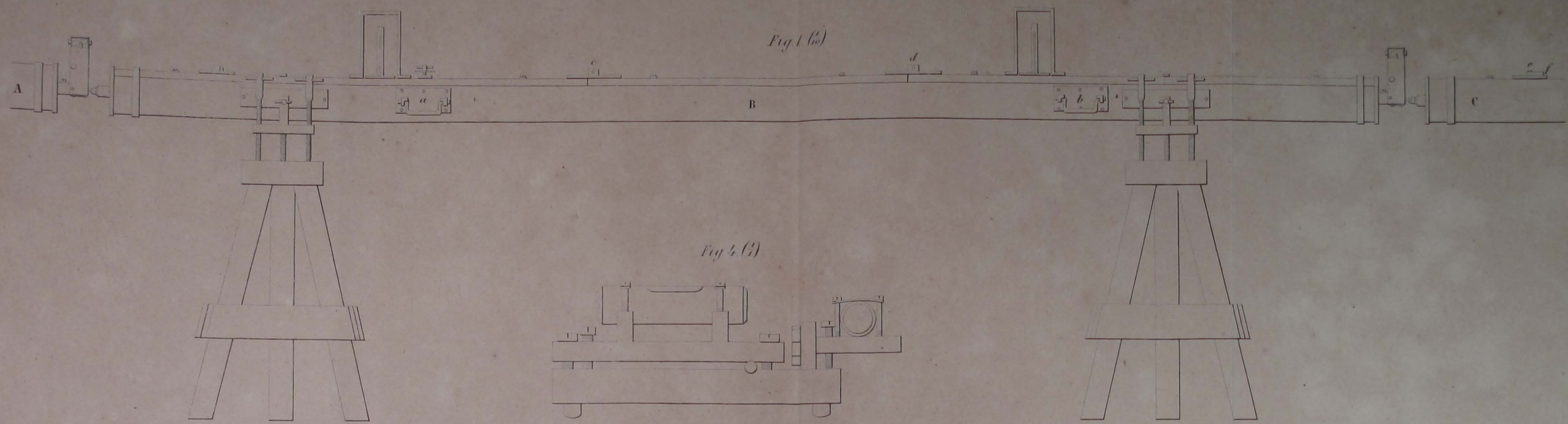


Fig. 5. (1/2)

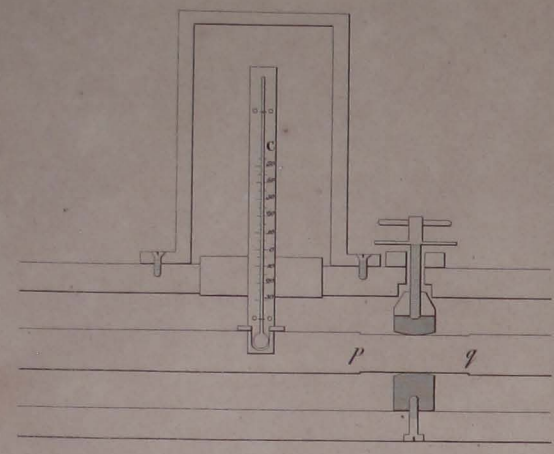


Fig. 6. (1/2)

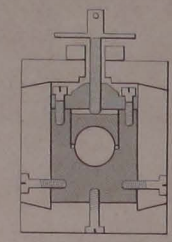


Fig. 7. (1/2)

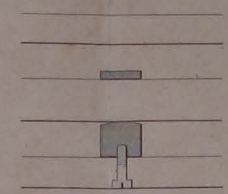


Fig. 8. (1/2)

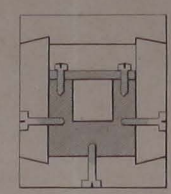


Fig. 9. (1/2)

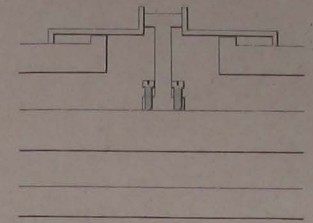


Fig. 10. (1/2)

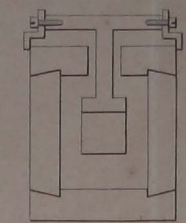


Fig. 17. (1/2)

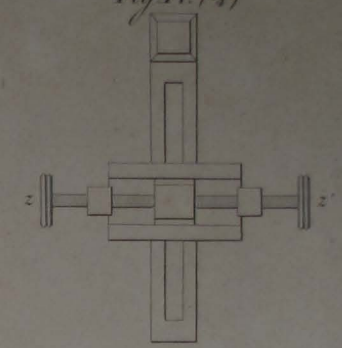


Fig. 16. (1/2)

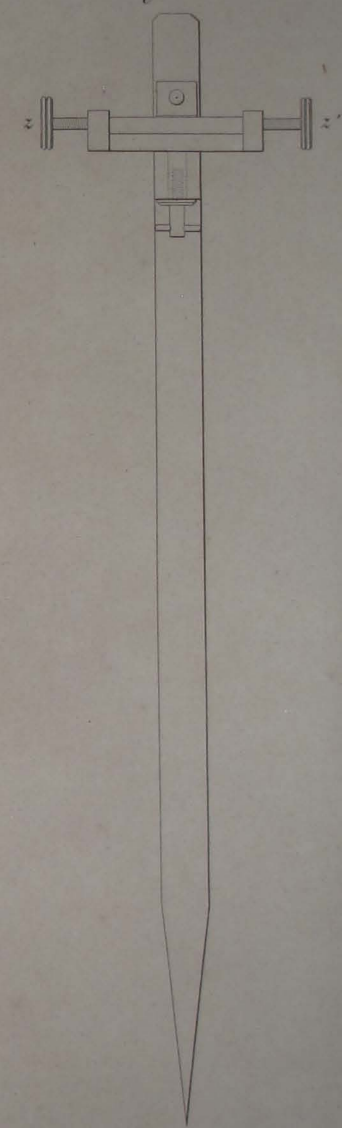


Fig. 12. (1/2)

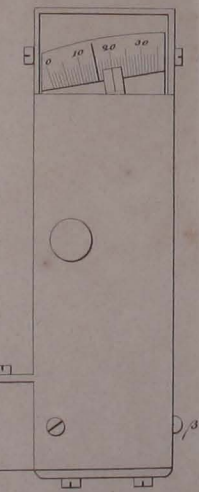


Fig. 13. (1/2)

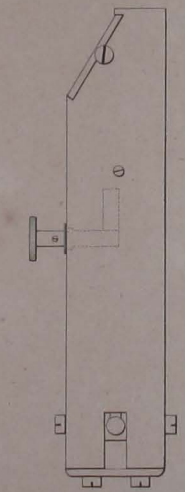


Fig. 14. (1/2)

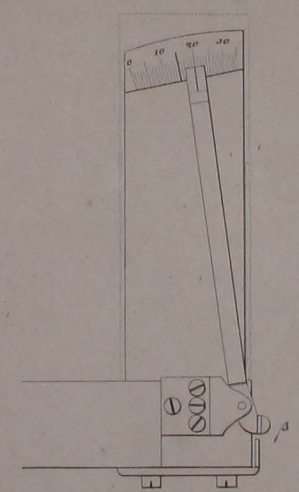


Fig. 15. (1/2)

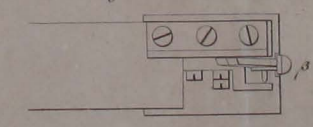


Fig. 11. (1/2)

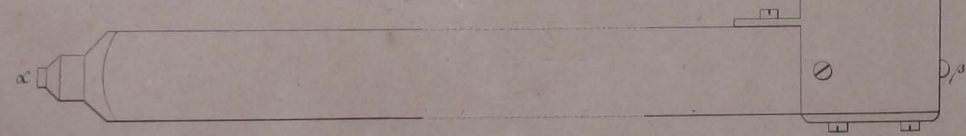


Fig. 18 (1/2)

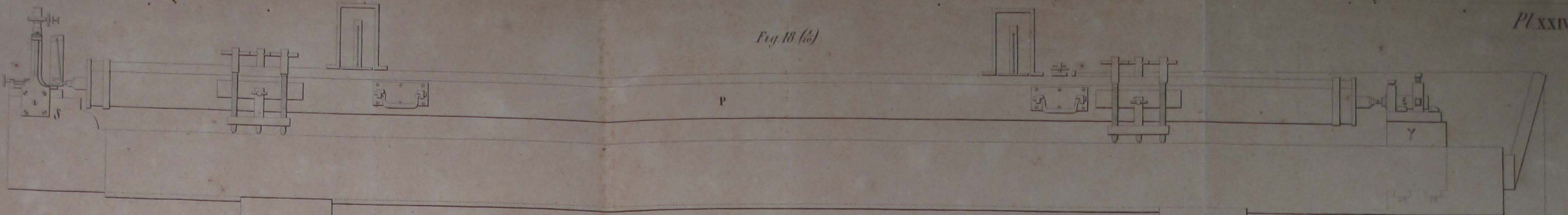


Fig. 22 (1/2)

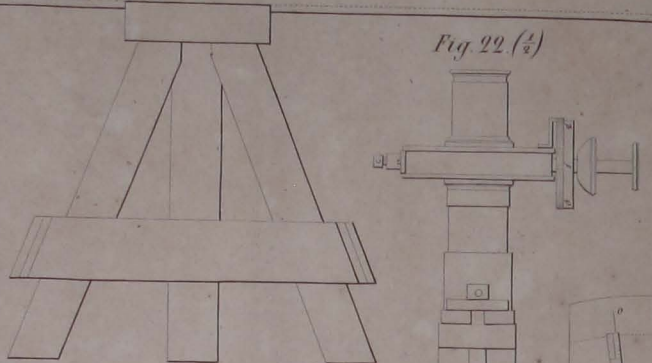


Fig. 25 (1/2)

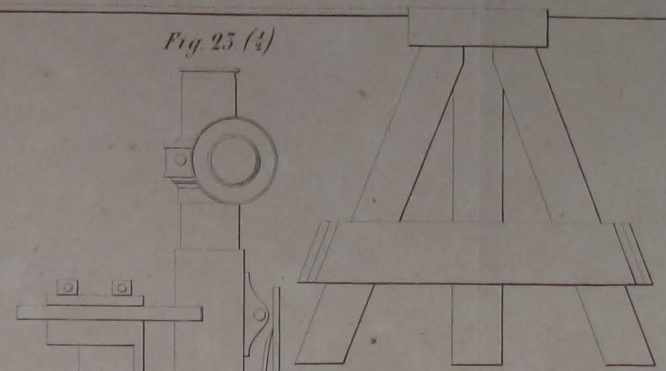


Fig. 20 (1/2)

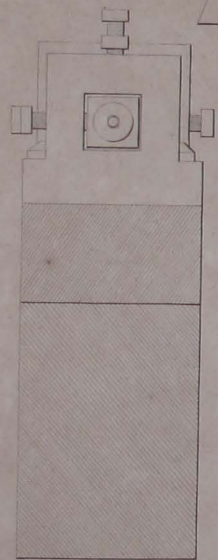


Fig. 21 (1/2)

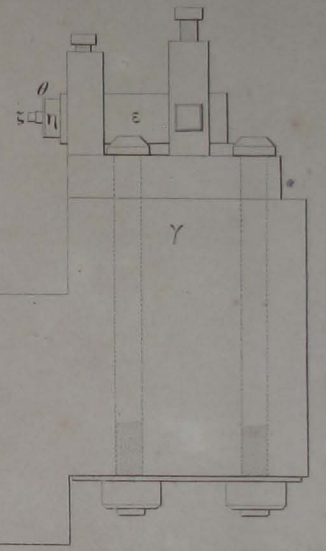
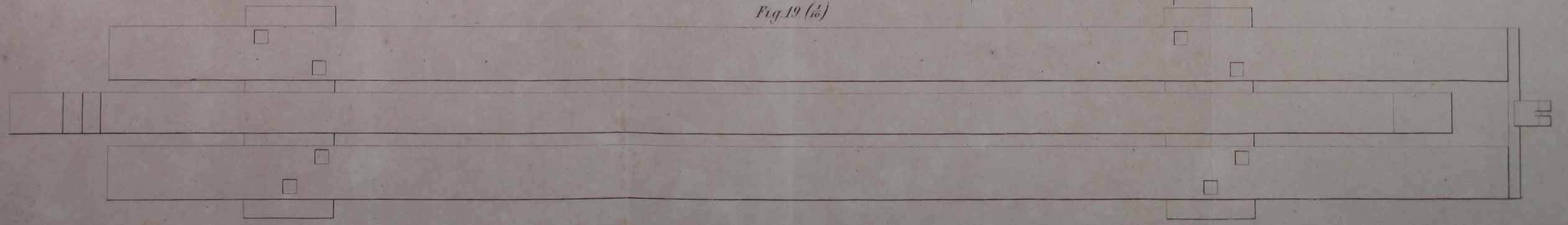


Fig. 19 (1/2)



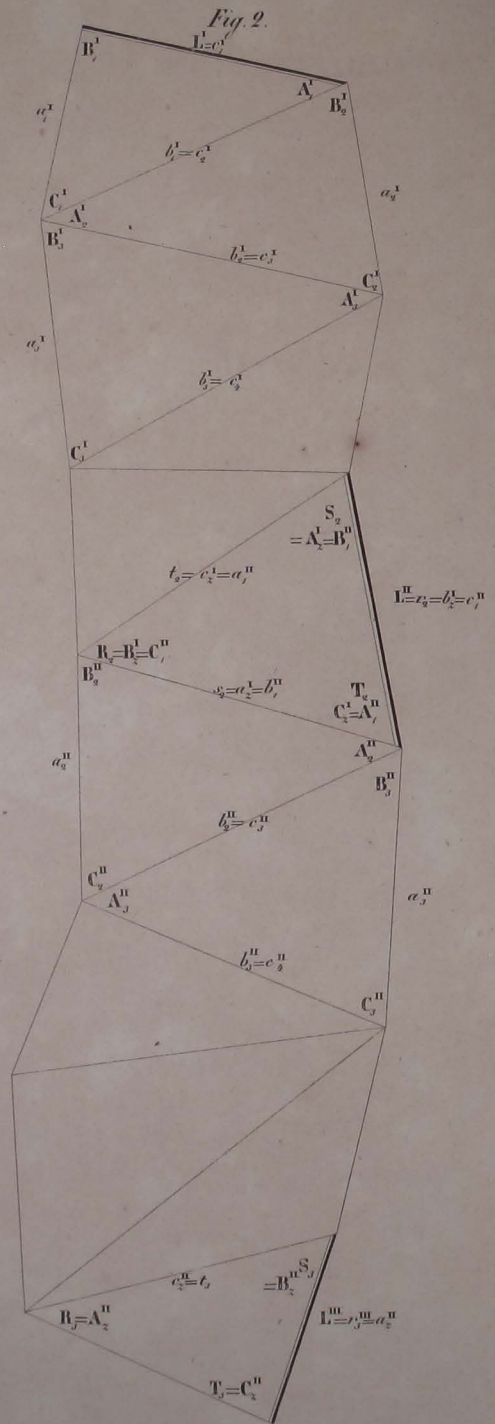
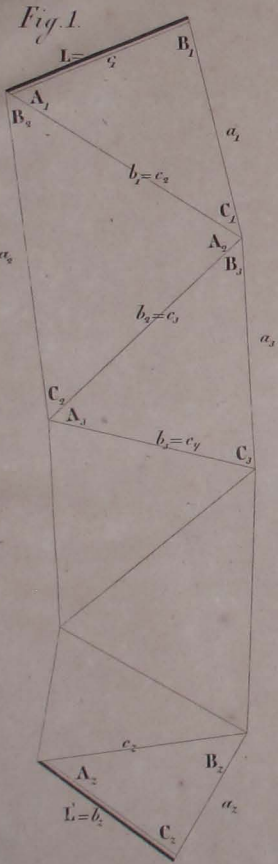


Fig. 1.

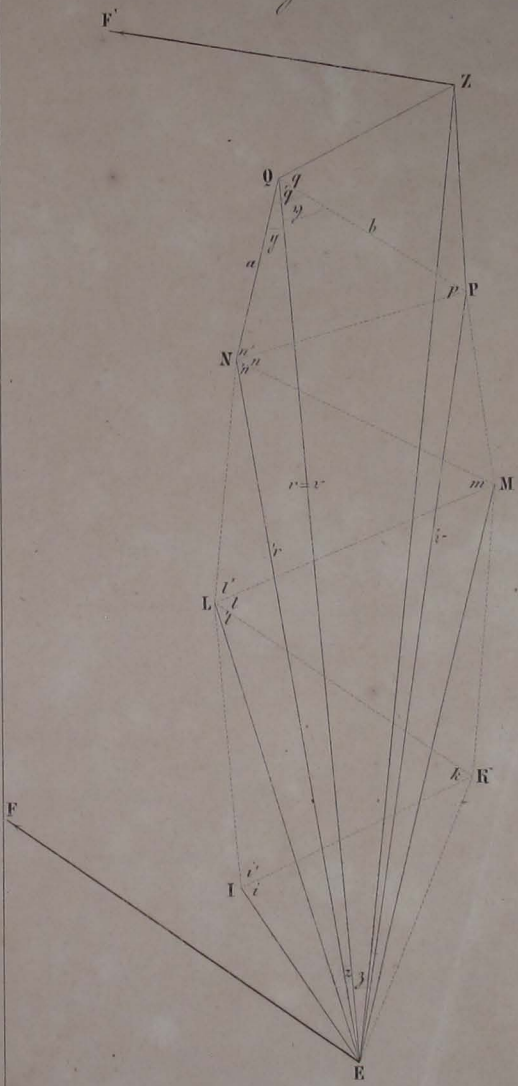


Fig. 2.

